

ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Д.В. Костин, Ю.И. Сапронов

**Функциональный анализ и
многомодовые прогибы упругих систем**

Воронеж 2012

УДК 517.9
ББК 22.22.162

Рецензент: доктор физ.–мат. наук профессор В.А. Родин.

Костин Д.В., Сапронов Ю.И. Функциональный анализ и многомодовые прогибы упругих систем. Воронеж: ВГУ. 2012. 207 с. Библ.: 97 наименований.

В книге изложены теоретические основы локального анализа параметрических семейств гладких функционалов на бесконечномерных банаховых пространствах. Эта теория находит применения в исследованиях посткритических состояний сложных систем, среди которых — упругие системы, переходящие в новые конфигурации после потери устойчивости по нескольким направлениям (модам), кристаллы в новой многомодовой сегнетоэлектрической фазе, нелинейные волны, сформированные под влиянием нескольких волновых мод, и т.д.

В текст включены элементы теории гладких функций многих переменных, не вошедшие еще в традиционные университетские курсы математического анализа, но уже играющие важную роль в применениях современного математического анализа.

Авторы питают надежду на то, что данная книга, изначально задуманная как учебное пособие для студентов математических факультетов университетов, будет также полезной аспирантам в их работе над диссертациями по темам, связанным с посткритическим анализом сложных систем, и молодым преподавателям, проводящим занятия по элементам «гладкого» нелинейного анализа.

© Воронежский государственный университет, 2012

© Кафедра математического моделирования ВГУ, 2012

Содержание

Введение	7
1 Гладкие функции и их особенности	12
1.1 Лемма о расщеплении особенности гладкой функции . . .	13
1.2 Некоторые сведения из локального анализа гладких функций	16
1.3 Простейшие типы особенностей	22
1.4 Редуцирующая схема Пуанкаре	29
1.5 Обобщенная схема Пуанкаре	32
1.6 Примеры	35
1.6.1 Функция высоты на двумерном торе	35
1.6.2 Преобразование Лежандра	36
1.6.3 Посткритические равновесия упругой цепи	37
1.7 Бифуркации экстремалей из точек минимума с особенностью многомерной сборки	40
1.7.1 Особенности многомерной сборки	40
1.7.2 Редукции деформацийборок	43
1.7.3 Общие утверждения о бифуркации экстремалей из точки минимума с особенностью сборки	51
1.8 Бифуркационный анализ ключевой функции в случае особенности 2-мерной сборки	55
1.9 Полурегулярные угловые особенности	63
1.9.1 Основные определения	63
1.9.2 Каустики	66
1.9.3 Малые размерности	68
1.9.4 Теорема А.В. Гнездилова	73
1.10 Стратифицированные множества	77
1.11 Алгебраические множества	79
1.12 Изолированные особые точки алгебраических множеств . .	81

1.13	Топологическая степень отображения. Истоки понятия степени	83
1.14	Одномерные отображения	86
1.15	Отображения n -мерных пространств	88
1.16	Отображения n -мерных многообразий	92
1.17	Индексы зацеплений гладких циклов	93
2	Метод фредгольмова функционала	94
2.1	Общие сведения о фредгольмовых уравнениях	94
2.2	Фредгольмов функционал	95
2.3	Леммы Морса	97
2.4	Фредгольмовы функционалы с групповой симметрией . . .	98
2.5	Фредгольмовы уравнения с параметрами	99
2.6	Схема Ляпунова – Шмидта (локальная)	100
2.7	Вариационная версия метода Ляпунова – Шмидта	102
2.8	Редукция Морса – Ботта	104
2.9	Обобщенная редукция	105
2.10	Квазиинвариантные подмногообразия в бесконечномерных пространствах	107
2.11	Приближенное вычисление ключевой функции	109
2.12	Алгоритм вычисления ключевой функции, асимптотическое представление решений	112
2.13	Каустика в бесконечномерном случае	114
2.14	Топологическое сравнение ключевых функций	114
2.15	Угловые особенности функционалов и их возмущения . . .	116
2.15.1	Редуцирование угловых особенностей	117
2.15.2	Многообразие катастроф и каустика	118
2.15.3	Моды бифуркации	119
2.16	Фредгольмовы функционалы с круговой симметрией . . .	121
2.16.1	Функционалы с гладкой круговой симметрией . . .	121
2.16.2	Ослабление условия гладкости действия группы Ли	122
2.16.3	О бифуркации циклов динамических систем	124
2.17	Многомодовые вырождения экстремалей функционалов с круговой симметрией	127
2.18	Пример вырождения по шести модам	128

2.19	Вычисление главной части ключевой функции	130
2.19.1	Случай резонанса $1 : 2$	130
2.19.2	Трехмодовые бифуркации. Базисные инварианты .	135
2.19.3	Случай резонанса $1 : 2 : 4$	136
2.19.4	Бифуркационный анализ ключевой функции посред- ством редукция к краевой особенности	138
2.20	Параметризации каустик на основе алгоритма Релея – Шре- дингера	140
2.20.1	Прямой подход к описанию каустики	141
2.20.2	Параболические множества	141
2.20.3	Случай простого собственного значения	143
2.20.4	Вычисление асимптотик более высокого порядка . .	144
2.20.5	Случай кратного собственного значения	146
2.20.6	О параметризации квазиинвариантного сфероида .	148
3	Бифуркационный анализ вариационных задач в случае понижения симметрии параллелепипеда	150
3.1	Вычисление главной части ключевой функции в случае ба- зиса ритцевской аппроксимации, состоящего из собствен- ных функций	151
3.2	Вычисление главной части ключевой функции в случае ба- зиса ритцевской аппроксимации, состоящего из корневых функций	155
3.3	Построение базиса ритцевской аппроксимации, состоящего из корневых функций	158
4	Прогибы упругих балок и пластин	161
4.1	Анализ некоторых конфигураций пространственного (кирх- гофова) стержня	161
4.1.1	Математическая модель пространственного стержня	161
4.1.2	Редукция к эйлерову стержню	163
4.1.3	Применение редуцирующей схемы Морса – Ботта .	167
4.1.4	Случай искривленного стержня	170
4.1.5	Примеры приближенного построения каустик и ре- шений	172

4.2	Двухмодовые прогибы упругих балок на упругом основании	175
4.2.1	Случай однородной балки	176
4.2.2	Случай пары упруго связанных балок	180
4.2.3	Случай слабо неоднородной балки	181
4.2.4	Вычисление интегральных коэффициентов	183
4.2.5	Исследование каустики главной части ключевой функции	187
4.3	Двухмодовые прогибы слабо неоднородной упругой пластины Кáрмана	190
4.3.1	Однородная упругая пластина	190
4.3.2	Неоднородная упругая пластина	191
4.3.3	Вычисление интегральных коэффициентов	193
	Литература	198

Введение

Данная книга посвящена традиционной для воронежской математической школы области научных изысканий — анализу гладких функционалов на бесконечномерных многообразиях и его приложениям к нелинейным краевым задачам. В качестве основных модельных примеров взяты избранные задачи из теории упругих систем.

Направление исследований, связанное с анализом гладких функционалов, было сформировано в Воронежском университете во второй половине прошлого столетия усилиями М.А. Красносельского, его учеников — Н.А. Бобылёва, Ю.Г. Борисовича, П.П. Забрейко, Ю.С. Колесова, Э.М. Мухамадиева, В.В. Покорного, Б.Н. Садовского, В.В. Стрыгина и его последователей — А.Ю. Борисовича, В.Р. Зачепы, В.Г. Звягина, Д.В. Костина, Ю.И. Сапронова, С.Л. Царёва и др.

Мощный импульс в развитии бифуркационного анализа вариационных задач был получен в результате оснащения старых традиционных методов новыми методами теории особенностей гладких функций. Важную роль в формировании этого импульса в Воронеже сыграли превосходные лекции В.И. Арнольда и его учеников — А.Н. Варченко, С.М. Гусейн-Заде, А.Г. Хованского, прочитанные ими в нескольких Воронежских зимних школах. Заметное влияние на этот процесс оказали и циклы лекций по гладкой топологии, прочитанные в разное время на математическом факультете ВГУ С.В. Матвеевым, А.С. Мищенко, В.П. Паламодовым, М.М. Постниковым, А.Т. Фоменко, А.В. Чернавским и А.С. Шварцем (лекции по приглашениям, организованным Ю.Г. Борисовичем).

Основной объект изучения в книге — экстремальная задача

$$V(x, \lambda) \longrightarrow \inf, \quad x \in M, \quad \lambda \in \Lambda,$$

в которой V — гладкое семейство гладких фредгольмовых функционалов, определенных на гладком банаховом многообразии M , λ — параметр со значениями в некоторой области Λ банахова пространства L (конечномерного или бесконечномерного). Исследование этой задачи осуществляется переходом (редукцией) к аналогичной задаче $W(\xi, \lambda) \longrightarrow \inf$ на конечномерном пространстве.

Общеизвестно, что ряд важнейших краевых задач теории упругих систем естественным образом допускает, при соответствующих оператор-

ных трактовках уравнений, эквивалентную постановку в виде упомянутой выше вариационной задачи (на банаховом пространстве E конфигураций упругой системы) [9], [50], [79].

Фредгольмовость функционала означает, по определению, фредгольмовость (нулевого индекса) соответствующего градиентного отображения $f_\lambda : E \longrightarrow F$, где F — некоторое банахово пространство (пространство значений градиента). Градиент определяется традиционным образом — через соотношение

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x)h \equiv \langle f(x), h \rangle,$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение, взятое из некоторого заранее заданного гильбертова пространства H , которое содержит E и F как непрерывно и плотно вложенные подпространства. Предполагается также, что E непрерывно вложено в F . В этом случае говорят, что функционал V обладает градиентной реализацией в тройке пространств $\{E, F, H\}$, и используется обозначение $f = \text{grad } V$.

В книге выделены два (основных) примера: 1) задача о 2-модовых закритических прогибах слабо неоднородной упругой балки на упругом основании, определяемых уравнением

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(q \frac{d^2 w}{dx^2} \right) + \kappa \frac{d^2 w}{dx^2} + \alpha w + w^3 = 0, \quad q(x) = 1 + \varepsilon \gamma(x),$$

при краевых условиях

$$w(0) = w(1) = w''(0) = w''(1) = 0,$$

и 2) задача о 2-модовых закритических прогибах слабо неоднородной упругой пластины, определяемых уравнениями Кáрмана

$$\Delta(q \Delta w) - [w, \varphi] + \lambda w_{xx} = \Delta^2 \varphi + \frac{1}{2}[w, w] = 0$$

при краевых условиях

$$w = \Delta w = \varphi = \Delta \varphi = 0|_{\Omega_a}$$

(w и φ — функции прогиба и напряжения пластины, Δ — оператор Лапласа, $[w, \varphi] := w_{xx}\varphi_{yy} + w_{yy}\varphi_{xx} - 2w_{xy}\varphi_{xy}$, $\Omega_a = [0, a] \times [0, 1]$, λ — параметр нагрузки).

Потенциалами этих задач служат соответствующие функционалы энергии

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{2} \left(q \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 - \kappa \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 + \alpha w^2 \right) + \frac{w^4}{4} \right) dx,$$

$$\int_{\Omega_a} \left(\left(\frac{q}{2} |\Delta w|^2 - \lambda |w_{xx}|^2 \right) + \frac{1}{8} |\Delta^{-1}[w, w]|^2 \right) dx dy.$$

При $\varepsilon = 0$ (в случае однородной балки и пластины) полный бифуркационный анализ этих задач был осуществлен Ю.И. Сапроновым и Б.М. Даринским [29], [32], [75], [77]. В статьях [47], [48] проведен анализ этих краевых задач при малых $\varepsilon \neq 0$. Переход к случаю неоднородной балки и неоднородной пластины потребовал перестройки в вычислительной схеме Даринского — Сапронова, в основе которой лежало условие постоянства пары собственных функций e_1, e_2 линейной части уравнения в нуле при всех значениях параметров. В случае неоднородности это условие нарушается и, более того, оно не допускает обобщения, например, в виде условия существования непрерывного семейства собственных функций. В схеме, предложенной в работах Костина [47], [48], условие постоянных собственных функций заменено условием существования пары гладких параметрических семейств функций $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2$, линейная оболочка которых инвариантна относительно линейной части уравнения в нуле. Такая пара, в случае ее построения, позволяет провести *полный анализ ветвления равновесных конфигураций балки и пластины в условиях слабой неоднородности*.

Решение данной задачи представляет реальный интерес для теории многомодового посткритического анализа упругих систем.

Представляет интерес и задача выяснения зависимости «геометрии прогиба» от «характера неоднородности».

Наша основная цель — описание на рассмотренных примерах общих методов бифуркационного анализа нелинейных краевых задач теории упругих систем в условиях многомодового вырождения и понижения симметрии. Бифуркационный анализ состоит, в нашей трактовке, из описания каустики функционала энергии (или, что эквивалентно, дискриминантного множества уравнения равновесия), классификации раскладов

бифурцирующих равновесных конфигураций и вычисления асимптотических приближений к ветвям бифурцирующих прогибов.

В математических конструкциях данного повествования использованы как методы общей теории бифуркаций решений нелинейных краевых задач вариационного исчисления (в функционально-операторной оболочке), так и теории гладких функций многих переменных, включая новую и стремительно развивающуюся главу последней — теорию особенностей гладких функций.

Базу представленной в книге аналитической схемы составляет модифицированный метод Пуанкаре – Ляпунова – Шмидта, оснащенный конструкциями теории особенностей гладких функций.

В книге изложены как традиционные подходы (в рамках избранной авторами аналитической схемы), так и новые оригинальные разработки авторов и их коллег. Среди новых разработок выделяются:

- новая модификация схемы анализа бифуркаций вариационных краевых задач, приспособленная для условий многомодового вырождения и понижения симметрии параллелепипеда,
- методика изучения геометрического строения каустики,
- методика классификации раскладов бифурцирующих конфигураций в случаях многомодовых вырождений уравнений,
- методика получения асимптотических формул (по малому закритическому приращению параметра) для ветвей бифурцирующих решений.

Дано также описание аналитической зависимости закритических прогибов упругих балок и пластин от характера неоднородности, и изложены результаты компьютерной апробации разработанных авторами вычислительных алгоритмов. Как следствие, получена полная визуализация бифуркационного анализа слабо неоднородных упругих балок и пластин.

Книга по своему содержанию имеет теоретический характер. Представленный в ней материал дает теоретическое обоснование и проливает свет на возможное новое развитие метода фредгольмовых уравнений в общей теории бифуркаций решений нелинейных краевых задач. Вместе с тем описание геометрии каустик, классификация бифурцирующих раскладов решений и описание аналитической зависимости прогибов упругих балок и пластин от характера неоднородности могут найти практиче-

ское применение в задачах современной теории посткритического анализа упругих систем.

Первые две главы носят, в основном, пропедевтический характер. В них содержится краткое изложение ряда известных результатов по исследованию бифуркаций решений краевых задач, адаптированное к ситуации, рассматриваемой в книге.

В третьей главе приведены результаты исследования бифуркаций экстремалей абстрактного фредгольмова функционала из особой точки с многомерным вырождением при нарушении симметрии параллелепипеда. Симметрия параллелепипеда означает инвариантность функционала относительно ортогонального (в H) действия группы $\mathbb{Z}_2^n$, заданного набором коммутирующих инволюций, с условием, что линейная оболочка N основных мод бифуркации (по которым вырождается краевая задача) инвариантна относительно этого действия, а индуцированное действие на N является полуточным, т.е. с единственной неподвижной точкой (в нуле). Материал главы опирается на теорию конечномерных редукций — аппарат для исследования потенциальных физических систем с неединственностью состояний.

В четвертой главе разобраны примеры. Изложена схема анализа бифуркаций равновесных конфигураций слабо неоднородной упругой балки на упругом основании в условиях двухмодового вырождения. Переход к случаю неоднородной балки потребовал перестройки в традиционной исследовательской схеме [32]: условие постоянных собственных функций заменено условием существования пары гладких векторных полей $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2$, линейная оболочка которых инвариантна относительно второго кодифференциала в нуле. Рассмотрение слабо неоднородной балки привело к «понижению» симметрии ключевой функции и увеличению на единицу размерности ее базы деформации. Анализ бифуркационных диаграмм и бифурцирующих критических точек в этой ситуации несколько усложнился, но выявил новые бифуркационные эффекты. Здесь появилось дополнительное слагаемое $\tilde{\nu}_3 \xi_1 \xi_2$, разрушающее симметрию прямоугольника. В книге приведены изображения каустик (полученные в компьютерной среде Maple), изображения метаморфоз линий уровней ключевых функций и перечислены *bif*-расклады. Аналогичный анализ проведен и в случае краевой задачи для уравнения Кáрмана.

Глава 1

Гладкие функции и их особенности

Общеизвестно, что решение многих задач математического анализа сложных систем сводится к изучению поведения гладких функций многих переменных. Общая «качественная картина» строения «достаточно регулярной» гладкой функции тесно связана с составом ее особых точек. Например, если функция V является коэрцитивной (растущей на бесконечности) и строго выпуклой, то V обладает лишь единственной особой точкой, и в этой точке функция принимает строго минимальное значение. График такой функции напоминает чашу с закругленным дном. В противном случае (без выпуклости) функция может иметь несколько точек локального минимума, что существенно затрудняет ее анализ. Ситуация становится ещё более сложной при наличии дополнительных параметров, изменение которых приводит к бифуркационным перестройкам функции. А. Пуанкаре предложил процедуру [73], позволяющую во многих случаях облегчить изучение ветвления экстремалей за счет исключения «несущественных» переменных. Конструкция Пуанкаре приведена ниже. Заметим, что она является предтечей широко известной схемы конечномерной редукции — схемы Ляпунова – Шмидта, служащей фундаментом для многочисленных исследований по проблемам посткритического анализа.

Под «достаточной регулярностью» гладкой функции подразумевается конечнократность каждой особой точки. Описание локального строения функций вблизи конечнократных особых точек и описание соответствующих морсовизаций включаются в более общую теорию *деформаций особенностей*. Под гладкой деформацией особенности подразумевается включение функции V в гладкое λ -параметрическое семейство гладких функций $U(x, \lambda)$, $U(x, 0) = V(x)$, определенных на некоторой окрест-

ности нуля в $\mathbb{R}^n$, $\lambda \in \Lambda$, Λ — некоторая окрестность нуля в $\mathbb{R}^l$. Среди всевозможных гладких деформаций выделяются так называемые *версальные* и *миниверсальные* деформации, играющие важную роль в общей теории. Это связано с тем, что версальные деформации содержат в себе все метаморфозы (перестройки поверхностей уровня, распадаения особых точек, различные бифуркационные эффекты и т.д.), которые могут произойти при произвольном гладком деформировании функции. Ниже приведены основные сведения по теории конечнократных особых точек гладких функций и их параметрических возмущений (деформаций).

1.1 Лемма о расщеплении особенности гладкой функции

Приведем в удобной для дальнейшего применения форме следующее классическое утверждение теории гладких отображений конечномерных пространств:

Теорема 1.1. (о неявной функции) Пусть левая часть уравнения

$$f(\xi, \lambda) = 0 \quad (1.1)$$

задана таким гладким¹ отображением $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^\mu \rightarrow \mathbb{R}^n$, что

$$f(0, 0) = 0$$

и

$$\det \partial f / \partial \xi(0, 0) \neq 0.$$

Тогда найдется такая окрестность $\mathcal{U} = \Xi \times \Lambda$ точки $(0, 0)$ в $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^\mu$, что множество решений в $\mathcal{U}$ уравнения (1.1) совпадает с графиком некоторого гладкого (единственного) отображения $\Psi : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^n$, такого, что $\Psi(0) = 0$. Иными словами, для (ξ, λ) , близких к решению $(0, 0)$,

$$f(\xi, \lambda) = 0 \Leftrightarrow \xi = \Psi(\lambda).$$

Доказательство имеется, например, в [52], [64] и многих учебниках по математическому анализу.

¹ Здесь и всюду далее это слово означает бесконечную дифференцируемость.

Левую часть уравнения (1.1) можно воспринимать как зависящее от параметра λ гладкое семейство отображений $f(\cdot, \lambda) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Если $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ и $f(a) = 0$, то точка a называется *особой точкой* отображения f ; если $\det \partial f / \partial x(a) \neq 0$, то особая точка называется *регулярной*. Теорема о неявной функции выявляет *однократность* регулярной особой точки: при произвольных малых возмущениях отображения $f(\cdot, 0)$ (при достаточно малых λ) вблизи регулярного решения $\xi = 0$ уравнения $f(\xi, 0) = 0$ имеется ровно одно решение возмущенного уравнения $f(\xi, \lambda) = 0$.

Пусть теперь $f(\xi, \lambda) = \nabla V(\xi, \lambda)$, где ∇ означает *градиент*² по переменным ξ . Особая точка отображения ∇V называется также *особой* (или *критической*) для функции V . Если

$$\nabla V(a, \lambda) = 0 \quad \text{и} \quad \det \partial^2 V / \partial \xi^2(a, \lambda) \neq 0,$$

то критическая точка a функции $V(\cdot, \lambda)$ называется *невыврожденной* (или *морсовской*).

Теорема 1.2. (Лемма Морса) *Если a — невырожденная критическая точка функции V , то вблизи точки a определены гладкие координаты $x_1(\xi), \dots, x_n(\xi)$, такие, что $x_1(a) = \dots = x_n(a) = 0$ и*

$$V(\xi) = \text{const} - x_1^2 - \dots - x_r^2 + x_{r+1}^2 + \dots + x_n^2 \quad (1.2)$$

на всей совместной области определения координат $x_1, \dots, x_n$.

Замечание 1.1. В формуле (1.2) константа равна, как легко видеть, $V(a)$, а число r — отрицательный индекс инерции квадратичной формы $\partial^2 V / \partial \xi^2(a)$ — называется *индексом Морса критической точки a* .

Замечание 1.2. Выражение «гладкие координаты» означает, что отображения $\xi \mapsto x$ и $x \mapsto \xi$ определены и гладки на некоторых окрестностях точек a и 0 соответственно, т. е. отображение $\xi \mapsto x$ является диффеоморфизмом (локальным, поскольку он определен лишь на некоторой окрестности, заранее не известной).

² Под *градиентом* функции $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ понимается отображение $\nabla V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, определяемое условием $\langle \nabla V(\xi), h \rangle = V'(\xi)h \quad \forall \xi, h \in \mathbb{R}^n$, где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — стандартное скалярное произведение на $\mathbb{R}^n$. В евклидовом пространстве производная $V'(\xi)$ и градиент $\nabla V(\xi)$ отождествляются канонически, однако в банаховых пространствах эта конструкция не столь тривиальна и сыграет в наших построениях существенную роль. Другое обозначение градиента: $\text{grad } V$.

Функции V_1 и V_2 называются *правозквивалентными* (в дальнейшем мы будем говорить просто: *эквивалентными*), если $V_1 \equiv V_2 \circ \varphi$ на некотором подмножестве области определения V_1 , где φ — диффеоморфизм. На этом языке, принятом в теории особенностей гладких функций [4], [14], лемма Морса есть утверждение о том, что функция, имеющая невырожденную критическую точку, локально эквивалентна вблизи этой точки некоторой стандартной (нормальной) форме. Список нормальных форм в морсовском случае конечен: индекс Морса может принимать значения от 0 (точка минимума) до n (точка максимума).

Доказательство леммы Морса удобно проводить, опираясь на тейлоровское разложение 2-го порядка функции V с последующим приведением получаемой квадратичной формы (с переменными коэффициентами) к сумме квадратов (см., например, [59], [71]).

Лемму Морса легко обобщить на случай семейств функций: если задано зависящее от параметра $\lambda \in \Lambda \subset \mathbb{R}^m$ гладкое семейство функций, $V(\cdot, \lambda) : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$, и функция $V(\cdot, \lambda_0)$ имеет при $\xi = a$ невырожденную критическую точку, то существует гладкое семейство локальных диффеоморфизмов φ_λ , такое, что $\varphi_{\lambda_0}(a) = 0$ и

$$V(\varphi_\lambda^{-1}(x), \lambda) \equiv c(\lambda) - x_1^2 - \cdots - x_r^2 + x_{r+1}^2 + \cdots + x_n^2. \quad (1.3)$$

Из этого утверждения следует (структурная) *устойчивость* морсовской критической точки: при малом возмущении функции вблизи ее критической точки имеется критическая точка (также невырожденная и того же индекса Морса) возмущенной функции.

Если a — *вырожденная* критическая точка функции V , то сколь угодно мало возмущенная функция может не быть эквивалентной исходной. Поведение функции на окрестности вырожденной критической точки вообще может быть весьма сложным; изучением таких критических точек занимается *теория особенностей гладких функций* (*особенностью* называется класс локальной правой эквивалентности функций в критической точке). При всех имеющихся больших научных достижениях в решении проблемы описания строений функций вблизи вырожденных критических точек, она на сегодняшний день еще весьма далека от своего окончательного решения [4]. Следующая теорема позволяет, за счет «избавления» от «несущественных» переменных, свести изучение функции в вырожденной

критической точке к анализу функции, определенной на пространстве, размерность которого равна размерности ядра второго дифференциала.

Теорема 1.3. (Лемма о расщеплении особенности) Пусть $a \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ — вырожденная критическая точка функции $V : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$, то есть

$$\frac{\partial V}{\partial \xi}(a) = 0, \quad \text{rk } \frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2}(a) = s < n.$$

Тогда существует локальный диффеоморфизм $\varphi : \xi \mapsto (x, u)$, $x \in \mathbb{R}^s$, $u \in \mathbb{R}^{n-s}$, такой, что $\varphi(a) = 0$ и

$$V(\varphi^{-1}(x, u)) = -x_1^2 - \dots - x_r^2 + x_{r+1}^2 + \dots + x_s^2 + W(u_1, \dots, u_{n-s}), \quad (1.4)$$

где $\partial^2 W / \partial u^2(0) = 0$.

Доказательство. Пусть $f_1, \dots, f_n$ — такой базис в пространстве $\mathbb{R}^n$, что $f_{s+1}, \dots, f_n$ — базис $\text{Ker } \partial^2 V / \partial \xi^2(a)$, $y_1, \dots, y_s, u_1, \dots, u_{n-s}$ — координаты в этом базисе, φ_1 — отображение замены координат: $\xi = \varphi_1(y, u)$. Функция $\tilde{V}(y, u) := V \circ \varphi_1(y, u)$ удовлетворяет условиям параметрической леммы Морса (переменные u выступают в роли параметров); следовательно, гладкая замена переменной вида $(x, u) = (\varphi_2(y, u), u)$ приводит ее к форме

$$\tilde{V}(\varphi_2^{-1}(x, u), u) = -x_1^2 - \dots - x_r^2 + x_{r+1}^2 + \dots + x_s^2 + W(u_1, \dots, u_{n-s}),$$

(φ_2^{-1} означает обращение по первой переменной при каждом значении u). Таким образом, диффеоморфизм φ в формуле (1.4) получается как композиция φ_1 и φ_2 . По построению, $\partial^2 W / \partial u^2(0) = 0$.

Число $\dim \text{Ker } \partial^2 V / \partial \xi^2(a)$, где a — критическая точка функции V , называется *размерностью* особенности функции V . Разумеется, лучше всего изучены «маломерные» особенности.

1.2 Некоторые сведения из локального анализа гладких функций

Одним из важнейших в теории особенностей гладких функций является понятие *кратности* критической точки. Пусть $a \in \mathbb{R}^n$ — критическая точка функции V . Тогда функции $\partial V / \partial x_1, \dots, \partial V / \partial x_n$ порождают так называемый *якобиев идеал* $\langle \partial V / \partial x_1, \dots, \partial V / \partial x_n \rangle$ функции V в

кольце $\mathbb{R}[[x-a]] = \mathbb{R}[[x_1-a_1, \dots, x_n-a_n]]$ формальных степенных рядов³ вида

$$\sum_{p_1, \dots, p_n} \beta_{p_1, \dots, p_n} (x_1 - a_1)^{p_1} \dots (x_n - a_n)^{p_n}$$

с вещественными коэффициентами $\beta_{p_1, \dots, p_n}$.

Факторкольцо

$$Q = \mathbb{R}[[x-a]] / \langle \partial V / \partial x_1, \dots, \partial V / \partial x_n \rangle$$

называется *локальным кольцом особенности* функции V в точке a (это определение корректно, поскольку заданные таким образом локальные кольца оказываются попарно изоморфными для всех функций из любого класса (попарно) эквивалентных функций [4]).

Число

$$\mu(V, a) = \dim Q(V, a)$$

(имеется в виду размерность $Q(V, a)$ как вещественного линейного пространства) называется *кратностью* особенности (или критической точки a). Локальное кольцо может оказаться и бесконечномерным: такая особенность считается очень сложной и к изучению непригодной. Далее мы будем рассматривать только конечнократные особенности.

Кратность особенности тесно связана с ее *корузмерностью*, которая, как мы впоследствии увидим, не имеет никакого отношения к размерности особенности.

Гладкие диффеоморфизмы $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ образуют группу (обозначим ее $Diff$), которую можно рассматривать как бесконечномерный аналог группы Ли [68]. Для каждой гладкой функции $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ множество функций, эквивалентных ей, является *орбитой* функции V относительно действия группы $Diff$:

$$Orb(V) = \{V \circ \varphi\}_{\varphi \in Diff}.$$

Известно, что в случае гладкого действия конечномерной группы Ли на гладком конечномерном многообразии все орбиты являются гладкими

³ Формальные степенные ряды образуют *коммутативное кольцо с единицей*, т. е. множество с операциями сложения и умножения, свойства которых во всем подобны свойствам аналогичных операций над вещественными числами, за исключением одного: не всякий ненулевой элемент имеет обратный по умножению. *Идеал* J в кольце A — это подкольцо, обладающее «идеальным свойством»: $u \cdot x \in J \quad \forall u \in J, x \in A$.

подмногообразиями [68], поэтому в каждой точке многообразия определено касательное к орбите подпространство. Его коразмерность (определяемая как разность между размерностью объемлющего пространства и размерностью касательного подпространства) называется коразмерностью орбиты. Коразмерность равна минимальному количеству «управляющих параметров» для точки в объемлющем пространстве, необходимому для устойчивого (не устранимого малым шевелением) пересечения орбиты «управляемой точкой».

В классической механике коразмерность многообразия состояний механической системы совпадает с количеством независимых связей, наложенных на нее и выделяющих «реальное» многообразие ее состояний. Наложение независимых связей уменьшает размерность многообразия состояний на число, равное количеству связей.

Аналоги подобных понятий и конструкций имеются и в бесконечномерном случае (в функциональных пространствах). К сожалению, мы не имеем здесь возможности более точного описания соответствующей теории.

Заметим лишь, что подмножество $\tilde{O}(V) \subset \mathbb{R}[[x]]$, состоящее из тейлоровских разложений в нуле для функций из $V_\varphi(x) = V(\varphi(x))$, также называется орбитой, и оно обладает многими свойствами обычных (конечномерных) орбит. В частности, для него определено касательное пространство, как множество T_V формальных степенных рядов вида

$$h(x) = \frac{d}{d\varepsilon} v(x + \varepsilon \mathcal{H}(x))|_{\varepsilon=0} = (\text{grad } V(z), \mathcal{H}(z))$$

(здесь $\mathcal{H}$ — произвольный степенной ряд с векторными (в $\mathbb{R}^n$) коэффициентами). Коразмерность T_V , определяемая как минимальная размерность подпространства в $\mathbb{R}[[x]]$, прямо дополняющего T_V до $\mathbb{R}[[x]]$, называется большой коразмерностью особенности V в нуле. Если к совокупности всех преобразований аргумента функции добавить преобразования сдвига значений функции, то орбита расширится на одно измерение, а коразмерность (расширенной) орбиты уменьшится на единицу. Эта величина (коразмерность расширенной орбиты) называется малой коразмерностью особенности или просто коразмерностью особенности V в нуле. Из описанных построений вытекает, что T_V совпадает с якобиевым идеалом в $\mathbb{R}[[x]]$, порожденным функцией V . Отсюда вытекает совпадение кратного

сти с большой коразмерностью или, соответственно, с коразмерностью, увеличенной на единицу.

Вопросы строения конечнократных особенностей функций и их морсовизаций естественно включаются в более общую теорию *деформаций особенностей*. Пусть функция V имеет в нуле конечнократную особенность. Под гладкой деформацией данной особенности подразумевается любое включение функции V в гладкое λ -параметрическое семейство гладких функций $U(x, \lambda)$, $U(x, 0) = V(x)$, определенных на некоторой окрестности нуля в $\mathbb{R}^n$, $\lambda \in \Lambda$, Λ — некоторая окрестность нуля в $\mathbb{R}^l$. Среди всевозможных гладких деформаций выделяются так называемые *версальные* и *миниверсальные* деформации, играющие важную роль в общей теории деформаций. Это связано с тем, что версальные деформации содержат в себе все метаморфозы функции (перестройки поверхностей уровня, распадаения особых точек, различные бифуркационные эффекты и т.д.), которые могут произойти при произвольном гладком деформировании функции.

Определение 1.1. *Гладкая деформация $U(z, \lambda)$ функции $V(x)$ называется версальной в нулевой точке, если для любой другой деформации $\tilde{U}(x, \nu)$ функции $V(x)$, $\nu \in \mathbb{R}^k$, найдется такое отображение из $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ в $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l$ вида*

$$(x, \nu) \rightarrow (\varphi(x, \nu), \psi(\nu)), \quad \varphi(x) = x, \quad (1.5)$$

определенное в некоторой сколь угодно малой окрестности нуля в $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$, что для всех (x, ν) из этой окрестности выполнено равенство

$$\tilde{U}(x, \nu) = U(\varphi(x, \nu), \psi(\nu)).$$

Версальная деформация с минимальным числом параметров m называется *миниверсальной*. Оказывается, что минимальное число параметров равно кратности μ деформируемой особенности [4]. Более того, гладкая деформация $U(z, \lambda)$ функции $V(x)$ является версальной в нулевой точке тогда и только тогда, когда факторклассы функций $\frac{\partial U}{\partial \lambda_j}(x, 0)$ (λ_j — координата λ , $j = 1, 2, \dots, m$) дают систему линейных образующих в локальном кольце особенности V в нуле (рассматриваемом как линейное пространство) [4], [14].

Систему функций $\left\{ \frac{\partial U}{\partial \lambda_j}(x, 0), j = 1, 2, \dots, \mu \right\}$ иногда называют начальными скоростями деформации.

Гладкая деформация $U(x, \lambda)$ миниверсальна в нулевой точке, если факторклассы ее начальных скоростей деформации образуют базис в локальном кольце особенности V в нуле. В частности, деформация

$$V(x) + \sum_{j=1}^{\mu} \lambda_j \omega_j(x), \quad (1.6)$$

где $\{\omega_j(x)\}$ — произвольный базис локального кольца особенности V в нуле, является миниверсальной.

Формула (1.6) дает наиболее простой и наиболее распространенный способ построения версальных деформаций. Обычно в качестве базисных функций $\{\omega_j(x)\}$ выбирают мономы (мономиальный базис локального кольца).

Отметим еще одно важное для приложений утверждение [4]: *если $\tilde{U}(x, \nu)$ и $U(x, \lambda)$ — миниверсальные деформации, то отображение (1.5) является (локальным) диффеоморфизмом.*

Слово «версальный» является общей частью слов «трансверсальный» и «универсальный» [4], выражающих формально другие понятия, но имеющих прямое отношение к версальным деформациям. Первое из них означает, что отображение из $Diff \times \mathbb{R}^{\mu}$ в $\mathbb{R}[[x]]$, заданное соответствием

$$(\varphi, \lambda) \mapsto \hat{V}_{\varphi}(x) + \sum_{k=1}^{\mu} \lambda_k \omega_k(x), \quad (1.7)$$

где $\hat{V}_{\varphi}(x)$ — ряд Тейлора функции $V_{\varphi}(x) := V(\varphi(x))$ в нуле, является субмерсией в нуле (образ производной Гато совпадает с $\mathbb{R}[[x]]$). Второе понятие означает, что *любая гладкая деформация $\tilde{U}(x, \nu)$ функции V может быть получена из версальной деформации (1.6) посредством замены параметра и замены основного аргумента (зависящей от параметра) (см. (1.5)).*

Посредством миниверсальных деформаций вводятся различные *бифуркационные диаграммы*, важнейшими среди которых являются *каустики*, *дискриминантные множества* и *множества Максвелла*. Как правило, функция V предварительно приводится (посредством подходящей замены координат) к полиномиальной нормальной форме (нормали-

зация не является обязательной процедурой, но после ее осуществления многие вычисления проводятся проще). В рамках алгебраического формализма теории особенностей накоплен определенный опыт построения полиномов, выражающих своей алгебраической формой типы (*архетипы*) особенностей гладких функций [4], [72].

Пусть λ принадлежит заданной области $\Lambda \subset \mathbb{R}^\mu$. Через $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ обозначим «наблюдаемую» область (в ней и только в ней находятся изучаемые критические точки).

Каустика Σ — это совокупность тех значений λ , при которых $V(\cdot, \lambda)$ имеет в $\mathcal{U}$ вырожденную критическую точку.

Дискриминантное множество $\mathcal{D}$ — совокупность значений λ , при которых $V(\cdot, \lambda)$ имеет в $\mathcal{U}$ критическую точку на нулевой линии уровня.

Множество Максвелла Δ — совокупность значений λ , при которых $V(\cdot, \lambda)$ принимает равные значения на паре различных критических точек.

При изучении критических точек и их локальных морсовизаций можно сократить на единицу количество параметров версальной деформации за счет рассмотрения лишь мономиальных образующих (в локальном кольце особенности) положительной степени (моном нулевой степени отбрасывается). Допустимость такой «экономии» связана, во-первых, с тем, что при дифференцировании постоянные слагаемые функции исчезают и поэтому они не играют никакой роли при определении критических точек и вычислении их кратности. Во-вторых, проистекающую при таком отбрасывании параметра потерю информации в вопросах, связанных с метаморфозами поверхностей уровней, можно компенсировать расширением группы диффеоморфных преобразований аргумента функций посредством добавления преобразований постоянного сдвига значений функций [14].

Сокращенная на один параметр миниверсальная деформация называется ограниченной миниверсальной деформацией. Число входящих в неё «управляющих» параметров совпадает с коразмерностью особенности.

При исследовании ключевых функций фредгольмовых функционалов важную роль играют условия локальной конечной определенности гладких функций в особых точках. Приведем наиболее часто употребляемое условие, найденное Дж. Мазером (см. [4], [14]).

Предварительно напомним, что гладкая функция V называется *сильно r -определенной в точке a* , если каждая функция U с тем же отрезком ряда Тейлора (порядка r) в точке a , который имеется у V , сильно локально гладко эквивалентна функции V , то есть найдется такое гладкое отображение $\varphi : (\mathbb{R}^n, a) \rightarrow (\mathbb{R}^n, a)$ с единичной матрицей Якоби в точке a , что в некоторой окрестности этой точки a выполнено равенство $V(\varphi(x)) = U(x)$.

Согласно Дж. Мазеру, функция V является сильно r -определенной в нуле, если выполняется следующее *условие Мазера*:

$$\mathfrak{M}^{r+1} \subset \mathfrak{M}^2 \cdot J(V). \quad (1.8)$$

Здесь $\mathfrak{M}^k$ — k -я степень максимального идеала $\mathfrak{M}$ в $\mathbb{R}[[x]]$, а $J(V)$ — якобиев идеал функции V в нуле. Это условие допускает естественное обобщение

$$\mathfrak{U} \subset \mathfrak{M}^2 \cdot J(W), \quad (1.9)$$

где $\mathfrak{U}$ — произвольный конечнодефектный идеал (в кольце ростков гладких функций). При условии (1.9) допускается «уничтожение» (диффеоморфной заменой координат) «хвоста» тейлоровского разложения, включенного в $\mathfrak{U}$.

В следующем параграфе мы рассмотрим несколько примеров особенностей и их возмущений.

1.3 Простейшие типы особенностей

Строение конечнократных одномерных особенностей полностью описывается следующим утверждением.

Теорема 1.4. *Функция V имеет в точке a μ -кратную одномерную особенность тогда и только тогда, когда после некоторой локальной диффеоморфной замены координат (в окрестности этой точки) функция приводится к виду*

$$\text{const} - x_1^2 - \cdots - x_r^2 + x_{r+1}^2 + \cdots + x_{n-1}^2 \pm x_n^{\mu+1}.$$

Доказательство. Из леммы о расщеплении особенности следует, что функция V гладкой локальной заменой координат приводится к виду

$$const - x_1^2 - \dots - x_r^2 + x_{r+1}^2 + \dots + x_{n-1}^2 + W(t),$$

где $W(0) = \partial W / \partial t(0) = \dots = \partial^\mu W / \partial t^\mu(0) = 0$, $\partial^{\mu+1} W / \partial t^{\mu+1}(0) \neq 0$ (эти соотношения вытекают из того, что размерность факторкольца $\mathbb{R}[[t]]/J(W)$ равна уменьшенному на единицу числу производных функции W , обращающихся в 0 при $t = 0$, считая саму функцию производной нулевого порядка).

Докажем теперь следующее утверждение.

Лемма 1.1. (Лемма Адамара) *Гладкая функция $f(t)$, обращающаяся в 0 при $t = 0$, допускает представление*

$$f(t) = t f_1(t),$$

где f_1 — некоторая гладкая функция, для которой $f_1(0) = f'(0)$.

Доказательство. Для t близких к 0

$$f(t) = f(t) - f(0) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial s} f(st) ds = t \int_0^1 f'(st) ds = t f_1(t),$$

где

$$f_1(t) = \int_0^1 f'(st) ds.$$

Равенство $f_1(0) = f'(0)$ очевидно; гладкость f_1 следует из теоремы о дифференцируемости интеграла по параметру. Лемма доказана.

Для доказательства теоремы применим $\mu + 1$ раз лемму Адамара к функции W : получим

$$W(t) = t^{\mu+1} W_{\mu+1}(t), \quad W_{\mu+1}(0) \neq 0.$$

Замена $x_n = t^{\mu+1} \sqrt{W_{\mu+1}(t)}$ или $x_n = t^{\mu+1} \sqrt{-W_{\mu+1}(t)}$ (если μ нечетно, а $W_{\mu+1}(0) < 0$), очевидно, является гладкой и приводит к нужному результату.

Известно [4], [72], что:

единственной двукратной особенностью (единственной особенностью коразмерности 1) является особенность функции

$$\text{const} - x_1^2 - \dots - x_r^2 + x_{r+1}^2 + \dots + x_{n-1}^2 + x_n^3$$

— *особенность складки*;

единственная особенность кратности 3 (коразмерности 2) — *особенность сборки*:

$$\text{const} - x_1^2 - \dots - x_r^2 + x_{r+1}^2 + \dots + x_{n-1}^2 \pm x_n^4;$$

особенности кратности 4 (коразмерности 3) встречаются трех типов — *ласточкин хвост*

$$\text{const} - x_1^2 - \dots - x_r^2 + x_{r+1}^2 + \dots + x_{n-1}^2 + x_n^5,$$

гиперболическая омбилика (эту особенность часто записывают в двух эквивалентных формах)

$$\text{const} - x_1^2 - \dots - x_r^2 + x_{r+1}^2 + \dots + x_{n-2}^2 + x_{n-1}^3 + x_n^3$$

или

$$\text{const} - x_1^2 - \dots - x_r^2 + x_{r+1}^2 + \dots + x_{n-2}^2 + x_{n-1}^3 + x_{n-1}x_n^2$$

и *эллиптическая омбилика*

$$\text{const} - x_1^2 - \dots - x_r^2 + x_{r+1}^2 + \dots + x_{n-2}^2 + x_{n-1}^3 - x_{n-1}x_n^2.$$

Появление особенностей более высокой кратности может быть связано не только с наличием большого числа параметров, но и с возникновением и нарушением симметрии функции при изменении параметров.

Одномерные особенности $x_n^{\mu+1}$ при $\mu \geq 5$ называются иногда высшими ласточкиными хвостами [4].

При $n = 2$ графики и линии уровней функций в окрестностях особых точек типа складки и сборки и их локальных морсовизаций выглядят следующим образом:

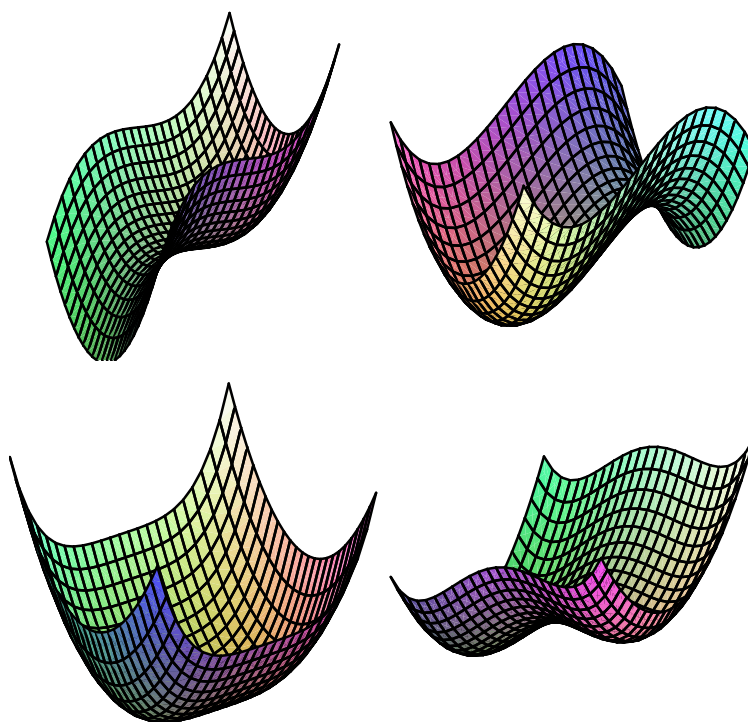


Рис. 1

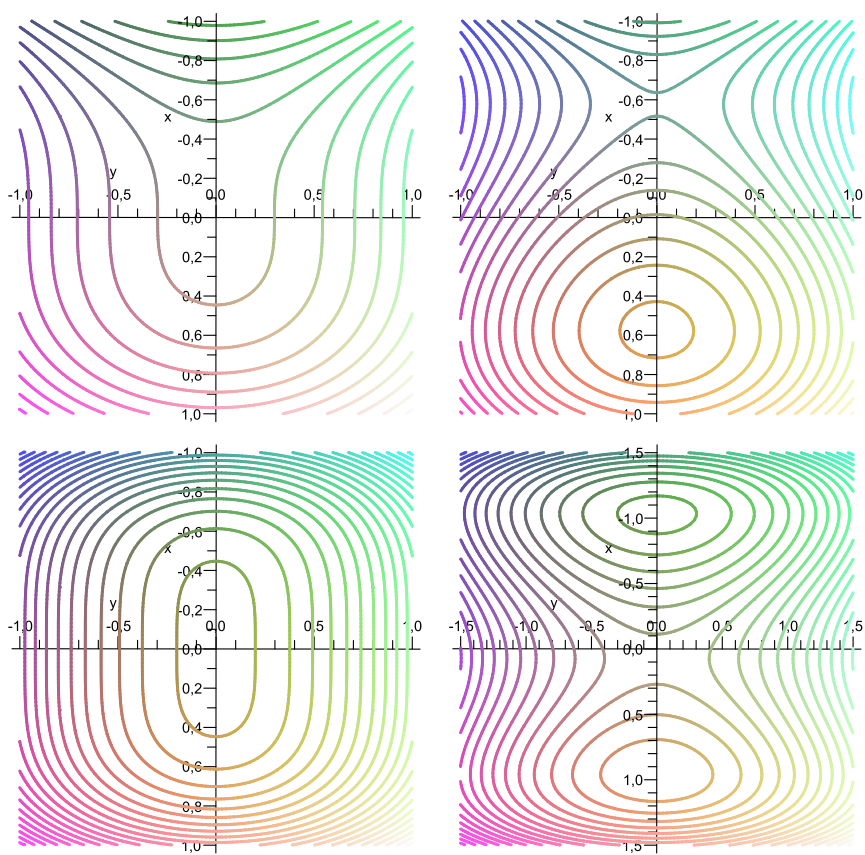


Рис. 2

Миниуниверсальными деформациями для рассмотренных нами особенностей являются, соответственно, следующие семейства:

$$\begin{aligned}
& V_1(x) + x_n^3 + \lambda_1 x + \lambda_0, \\
& V_1(x) + x_n^4 + \lambda_2 x_n^2 + \lambda_1 x_n + \lambda_0, \\
& V_1(x) + x_n^5 + \lambda_3 x_n^3 + \lambda_2 x_n^2 + \lambda_1 x_n + \lambda_0, \\
& V_2(x) + x_{n-1}^3 \pm x_{n-1} x_n^2 + \lambda_3 x_n^2 + \lambda_2 x_{n-1} + \lambda_1 x_n + \lambda_0,
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
V_1(x) &= \text{const} - x_1^2 - \dots - x_r^2 + x_{r+1}^2 + \dots + x_{n-1}^2, \\
V_2(x) &= \text{const} - x_1^2 - \dots - x_r^2 + x_{r+1}^2 + \dots + x_{n-2}^2.
\end{aligned} \tag{1.10}$$

Если убрать в каждой формуле константу λ_0 , то получим *ограниченные миниуниверсальные деформации*.

Названия некоторых особенностей (ласточкин хвост, вигвам, бабочка, кошелек и т.п.) связаны с геометрической структурой каустик и дискриминантных множеств, которые могут служить идентификаторами особенностей [4], [14], [72] (при их классификации).

При изучении прогибов упругих систем появляются ключевые функции следующего вида (после нормализации):

$$x^4 + 2a x^2 y^2 + y^4 + q_1 x^2 y + q_2 x y^2 + \delta_1 x^2 + \delta_2 y^2 + 2\delta_3 x y + \varepsilon_1 x + \varepsilon_2 y,$$

$q_i, \delta_j, \varepsilon_k$ — малые вещественные параметры, $a > -1$. Далее особенность $x^4 + 2a x^2 y^2 + y^4$ будем называть *двумерной сборкой*.

Ниже приведены некоторые из графиков и линий уровней возмущенной двумерной сборки.

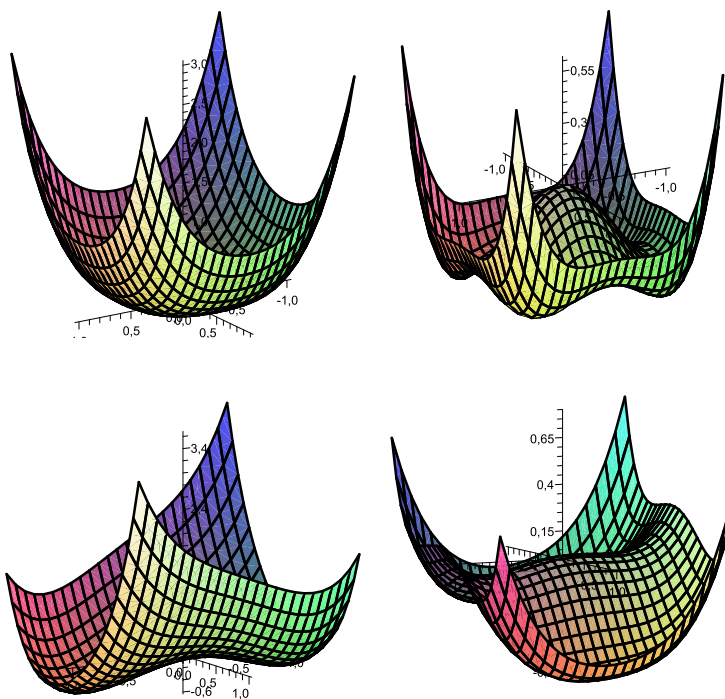


Рис. 3

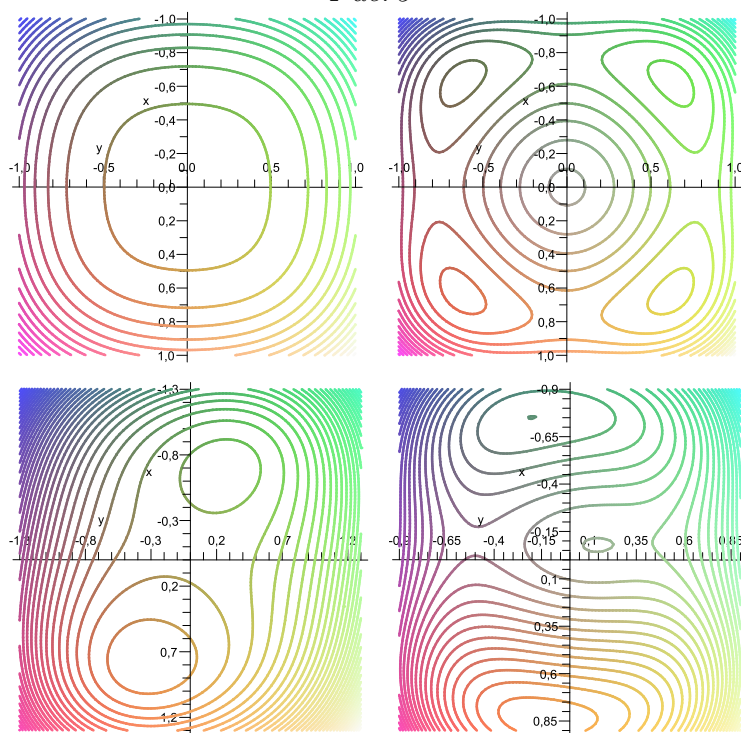


Рис. 4

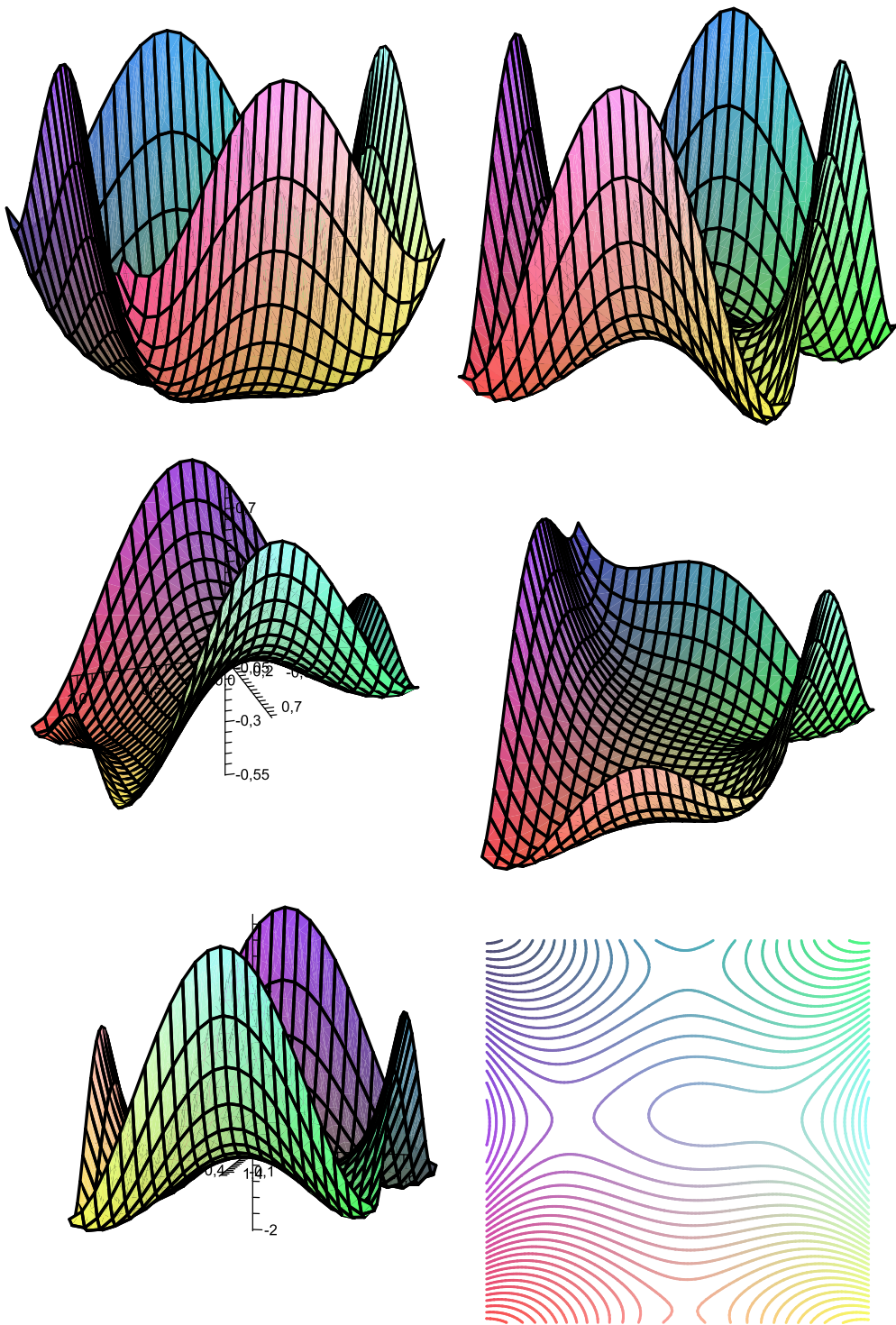


Рис. 5

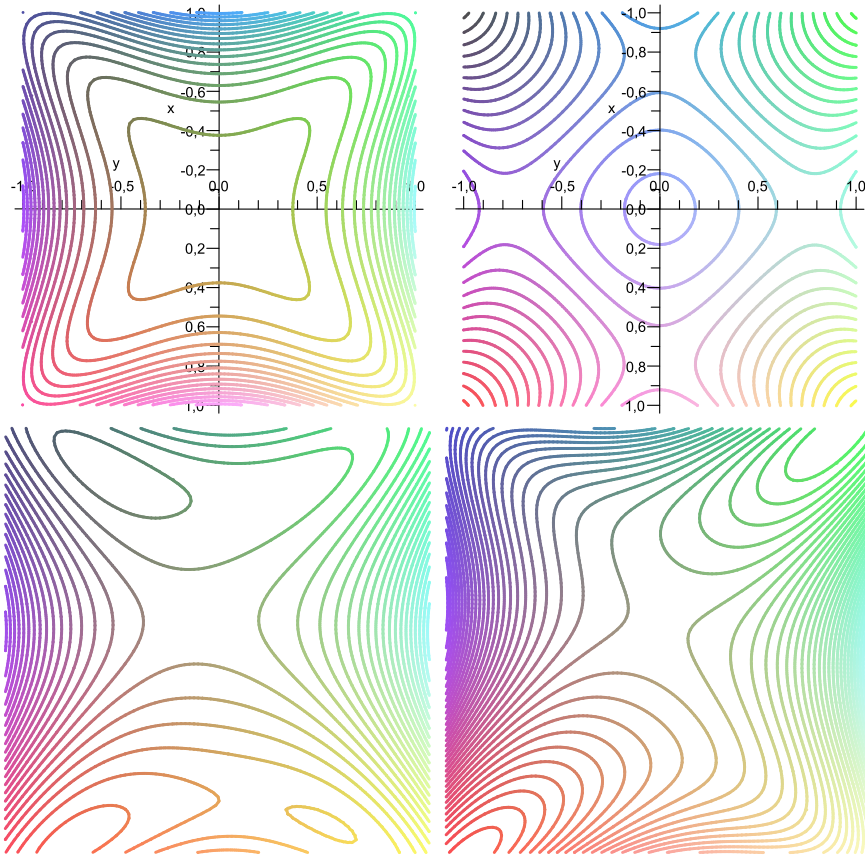


Рис. 6

Более подробные сведения о двумерных вырождениях будут приведены в последующих разделах.

1.4 Редуцирующая схема Пуанкаре

Схема Пуанкаре была создана для конечномерных вариационных задач с целью понижения их размерности [73].

Пусть задана гладкая экстремальная задача

$$V(x) \longrightarrow \inf, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (1.11)$$

для которой выполнено условие *коэрцитивности*

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = +\infty, \quad (1.12)$$

так что задача (1.11) разрешима. Если функция V является выпуклой

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(a)(h, h) > 0 \quad \forall (a, h) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \setminus 0), \quad (1.13)$$

то решение этой задачи, как легко видеть, является единственным. В противном случае задача становится многоэкстремальной. Приходится исследовать функцию в ситуации существования нескольких точек локальных минимумов, что существенно затрудняет анализ функции. В частности, значительно усложняется задача приближенного построения экстремалей. Наличие «управляющих» параметров, изменение которых приводит к бифуркационным явлениям, еще более усложняет задачу поиска и изучения экстремалей. А. Пуанкаре предложил процедуру, позволяющую во многих случаях облегчить изучение ветвления экстремалей за счет исключения «несущественных» переменных.

Пусть выполнено условие выпуклости V по части переменных:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(a)(h, h) > 0 \quad \forall (a, h) \in \mathbb{R}^n \times (L \setminus 0), \quad (1.14)$$

где L — подпространство в $\mathbb{R}^n$ размерности l . Тогда вместо (1.11) можно рассмотреть аналогичную задачу с меньшим числом переменных

$$W(\xi) \longrightarrow \inf, \quad \xi \in M, \quad (1.15)$$

где M — ортогональное дополнение к L в $\mathbb{R}^n$, а W — функция, определенная соотношением

$$W(\xi) = \inf_{h \in L} V(\xi + h). \quad (1.16)$$

Теорема 1.5. *Если выполнены условия (1.12) и (1.14), то функция (1.16) является гладкой.*

Доказательство. Из коэрцитивности функции V следует существование в слое $\xi + L$ ($\forall \xi \in M$) точки глобального условного минимума $\xi + h(\xi)$, где $h(\xi)$ определяется из системы уравнений

$$\frac{\partial V}{\partial h_j}(\xi + h) = 0, \quad j = 1, \dots, l \quad (1.17)$$

($h_1, \dots, h_l$ — координаты вектора h относительно произвольно фиксированного базиса в L). Условие (1.14) гарантирует единственность решения при любом ξ и его гладкую зависимость от ξ (по теореме о неявной функции: якобиан левой части (1.17) по переменным $h_1, \dots, h_l$ невырожден вследствие (1.14)). Следовательно, функция $W(\xi) = V(\xi + h(\xi))$ является гладкой.

Замечание 1.3. Строго говоря, А. Пуанкаре определял функцию W не формулой (1.16), а системой уравнений (1.17). Функция W при этом определялась лишь локально (условия (1.12) не было) и предназначалась для (локального) исследования бифуркации экстремалей [1], [73]. Смысл перехода от (1.11) к (1.15) состоял в замене «многомерной» задачи на «маломерную», как более доступную.

Функция (1.16), полученная при условиях (1.12) и (1.14), называется *ключевой*. Координаты ξ_j , $j = 1, \dots, m = n - l$, вектора $\xi \in M$ относительно произвольного фиксированного базиса $\{f_1, \dots, f_m\}$ в M также называются *ключевыми*. Отображение $\varphi : \xi \longrightarrow \xi + h(\xi)$, где $h(\xi)$ определено системой уравнений (1.17), называется *редуцирующим* или *маргинальным*⁴.

Теорема 1.6. *Маргинальное отображение задает взаимно однозначное соответствие между множествами критических точек функции V и ее ключевой функции W . При этом соответствии невырожденные критические точки переходят в невырожденные и только невырожденные критические точки (с сохранением значений индексов Морса). А соответствующие друг другу вырожденные критические точки имеют изоморфные локальные кольца особенностей.*

Доказательство становится очевидным после применения обобщенной леммы Морса (леммы о расщеплении особенности). В следующей главе будет приведено доказательство этой теоремы для более общего случая.

Определение 1.2. *Переход от задачи (1.11) к задаче (1.15), где W — ключевая функция функции V , называется редукцией по схеме Пуанкаре или, более кратко, редукцией Пуанкаре.*

Замечание 1.4. *В формулировках теорем 1.5. и 1.6. условие (1.12), очевидно, можно ослабить, заменив его условием коэрцитивности по компоненте $h \in L$.*

⁴ Термин «маргинальное отображение» заимствован из теории приближений функций, в которой он используется в аналогичном контексте (см., например, [67]).

1.5 Обобщенная схема Пуанкаре

Описанная схема допускает естественное обобщение, основанное на замене линейного расслоения $p : \mathbb{R}^n \longrightarrow M$ гладкой субмерсией.

Пусть V — гладкая функция на $\mathbb{R}^n$ и пусть задано гладкое отображение $p : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ с условием $rk \frac{\partial p}{\partial x}(a) = m \ \forall a \in \mathbb{R}^n$. Пусть область $\mathcal{O}$ является образом субмерсии p в $\mathbb{R}^m$ ($\mathcal{O}$ — открытое связное подмножество в $\mathbb{R}^m$). Предположим, что выполняются следующие два условия:

(А) для каждой точки $\xi \in \mathcal{O}$ подмногообразие $p^{-1}(\xi)$ в $\mathbb{R}^n$ является *геодезически выпуклым*, то есть для любой пары точек $a, b \in p^{-1}(\xi)$ существует единственная геодезическая кривая на $p^{-1}(\xi)$ (в индуцированной из $\mathbb{R}^n$ метрике), соединяющая эти точки;

(В) для любой точки $\xi \in \mathcal{O}$ функция $V|_{p^{-1}(\xi)}$ является *геодезически строго выпуклой*: для любой геодезической кривой $x = x(t)$, $t \in (\alpha, \beta)$, на $p^{-1}(\xi)$ функция $w(t) = V(x(t))$ является строго выпуклой, то есть $\ddot{w}(t) > 0 \ \forall t \in (\alpha, \beta)$.

Рассмотрим функцию W , определенную формулой

$$W(\xi) = \inf_{x \in p^{-1}(\xi)} V(x). \quad (1.18)$$

Теорема 1.7. *При выполнении для гладкой коэрцитивной функции V условий (А) и (В) функция W , определенная соотношением (1.18), является гладкой.*

Доказательство. Из коэрцитивности V и выпуклости $V|_{p^{-1}(\xi)}$ следует существование $\forall \xi$ точки $\varphi(\xi) \in p^{-1}(\xi)$, для которой $W(\xi) = V(\varphi(\xi))$. Если $x = x(t)$ — геодезическая на $V|_{p^{-1}(\xi)}$, выходящая из точки $\varphi(\xi)$ с произвольно заданной скоростью $h \neq 0$, то для соответствующего приращению h значения второго дифференциала сужения $V|_{p^{-1}(\xi)}$, вычисленного в точке $\varphi(\xi)$, имеем

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (V|_{p^{-1}(\xi)}) (\varphi(\xi))(h, h) = \frac{d^2}{dt^2} V(x(t))|_{t=0} > 0$$

(см. условие (В)). Из этого соотношения вытекает невырожденность гессиана $V|_{p^{-1}(\xi)}$ в точке $\varphi(\xi)$. В силу теоремы о неявной функции, маргинальное отображение $\xi \mapsto \varphi(\xi)$ и функция $W = V \cdot \varphi$ являются гладкими.

Функция (1.18), определенная при условиях (А) и (В), также называется *ключевой*, а субмерсия $p : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{O}$ — *редуцирующим* отображением.

Теорема 1.8. *В условиях теоремы 1.7. маргинальное отображение устанавливает взаимно однозначное соответствие между множеством критических точек функции V и множеством критических точек ключевой функции. При этом соответствующие друг другу критические точки имеют изоморфные локальные кольца особенностей и, в случае невырожденности критических точек, равные индексы Морса.*

Доказательство (его решающий шаг) состоит в непосредственном применении леммы о расщеплении особенности.

Описанная схема естественно распространяется на гладкие функции, заданные на полном римановом многообразии $\mathcal{M}$. Условие коэрцитивности V формулируется при этом следующим образом: если $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ — не предкомпактная последовательность точек $\mathcal{M}$, то $\sup_k \{V(a_k)\} = \infty$.

Разумеется, существуют и другие варианты обобщения. Например, можно рассмотреть функцию V на римановом многообразии $\mathcal{M}$ с гладкой субмерсией $p : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ ($\mathcal{N}$ — гладкое многообразие) при условии существования такого значения c для V , что (А) множество $p^{-1}(\xi) \cap \{V \leq c\}$ ⁵ компактно и геодезически выпукло $\forall \xi \in \mathcal{N}$, (В) для каждого $\xi \in \mathcal{N}$ функция $V|_{p^{-1}(\xi) \cap \{V \leq c\}}$ геодезически строго выпукла.

Если не задаваться целью указывать конкретные условия, гарантирующие однозначность маргинального отображения, то можно сформулировать общий принцип редукции (подобный теореме о редукции Морса – Ботта в [71]).

Теорема 1.9. *Пусть на гладком не имеющем края многообразии $\mathcal{M}$ задана гладкая функция V , для которой 1) существует такое регулярное значение c , что многообразие $\{V \leq c\}$ компактно; 2) существует гладкая субмерсия $p : \{V \leq c\} \longrightarrow \mathcal{N}$, где $\mathcal{N}$ — гладкое многообразие (вообще говоря, с краем), для которой $p^{-1}(\xi)$ имеет непустое пересечение с внутренностью множества $\{V \leq c\}$ $\forall \xi \in \mathcal{N} \setminus \partial \mathcal{N}$, это пересечение содержит единственную (в нём) критическую точку $\varphi(\xi)$*

⁵ $\{V \leq c\}$ — краткое обозначение лебегова множества $\{x \in \mathcal{M} : V(x) \leq c\}$.

для $V|_{p^{-1}(\xi)}$ и $\varphi(\xi)$ является морсовской точкой минимума для $V|_{p^{-1}(\xi)}$; 3) если $\partial\mathcal{N} \neq \emptyset$, то $p^{-1}(\partial\mathcal{N}) \subset \{V = c\}$, и любая точка $a \in p^{-1}(\partial\mathcal{N})$ является морсовской критической точкой для $V|_{\tilde{p}^{-1}(\xi)}$, $\xi = p(a)$, где $\tilde{p}$ — любое гладкое продолжение отображения p на любую окрестность $\mathcal{O}$ точки a в $\mathcal{M}$ с множества $\mathcal{O} \cap \{V \leq c\}$.

Тогда 1) функция $W(\xi) := \inf_{x \in p^{-1}(\xi) \cap \{V \leq c\}} V(x)$ является гладкой; 2) отображение $\xi \mapsto \varphi(\xi)$ является гладким и устанавливает взаимно однозначное соответствие между множеством критических точек V в $\{V \leq c\}$ и множеством критических точек W в $\mathcal{N} \setminus \partial\mathcal{N}$; 3) в соответствующих друг другу критических точках локальные кольца особенностей функций V и W изоморфны; 4) индексы Морса соответствующих друг другу невырожденных критических точек совпадают; 5) отображения $p : \{V \leq c\} \rightarrow \mathcal{N}$ и $\varphi : \mathcal{N} \rightarrow \{V \leq c\}$ гомотопически обратны друг другу (их композиции гомотопны единицам: $\varphi \cdot p \sim I$, $p \cdot \varphi \sim I$).

Доказательство. Из условий 1), 2) следует, что $\varphi(\xi)$ — точка минимума для $V|_{p^{-1}(\xi)}$ $\forall \xi \in \mathcal{N} \setminus \partial\mathcal{N}$ и отображение φ вместе с функцией $W = V \cdot \varphi$ являются гладкими.

Доказательства утверждений 3), 4) являются повторениями доказательств аналогичных утверждений теоремы 1.6. (после выбора подходящих локальных координат в окрестностях рассматриваемых точек).

Так как $p(\varphi(\xi)) \equiv \xi$, то проверка утверждения 5) сводится к проверке гомотопности единице отображения $\varphi \cdot p$. Данная гомотопия осуществляется стягиванием в точки $\varphi(\xi)$ по линиям кратчайшего спуска — вдоль интегральных кривых векторного поля $-\text{grad}(V|_{p^{-1}(\xi)})$ (градиент определяется по какой-либо фиксированной римановой метрике на $\{V \leq c\}$).

Замечание 1.5. В определении редукции можно снять требование того, чтобы $\varphi(\xi)$ в слое $p^{-1}(\xi)$ была точкой минимума, оставив лишь требование ее невырожденности. В этом случае теорему 1.3 (лемму о расщеплении особенности) можно воспринимать как обоснование возможности локальной редукции произвольной функции. Если

$$V(y_1, \dots, y_n) = -x_1^2 - \dots - x_r^2 + x_{r+1}^2 + \dots + x_p^2 + W(u_1, \dots, u_{n-p}),$$

где $(x, u) = \varphi(y)$, φ — локальный диффеоморфизм, то отображение $y \mapsto (u_1(y), \dots, u_{n-p}(y))$ является редуктирующей субмерсией.

Редукция, для которой значение ключевой функции получается минимизацией исходной функции (в соответствующих слоях), называется *эллиптической*. В дальнейшем мы будем считать все рассматриваемые редукции эллиптическими. В приложениях встречается почти исключительно эллиптический случай, и он дает естественное условие для развития теории нелокальных редукций.

1.6 Примеры

1.6.1 Функция высоты на двумерном торе

Пусть двумерный тор T^2 «вертикально стоит» в $\mathbb{R}^3$ на плоскости переменных $\{x, y\}$ так, что его параллели⁶ параллельны плоскости переменных $\{y, z\}$. Пусть V — функция высоты: $V(x, y, z) = z \ \forall (x, y, z) \in T^2$. Если $c_1 = 0 < c_2 < c_3 < c_4$ — критические значения V на T^2 , то для любого $c \in (0, \frac{c_2}{2})$ множество $\{V \leq c\}$ можно рассматривать как график некоторой гладкой функции $z = \psi(x, y)$ на области $\mathcal{D}$, являющейся образом ортогональной проекции множества $\{V \leq c\}$ на плоскость переменных $\{x, y\}$. Функция V на $\{V \leq c\}$ допускает редукцию к функции одной переменной

$$W(\xi) := \inf_{y: (\xi, y) \in \mathcal{D}} \psi(\xi, y) = \psi(\xi, 0), \quad |\xi| \leq d,$$

$$d = \max\{y : \psi(x, y) = c\}.$$

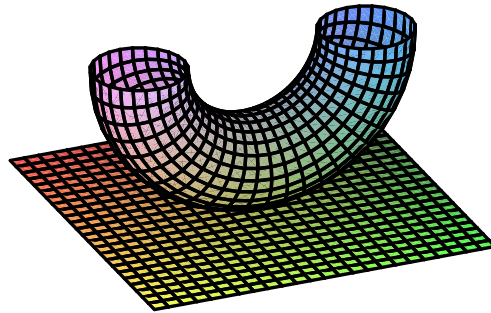


Рис. 7

⁶ На торе, по аналогии с глобусом, определяются *параллели* — окружности, лежащие в параллельных плоскостях, и *меридианы*, имеющие одинаковую длину.

Редуцирующая субмерсия и маргинальное отображение здесь, соответственно, заданы действиями $(x, y, z) \mapsto x$ и $\xi \mapsto (\xi, 0, \psi(\xi, 0))$.

В этом же примере можно осуществить другую редукцию. Введём на T^2 угловые координаты (α, β) , где α — угол вдоль меридиана, отсчитываемый от самой «большой» параллели до заданной точки τ , а β — угол вдоль параллели, отсчитываемый от самого низкого меридиана. Положим $\tilde{p}(\tau) = \alpha$. Субмерсия $\tilde{p}$ осуществляет редукцию V на области $\mathcal{M} = \{\tau \in T^2 : |\beta| < \pi\}$ к функции высоты W на окружности $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, канонически отождествленной с нижней параллелью. Маргинальное отображение $\varphi : S^1 \rightarrow \mathcal{M}$ является отображением естественного вложения меридиана в тор. Вторая редукция является в некотором смысле более удачной, так как она осуществлена на более широкой области и охватывает две критические точки, расположенные на многообразиях уровней $\{V = c_1\}$ и $\{V = c_2\}$.

1.6.2 Преобразование Лежандра

Среди аналитических конструкций, укладывающихся в схему Пуанкаре, по степени известности выделяется преобразование Лежандра [3]. В классической механике оно осуществляет связь между лагранжевым и гамильтоновым формализмами: если $L(\dot{q}, q, t)$ — лагранжиан какой либо механической системы, то её гамильтониан $H(p, q, t)$ получается из L преобразованием Лежандра:

$$\begin{aligned} H(p, q, t) &= \sup_{\dot{q}} ((\dot{q}, p) - L(\dot{q}, q, t)) = \\ &= -\inf_{\dot{q}} (L(\dot{q}, q, t) - (\dot{q}, p)), \quad \dot{q}, p, q \in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \tag{1.19}$$

С точки зрения редукции Пуанкаре соотношение (1.19) исключает переменную $\dot{q}$ в функции

$$V(\dot{q}, p, q, t) := L(\dot{q}, q, t) - (\dot{q}, p).$$

Лагранжиан получается из гамильтониана повторным применением преобразования Лежандра.

Во многих учебниках по аналитической механике приводится лишь условие локальной редуцируемости, заключенное в требовании выпуклости лагранжиана по переменной $\dot{q}$. Коэрцитивность же V по переменной $\dot{q}$

в реальных механических системах автоматически обеспечивается квадратичной зависимостью кинетической энергии от вектора скорости. После перехода к обобщенным координатам коэрцитивность V по вектору скорости сохраняется.

Общая механическая система, в которой соответствующее маргинальное отображение $\varphi : (p, q, t) \mapsto (\dot{q}, p, q, t)$ глобально определяется соотношением (1.19), называется системой, удовлетворяющей условию двойственности Лагранжа – Гамильтона [23].

1.6.3 Посткритические равновесия упругой цепи

Пусть дана система одинаковых твердых прямолинейных стержней длины единица, последовательно соединенных одинаковыми упругими шарнирами в прямолинейную $(n + 1)$ –звенную упругую цепь (рис. 8). Предположим, что первое и последнее звенья закреплены так, что они остаются в вертикальном положении при всех деформациях цепи. Пусть φ_j — угол между j -м звеном и вертикалью, $j = 1, \dots, n+1$, образованный в результате деформации цепи под воздействием продольно сжимающей нагрузки. Если принять соглашение о том, что упругие шарниры «работают» по закону Гука (момент силы упругой реакции пропорционален углу между звеньями), то равновесная конфигурация цепи определится системой уравнений

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{j+1} - 2\varphi_j + \varphi_{j-1} + \lambda \sin \varphi_j &= 0, & j &= 2, \dots, n, \\ \varphi_1 &= \varphi_{n+1} = 0. \end{aligned} \right\}$$

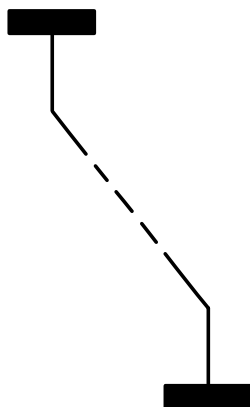


Рис. 8

Параметр λ в этих уравнениях пропорционален величине сжимающей силы. Масштаб длины предполагается выбранным так, что соответствующее произведение входящих в уравнение упруго-механических и геометрических констант равно единице.

Система уравнений (1.20) потенциальна: её левая часть состоит из компонент градиента функции полной энергии

$$\begin{aligned} V(\varphi, \lambda) &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{(\varphi_{j+1} - \varphi_j)^2}{2} + \lambda(\cos \varphi_j - 1) \right) = \\ &= \frac{1}{2}(A\varphi, \varphi) + \lambda \sum_{j=2}^n (\cos \varphi_j - 1) \end{aligned} \quad (1.20)$$

(с учетом соотношений $\varphi_1 = \varphi_{n+1} = 0$), где $\varphi = (\varphi_2, \dots, \varphi_n)^\top$ и

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & & \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Функция (1.20) отличается лишь постоянным множителем от разностной аппроксимации функционала полной энергии продольно сжатого упругого эйлера стержня с жестко заделанными концами [70]. Связь с эйлеровым стержнем проявляется и в спектральных характеристиках матрицы A . Действительно, собственными значениями A являются числа

$$\lambda_k = 2 \left(1 - \cos \left(\frac{\pi k}{n} \right) \right), \quad k = 1, \dots, n-1,$$

которым отвечают собственные векторы

$$g_k = (\alpha_1^k, \dots, \alpha_{n-1}^k)^\top, \quad \alpha_j^k = \sin \left(\frac{\pi k j}{n} \right).$$

Нетрудно заметить, что $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \lambda_k = (\pi k)^2$, то есть $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \lambda_k$ стремится к k -му собственному значению оператора $-\frac{d^2}{ds^2}$ на отрезке $[0, 1]$ (при краевых условиях $x(0) = x(1) = 0$). Этому собственному значению отвечает

собственная функция $x_k(s) = \sin(\pi ks)$. Её значения в узлах $s = \frac{j}{n}$ и являются координатами собственного вектора g_k матрицы A . Если $\lambda < \lambda_1$, то

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}(\varphi, \lambda)(h, h) = (Ah, h) - \lambda \sum_{j=2}^n (\cos \varphi_j) h_{j-1}^2 \geq (\lambda_1 - \lambda) |h|^2.$$

Таким образом, при $\lambda < \lambda_1$ функция V выпукла по φ . Коэрцитивность V очевидна.

Следовательно, при $\lambda < \lambda_1$ точка $\varphi = 0$ является единственной критической точкой V , и она же является точкой глобального минимума V .

Если задано ограничение $\lambda < \lambda_{m+1}$, то можно гарантировать лишь неравенство

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}(\varphi, \lambda)(h, h) > 0 \quad \forall h \in L_m^\perp \setminus 0, \text{ где } L_m = \text{span}(g_1, \dots, g_m).$$

Положим $e_k = \frac{g_k}{|g_k|}$. В соответствии с редуцирующей схемой Пуанкаре, можно перейти к ключевой функции

$$W(\xi, \lambda) := \inf_{h: h \in L_m^\perp} V \left(\sum_{j=1}^m \xi_j e_j + h, \lambda \right), \quad \xi \in \mathbb{R}^m,$$

«отвечающей» за поведение V .

Приближенное вычисление W и дальнейший её анализ требуют привлечения компьютера. Если же ограничиться локальной задачей анализа ветвления экстремалей в окрестности нуля, то с помощью специальных асимптотических методов можно достигнуть достаточно полного результата «вручную». Например, при $m = 1$ можно воспользоваться представлением

$$W(\xi, \lambda) = V(\xi e_1, \lambda) + o(\xi^5) + O(\lambda - \lambda_1)O(\xi^4),$$

легко проверяемым, если учесть четность $V(\cdot, \lambda)$ и представимость маргинального отображения в виде $\varphi(\xi, \lambda) = \xi e_1 + o(\xi^2)$.

Следовательно,

$$W(\xi, \lambda) = \frac{\delta}{2} \xi^2 + \frac{a^2}{24} \lambda_1 \xi^4 + o(\xi^5) + O(\delta)O(\xi^4), \quad (1.21)$$

где $\delta := \lambda - \lambda_1$, $a^2 = \gamma_2^4 + \dots + \gamma_n^4$, γ_j — j -я компонента вектора e_1 .

Замечание 1.6. Изучение характера ветвления экстремалей и вычисление первых асимптотик ветвей бифурцирующих экстремалей по закритическому приращению $\delta = \lambda - \lambda_1$ можно осуществить, применив к функции (1.21) масштабирующее преобразование (преобразование Вейерштрасса, σ -процесс) $\xi = \delta^{\frac{1}{2}}\eta$ с последующим отбрасыванием множителя δ , выделением главной части получаемой функции и применением теоремы о неявной функции.

Из теории нормальных форм особенностей гладких функций и их версальных деформаций [4], [72] следует — в случае представимости в форме (1.21) — приводимость функции W к виду $\frac{\delta}{2}\xi^2 + \frac{a^2}{24}\lambda_1\xi^4$ посредством некоторой замены $\xi \mapsto \xi + o(\xi^2)$ (при достаточно малых δ).

Таким образом, поведение функции $V(\cdot, \lambda)$ в окрестности нуля при малых δ полностью определяется главной частью ее ключевой функции (от одной ключевой переменной).

1.7 Бифуркации экстремалей из точек минимума с особенностью многомерной сборки

1.7.1 Особенности многомерной сборки

Говорят, что гладкая функция W на гладком конечномерном многообразии M имеет в критической точке $a \in M$ особенность m -мерной сборки [75], [79], если в некоторой локальной системе координат с центром в точке a функция W допускает представление в виде

$$\sum_{i,j,k,l} \alpha_{ijkl} x_i x_j x_k x_l + o(\|x\|^4) + \sum_r \sigma_r y_r^2, \quad (1.22)$$

$$x = (x_1, \dots, x_m), \quad y = (y_1, \dots, y_{n-m}), \quad |\sigma_r| = 1,$$

с условием, что начало координат в $\mathbb{C}^m$ является изолированной стационарной точкой для комплексного продолжения квартичной части $W^{(4)}$ этой функции. На квартичную часть обычно накладывается условие «выживаемости» (условие Ландау – Хиггса), состоящее в требовании строгой минимальности нулевого значения полинома $W^{(4)}$. Если $M = \mathbb{R}^n$, $a = 0$, и функция W четная, то полином $W^{(4)}$ является дифференциалом Пор-

теуса функции W (при критических значениях параметров):

$$W^{(4)}(\xi) = \lim_{t \rightarrow 0} t^{-4} W\left(t \sum_{j=1}^m \xi_j e_j\right),$$

$e_1, \dots, e_m$ — базис ядра второго дифференциала W . Особенности такого типа встречаются в задачах описания устойчивых состояний упругих материалов [21] и стабильных фаз сегнетоэлектрических кристаллов [43].

Далее будем предполагать, что $M = \mathbb{R}^n$ и $a = 0$.

Если квартичная форма $W^{(4)}$ находится в общем положении, то число бифурцирующих из нуля стационарных точек функции W нечетно и не превосходит 3^m (этому числу равна кратность нулевой стационарной точки квартичной формы общего положения). Из положительной определенности $W^{(4)}$ следует, что при возмущениях W вблизи нуля появляется не более одной точки локального максимума [26] (см. ниже теорему 1.13.).

Одной из важнейшей характеристик морсовской стационарной точки в теории гладких функций на гладких многообразиях является ее топологический индекс I , определяемый как знак гессиана h (произведение знаков всех собственных значений матрицы Гессе H — матрицы из вторых частных производных). Важность понятия топологического индекса в прикладных задачах объясняется наличием соотношения:

$$\sum_j I_j = \deg(\text{grad } W) \quad (1.23)$$

(сумма берется по всем бифурцирующим из нуля особым точкам). Символом $\deg(\text{grad } W)$ обозначается степень отображения ⁷ на окрестности нуля, содержащей все ответвленные от нуля критические точки.

Из теории Морса [71] известно, что каждую гладкую функцию W на конечномерном многообразии M , имеющую лишь морсовские критические точки, можно изобразить клеточным комплексом, каждая клетка которого взаимно однозначно соответствует критической точке функции W . Размерность клетки равна индексу Морса соответствующей критической точки, а примыкания клеток в комплексе соответствуют взаимным примыканиям критических точек (как особых точек динамической системы $\dot{\xi} = -\text{grad } W(\xi)$). Причем гомотопический тип изображающего

⁷ Элементы теории топологической степени отображения изложены ниже — в разделе 1.13.

комплекса совпадает с гомотопическим типом многообразия M . Из этого факта вытекает, в частности, что наборы стационарных точек функций на плоскости и в трехмерном пространстве можно изображать графами (одномерными остовами клеточных комплексов). Если функция W , заданная на $\mathbb{R}^n$, коэрцитивна, то изображающий ее комплекс гомотопически тривиален (гомотопен точке). Следовательно, в случае коэрцитивной функции изображающий граф связан.

Пусть $m = 3$. Обозначив через l_0 , l_1 и l_2 количества минимумов, седел индекса (Морса) 1 и седел индекса 2, получим, в силу (1.23), следующие соотношения:

$$l_0 - l_1 + l_2 = 2, \quad (1.24)$$

если существует точка максимума,

$$l_0 - l_1 + l_2 = 1 \quad (1.25)$$

— в случае отсутствия точки максимума (см. ниже теорему 1.13.).

Изображающий клеточный комплекс состоит из l_0 вершин, l_1 ребер и l_2 двумерных клеток. Он полностью определяется своим одномерным остовом (изображающим графом). Вершины графа взаимно однозначно соответствуют точкам минимумов, а ребра — седлам индекса 1. При этом две вершины соединяются ребром, если существует кривая, соединяющая соответствующую им пару точек минимумов, составленная из пары линий кратчайшего спуска (интегральных кривых поля градиентов), связывающих пары «седло — минимум» (малым шевелением функции или метрики можно добиться того, чтобы любая интегральная кривая, вытекающая из седла, втекала в точку локального минимума). За счет изменения метрики в областях вида $\{c_1 < W < c_2\}$, не содержащих критических точек, можно переносить финальные точки сепаратрис из одних локальных минимумов на другие (то есть сепаратрисы будут втекать в другие точки локальных минимумов). За счет таких переключений можно получать разнообразные соединения ребрами вершин в пределах одного расклада стационарных точек. Переключениям сепаратрис соответствуют гомологические преобразования графа.

Определение 1.3. Пусть граф $\hat{\Gamma}$ получен из графа Γ через последовательность следующих трех операций: 1) удаление любого ребра,

соединяющего пару внутренних (некраевых) вершин A, B , 2) склеивание оставшихся (после удаления ребра) частей графа по вершинам A, B (за точкой стыка сохраним обозначение A) и 3) приклеивание к точке стыка A нового «висячего» ребра (вторая вершина приклеенного ребра – краевая точка).

Тогда будем говорить, что граф $\hat{\Gamma}$ получен из графа Γ прямым гомологическим преобразованием, а граф Γ получен из $\hat{\Gamma}$ обратным гомологическим преобразованием.

Определение 1.4. Если граф $\tilde{\Gamma}$ получен из графа Γ через конечную последовательность прямых и обратных гомологических преобразований, то графы Γ и $\tilde{\Gamma}$ называются гомологичными.

Очевидно, что гомологические преобразования сохраняют количества вершин и ребер графа.

1.7.2 Редукции деформаций сборок

Помимо соотношений (1.24), (1.25), при описании раскладов стационарных точек бывают весьма полезными редукции к функции меньшего количества переменных (в случаях, например, четности по одной из переменных) или к функциям на сфере.

Ограничимся рассмотрением 3-мерных сборок.

Редукция на сферу представляет собой введение сферических координат $\xi = r \cdot s$, $r \geq 0$, $\|s\| = 1$ и представление W в форме

$$W_s(r) = \gamma_0(s)r^4 + \gamma_1(s)r^3 + \gamma_2(s)r^2 + \gamma_3(s)r + const, \quad (1.26)$$

в которой $\gamma_0(s) > 0 \quad \forall s$. Такая функция имеет не более одной точки локального максимума по радиальной переменной и, следовательно, по всему пространству (так как любая точка локального максимума обязана быть точкой локального максимума и по радиальной переменной). Представлением (1.26) особенно удобно пользоваться в случае четности W .

Если W четно зависит от третьей переменной, то

$$W = \xi_3^4 + W_2(\xi_1, \xi_2)\xi_3^2 + W_0(\xi_1, \xi_2).$$

Пусть второй коэффициент последнего разложения положителен:

$$\inf W_2 > 0. \quad (1.27)$$

Тогда исследование критических точек W сводится к исследованию критических точек функции

$$W_0(\xi_1, \xi_2) = \inf_{\xi_3} W(\xi_1, \xi_2, \xi_3). \quad (1.28)$$

После локальной нормализующей замены переменных (см. в [4] нормальную форму особенности X_9) получим функцию W_0 в виде

$$\xi_1^4 + \xi_2^4 + a\xi_1^2\xi_2^2 + \sum_{i,j \leq 2} \lambda_{ij}\xi_1^i\xi_2^j, \quad a > -2, \quad a \neq 2$$

(нормальная форма возмущенной двумерной сборки).

Гладкое параметрическое возмущение R_δ , $R_0 = 0$, гладкой функции W будем называть регулярным, если возмущенная функция $W + R_\delta$ имеет в наблюдаемой области изменения переменных лишь морсовские критические точки.

Теорема 1.10. *При регулярных возмущениях гладкой функции вблизи точки минимума с особенностью двумерной сборки появляется те и только те bif -расклады критических точек, которые приведены в следующем списке:*

$$\{2, 1, 0\}, \{3, 2, 0\}, \{4, 3, 0\}, \{5, 4, 0\}, \{1, 1, 1\}, \{2, 2, 1\}, \{3, 3, 1\}, \{4, 4, 1\}.$$

Этим раскладам соответствуют следующие изображающие графы, собранные в классы гомологичных (стрелками указаны переходы, соответствующие гомологическим преобразованиям):

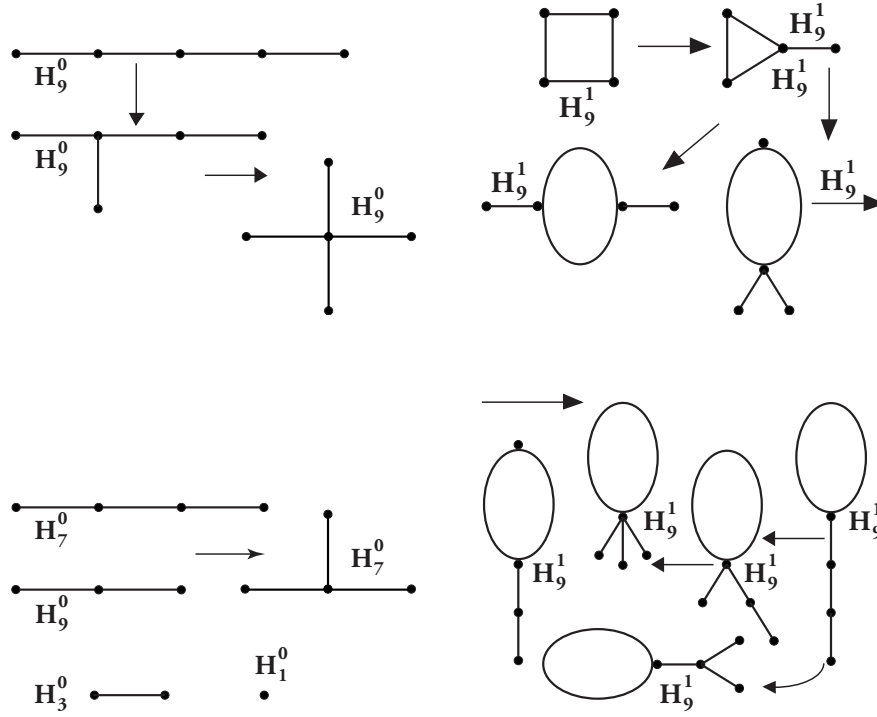


Рис. 9

В этих раскладах заметно влияние примыкающей к двумерной сборке одномерной *min*-особенности A_7 [4], которую можно получить в нуле с парой ненулевых морсовских стационарных точек на оси $0\xi_2$ или без неё, рассмотрев следующую деформацию двумерной сборки:

$$(\xi_1^2 + \varepsilon\xi_2)^2 + \xi_2^4 + a(\xi_1^2 + \varepsilon\xi_2)\xi_2^2 = \xi_1^4 + \xi_2^4 + a\xi_1^2\xi_2^2 + 2\varepsilon\xi_1^2\xi_2 + a\varepsilon\xi_2^3 + \varepsilon^2\xi_2^2. \quad (1.29)$$

Наличие или отсутствие пары дополнительных стационарных точек зависит от выбора значения параметра a . При одних значениях получается пара «седло – минимум», а при других — «седло – максимум». Посредством деформации (1.29) легко установить существование всех указанных в теореме раскладов. Отсутствие других раскладов вытекает из того, что сумма $l_0 + l_1 + l_2$ нечетна и ограничена числом 9, а также из того, что выполняется соотношение $l_0 - l_1 + l_2 = 1$. Эти соотношения вытекают из равенства кратности особенности двумерной сборки девяти и равенства единице топологического индекса нуля градиента функции $x^4 + y^4 + ax^2y^2$ при $a > -2$.

Замечание 1.7. В случае четных возмущений двумерныхборок появляются лишь следующие расклады:

$$\{2, 1, 0\}, \{4, 3, 0\}, \{2, 2, 1\}, \{4, 4, 1\}.$$

Все рассмотренные случаи удобно иллюстрировать сепаратрисными линиями уровня при условии, что управляющие параметры принадлежат минимальному страту множества Максвелла [4], [22] (все седла на одном уровне) (рис. 10).

Отметим, что вторичная, третичная и последующие бифуркации связаны со следующей диаграммой перестроек раскладов стационарных точек:

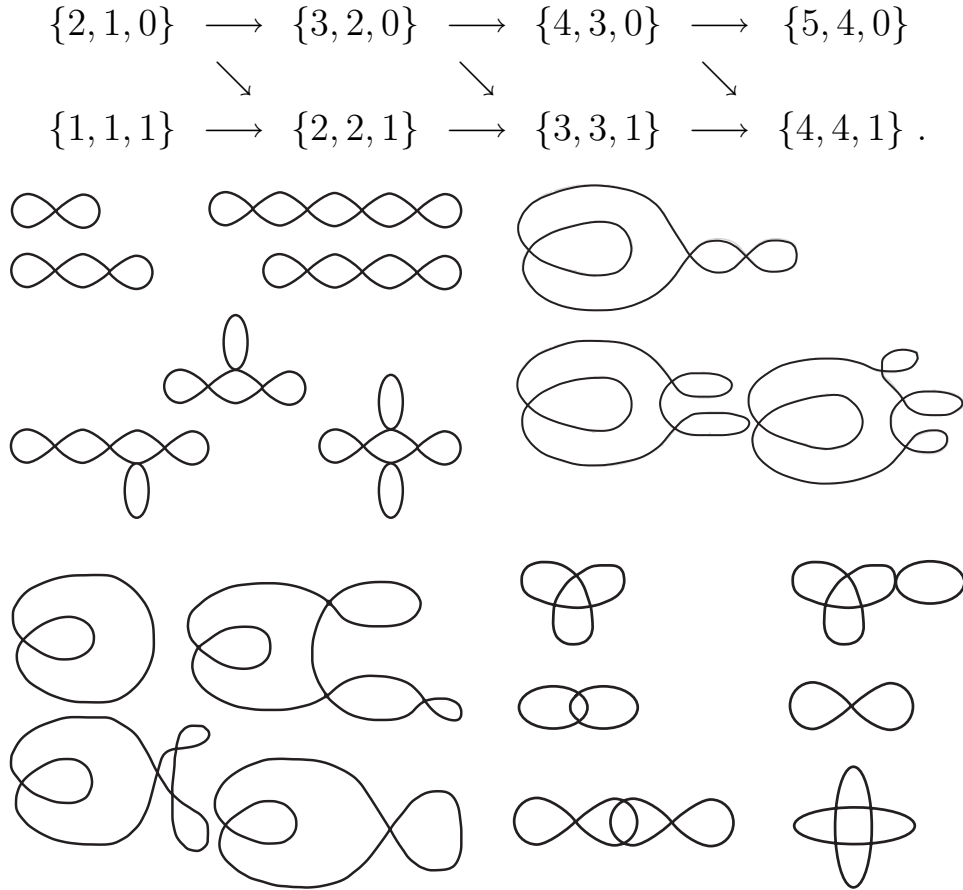


Рис. 10

Если условие (1.27) не выполнено, то пространство переменных ξ_1, ξ_2, ξ_3 разбивается на две области $O_1 = \{(\xi_1, \xi_2, \xi_3) : W_2(\xi_1, \xi_2) > 0\}$ и $O_2 = \{(\xi_1, \xi_2, \xi_3) : W_2(\xi_1, \xi_2) < 0\}$. В первой из них исследование W сводится к исследованию функции W_0 (см. 1.28), а во второй — к исследованию следующей пары функций:

$$U_1(\xi_1, \xi_2) := \sup_{\xi_3} W(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = W_0(\xi_1, \xi_2), \quad (1.30)$$

$$U_2(\xi_1, \xi_2) := \inf_{\xi_3} W(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = W_0(\xi_1, \xi_2) - \frac{1}{2}W_2(\xi_1, \xi_2)^2. \quad (1.31)$$

Редукция к U_2 сохраняет индексы Морса критических точек, а редукция к U_1 уменьшает все значения индекса Морса на единицу.

В дополнение к формулам (1.24), (1.25) запишем следующие разложения для общего количества l критических точек:

$$l_0 + l_1 + l_2 + 1 = l \quad (1.32)$$

— при наличии локального максимума,

$$l_0 + l_1 + l_2 = l \quad (1.33)$$

— при отсутствии локального максимума.

В первом случае изображающий клеточный комплекс содержит трехмерную клетку (соответствующую точке максимума).

Из формул (1.24), (1.25), (1.32) и (1.33) следует, что число ребер комплекса (число седловых точек индекса единица) однозначно определяется полным количеством всех стационарных точек: $l_1 = \frac{l-3}{2}$ или $l_1 = \frac{l-1}{2}$.

Всевозможным раскладам бифурцирующих критических точек, полученным возмущениями 3-мерных сборок, соответствует несколько сотен изображающих комплексов. Если ограничиться рассмотрением сборок и их возмущений с симметрией параллелепипеда (то есть четных по каждой переменной), то получится не более пятидесяти изображающих комплексов [25]. Полного списка изображающих комплексов для 3-мерных сборок в настоящее время нет. Однако созданные в последнее время новые геометрические подходы к исследованию *bif*-раскладов (см. [26]–[32], [82], [83]) вполне обнадеживают и создают впечатление реальности создания эффективных алгоритмов перечисления всех *bif*-раскладов.

При построении конкретных реализаций допустимых *bif*-раскладов весьма полезную роль выполняют так называемые квазиинвариантные подмногообразия, которые во многих случаях можно задавать как образы нелокально определенных маргинальных отображений.

Дадим точное определение [82]. Пусть W — гладкая функция на гладком многообразии (без края) N . Гладкое подмногообразие K (без края) в N называется квазиинвариантным для W , если существует такая гладкая ретракция $p : O(K) \longrightarrow K$, где $O(K)$ — окрестность K в N , что каждая точка $a \in K$ является морсовской критической точкой для сужения $W|_{p^{-1}(a)}$.

Если K — квазиинвариантное подмногообразие в N , то, очевидно, найдется такая окрестность $O(K)$ подмногообразия K в N , что четверка $(\tilde{O}(K), K, \mathbb{R}^q, p)$ является гладким локально тривиальным расслоением с базой K , стандартным слоем $\mathbb{R}^q$ и проекцией $p : O(K) \longrightarrow K$, $q = \dim N - \dim K$.

Таким образом, подмногообразие K является квазиинвариантным, если некоторая его окрестность в N гладко расслаивается над K и каждая точка $a \in K$ является морсовской критической точкой для сужения $W|_{p^{-1}(a)}$, где p — проекция расслоения.

Для всех точек связного морсовского квазиинвариантного подмногообразия K индекс Морса $W|_{p^{-1}(a)}$ будет постоянным (в силу локальной устойчивости индекса Морса), и это постоянное значение называется *индексом Морса* квазиинвариантного подмногообразия K .

В [82] получено следующее утверждение о критических точках возмущенной G -инвариантной функции (G — компактная группа Ли): *если L — морсовская критическая орбита функции W_λ при $\lambda = 0$, то при достаточно малых λ вблизи L существует квазиинвариантное подмногообразие L_λ функции W_λ , диффеоморфное L .*

Пусть $\tilde{W}_\lambda = W_\lambda|_{L_\lambda}$ и $\varphi_\lambda : L \longrightarrow L_\lambda$ — диффеоморфизм. Тогда $\hat{W}_\lambda(\xi) = \tilde{W}_\lambda(\varphi_\lambda(\xi))$ — ключевая функция ($\xi \in L$). Если $\xi_0 \in L$ — критическая точка $\hat{W}_\lambda$, то $\varphi_\lambda(\xi_0) \in L_\lambda$ — критическая точка W_λ , поэтому поиск экстремалей W_ε вблизи L сводится к исследованию $\hat{W}_\lambda(\xi)$.

Для функции $\hat{W}_\lambda(\xi)$ имеет место следующее представление:

$$\hat{W}_\lambda(\xi) = \hat{W}_0 + \sum_{i=1}^q \lambda_i \tilde{W}_i(\xi) + o(|\lambda|),$$

где $\hat{W}_0 = W_0|_L = \text{const}$, $\tilde{W}_i = \frac{\partial W}{\partial \lambda_i}(\cdot, 0)|_L$, $\xi \in L$, $\lambda \in \mathbb{R}^q$.

Справедливо также следующее утверждение [82]: *если $a_0 \in L$ — морсовская критическая точка индекса l функции $\tilde{W}(\xi, \sigma^0) = \sum_{i=1}^q \sigma_i^0 \tilde{W}_i(\xi)$, $\sigma^0 \in \mathbb{R}^q \setminus \{0\}$, $\xi \in L$, то при всех достаточно малых $\delta \in \mathbb{R}$ функция $W_{\delta\sigma^0}$ имеет морсовскую критическую индекса l точку $a(\delta) = a_0 + O(\delta) \in L_{\delta\sigma^0}$.*

Большинство из ранее перечисленных раскладов можно трактовать как результат ответвления от критических орбит после разрушения непрерывных симметрий. Соответствующая ключевая функция наследует эту

симметрию. Во многих случаях ее анализ сводится к анализу функции W двух ключевых параметров, представимой в виде $W_*(\xi) + \lambda_3 \xi_2^3$ где $W_*(\xi) = W^{(4)}(\xi) + \lambda_1 \xi_1^2 + \lambda_2 \xi_2^2$, $W^{(4)}(\xi) = \xi_1^4 + \xi_2^4 + 2a \xi_1^2 \xi_2^2$, $a^2 \neq 0$. При $a = 1$ полином $W^{(4)}$ приобретает круговую симметрию — инвариантность относительно стандартного действия на плоскости $SO(2) \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ группы вращений плоскости, а при $a = -1$ полином $W^{(4)}$ приобретает гиперболическую симметрию — инвариантность относительно действия на плоскости группы гиперболических вращений плоскости, задаваемых матрицами $\begin{pmatrix} ch(t) & sh(t) \\ sh(t) & ch(t) \end{pmatrix}$. Полиному W отвечают *bif*-расклады, изображенные графами

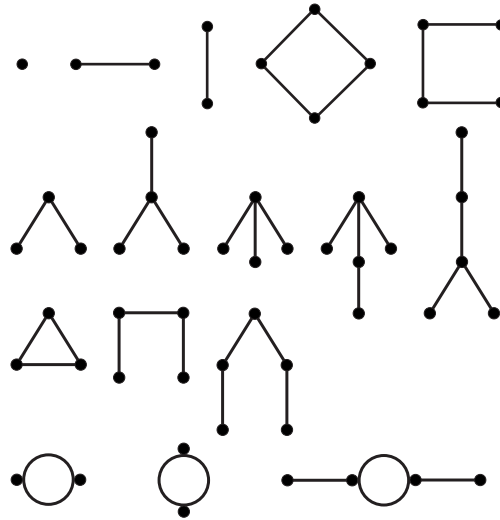


Рис. 11

Расклады, изображенные на всех этих рисунках, легко получить через разрушение критических орбит посредством следующих деформаций:

$$(\xi_1^2 + \xi_2^2)^2 + \lambda(\xi_1^2 + \xi_2^2) + \delta_1 \xi_1^2 + \delta_2 \xi_2^2 + \delta_3 \xi_2^3 + \varepsilon \xi_1^2 \xi_2^2$$

(разрушение круговой симметрии) и

$$(\xi_1^2 - \xi_2^2)^2 + \lambda(\xi_1^2 - \xi_2^2) + \delta_1 \xi_1^2 + \delta_2 \xi_2^2 + \delta_3 \xi_2^3 + \varepsilon \xi_1^2 \xi_2^2$$

(разрушение гиперболической симметрии).

Аналогичные деформации непрерывно симметричных трехмерных кватернических полиномов дают обширный набор изображающих клеточных комплексов. Например, деформация

$$(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2)^2 + \lambda(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2) + \varepsilon(\xi_1^2 \xi_2^2 + \xi_1^2 \xi_3^2 + \xi_2^2 \xi_3^2)$$

дает максимальные *bif*-расклады с графами,

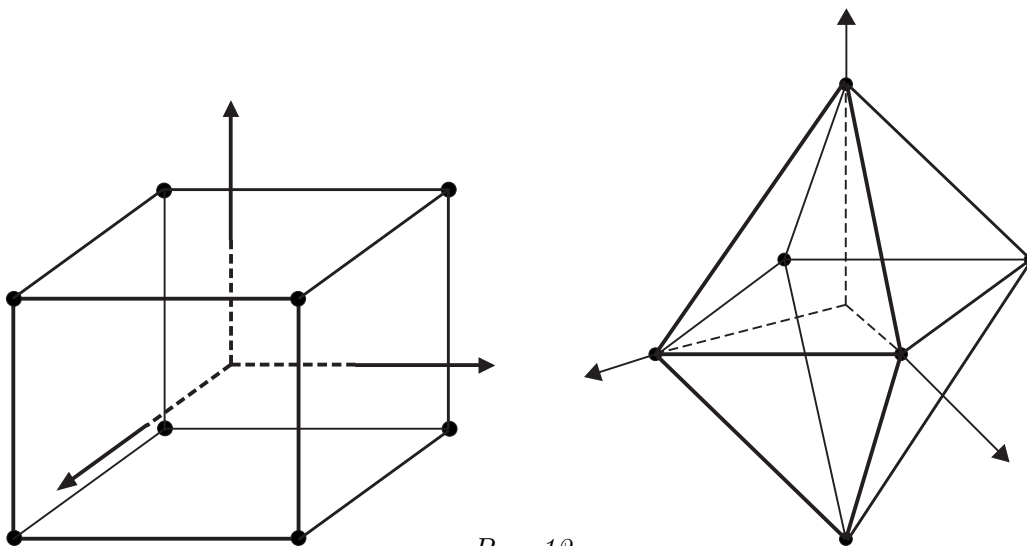


Рис. 12

а деформация

$$(\xi_1^2 \pm \xi_2^2)^2 + \xi_3^4 + \lambda_1(\xi_1^2 \pm \xi_2^2) + \delta_1 \xi_1^2 + \delta_2 \xi_2^2 + \delta_3 \xi_2^3 + \\ + \lambda_2(\xi_1^2 \pm \xi_2^2)\xi_3^2 + \varepsilon_1 \xi_1^2 \xi_2^2 + \varepsilon_2 \xi_1^2 \xi_3^2 + \varepsilon_3 \xi_2^2 \xi_3^2$$

приводит к паре комплексов

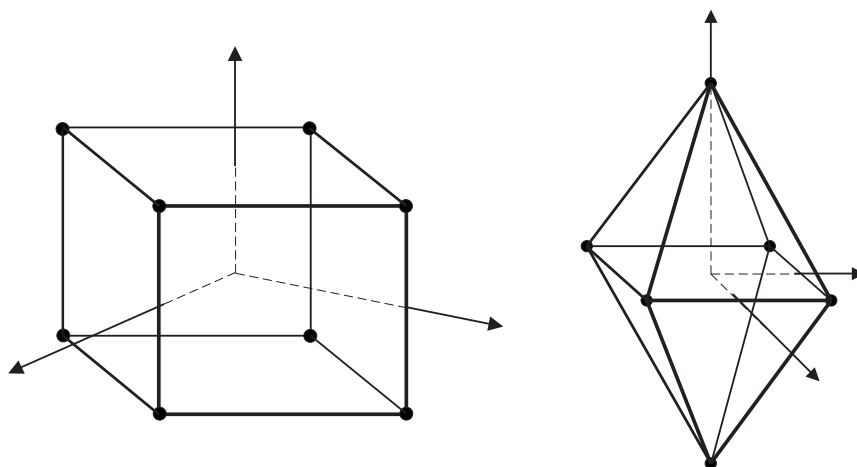


Рис. 13

отличающихся от предыдущих лишь расположением вершин (точек минимума) относительно координатных осей и плоскостей (что важно для определения тех мод бифуркаций, которые «формируют» изучаемую экстремаль), а также следующую тройку графов:

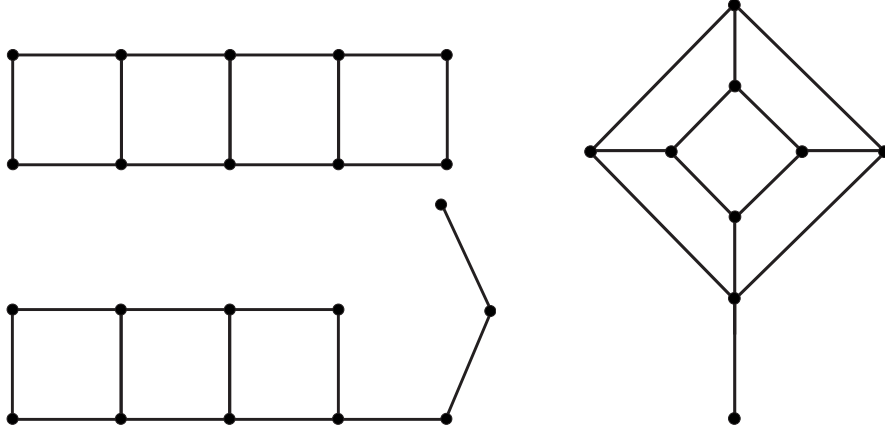


Рис. 14

1.7.3 Общие утверждения о бифуркации экстремалей из точки минимума с особенностью сборки

Прикладной интерес представляют вопросы, связанные с раскладами бифурцирующих морсовских критических точек при возмущениях кватричной формы кубическими и квадратичными мономы.

Пусть гладкая функция W на $\mathbb{R}^n$ принимает локально минимальное значение в точке a и имеет в этой точке особенность m -мерной сборки, то есть в некоторой локальной системе координат с центром в точке a функция W представима в виде (1.22).

Можно предположить без ограничения общности рассуждения, что $m = n$.

Пусть $x = rs$, $s \in S^{m-1}$ (единичной сфере), $r \in \mathbb{R}_+$. Тогда получаем

$$W^{(4)}(x) = f_s(r) = \gamma_0 r^4 + \gamma_1 r^3 + \gamma_2 r^2, \quad (1.34)$$

$$\gamma_0 = W^{(4)}(s), \quad \gamma_1 = W^{(3)}(s), \quad \gamma_2 = W^{(2)}(s).$$

Ненулевые точки, стационарные по радиальной переменной для функции (1.34), задаются квадратичным уравнением

$$r^2 + \frac{3\gamma_1}{4\gamma_0}r + \frac{\gamma_2}{2\gamma_0} = 0$$

и, следовательно, представляются в виде

$$-\frac{3\gamma_1}{8\gamma_0} \pm \sqrt{\left(\frac{3\gamma_1}{8\gamma_0}\right)^2 - \frac{\gamma_2}{2\gamma_0}}.$$

Таким образом, при $\gamma_2 < 0$ имеется единственная ненулевая точка, стационарная по радиальной переменной, а при

$$0 < \frac{\gamma_2}{2\gamma_0} < \left(\frac{3\gamma_1}{8\gamma_0}\right)^2, \quad \gamma_1 < 0$$

существует пара ненулевых точек, стационарных по r .

При

$$\frac{\gamma_2}{2\gamma_0} > \left(\frac{3\gamma_1}{8\gamma_0}\right)^2$$

и при

$$0 < \frac{\gamma_2}{2\gamma_0} < \left(\frac{3\gamma_1}{8\gamma_0}\right)^2, \quad \gamma_1 > 0$$

ненулевые точки, стационарные по r , отсутствуют.

Из полученных соотношений вытекает, в частности, что возмущения положительной кватричной формы $W^{(4)}(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, кубическими и квадратичными полиномами приводят к рождению не более одной точки локального максимума.

Если квадратичная часть возмущения отрицательно определена (начало координат — точка локального максимума), то найдется гладкое подмногообразие M , диффеоморфное $(n-1)$ -мерной сфере, на котором находятся все ненулевые критические точки возмущенной кватричной формы. Причем эти точки и только они являются экстремалами сужения возмущенной кватричной формы на M . Значения индекса Морса во всех критических точках после сужения сохраняются. Подмногообразие M является образом маргинального отображения φ при редукции на сферу:

$$\tilde{W}(s) := \inf_r \tilde{W}(r \cdot s), \quad s \in S^{n-1}, \quad (1.35)$$

т.е. является квазиинвариантным.

В случае отсутствия кубической части (четного возмущения) подмногообразие M центрально симметрично, а отображение φ эквивариантно относительно антиподального преобразования (преобразования центральной симметрии). Следовательно, ключевая функция (1.35) четна (инвариантна относительно антиподального преобразования). Если l — количество критических точек на сфере для функции (1.35), полученной возмущением положительной кватричной формы отрицательной квадра-

тичной формой, и если все критические точки являются при этом морсовскими, то

$$l = 3^n - 1 \quad (\text{mod } 4). \quad (1.36)$$

Доказательство этой формулы проводится с использованием схемы, описанной выше.

Критические точки функции (1.35) отождествляются с ненулевыми критическими точками в $\mathbb{R}^n$ для функции $W^{(4)}(x) - (Ax, x)$, где A — положительная симметричная матрица, $W^{(4)}(x)$ — положительная квартичная форма. Заметим сначала, что для каждой комплексной критической точки a функции $W^{(4)}(x) - (Ax, x)$ (с любой матрицей A) комплексно сопряженная точка $\bar{a}$ также стационарна, а точка ia (i — мнимая единица) является критической для функции $W^{(4)}(x) + (Ax, x)$. Рассмотрим в комплексном пространстве $\mathbb{C}^n$ подмножество K , состоящее из ненулевых критических точек (комплексных и вещественных) функции $W^{(4)}(z) - (Az, z)$ (все экстремали предполагаются невырожденными). В него входит $(3^n - 1)$ точек [4], оно инвариантно относительно антиподального преобразования и преобразования комплексного сопряжения. Легко увидеть, что в случае положительной матрицы A множество K не содержит мнимых точек (полученных умножением вещественных векторов на мнимую единицу). В случае же произвольной невырожденной симметричной матрицы A множество K содержит мнимые точки, полученные умножением на i вещественных стационарных точек функции $W^{(4)}(x) + (Ax, x)$. Если точка $a \in K$ не является вещественной или мнимой, то вместе с ней в K входят точки $-a$, $\bar{a}$, $-\bar{a}$. Следовательно, количество точек K , не являющихся вещественными или мнимыми, кратно четырем. Отсюда вытекает (1.36).

Фактически доказано более общее утверждение [26]:

Теорема 1.11. *Если l и l^* — количества критических точек положительной квартичной формы $W^{(4)}(x)$ на вещественных невырожденных поверхностях второго порядка $(Ax, x) = 1$ и $(Ax, x) = -1$ в $\mathbb{R}^n$ и если все они являются морсовскими, то*

$$l + l^* = 3^n - 1 \quad (\text{mod } 4). \quad (1.37)$$

В случае положительной матрицы A имеем $l^* = 0$ и формула (1.37) в этом случае превращается в формулу (1.36).

В многомерном случае также можно рассматривать *bif*-расклады $\{l_0, l_1, \dots, l_n\}$, отвечающие малым возмущениям, вызывающим распадае-ние особых экстремалей на $l = \sum l_j$ морсовских стационарных точек, l_j – количество стационарных точек с индексом Морса, равным j .

Теорема 1.12. Пусть форма $W^{(4)}$ на $\mathbb{R}^n$ положительна: $W^{(4)}(x) > 0 \forall x \neq 0$, и пусть $\{l_0, l_1, \dots, l_n\}$ – *bif*-расклад, реализован-ный возмущением $W^{(4)}$ некоторыми кубическими и квадратичными фор-мами. Тогда этот же набор $\{l_0, l_1, \dots, l_n\}$ реализуется как *bif*-расклад особенности любой функции W , квартичная часть тейлоровского раз-ложения в нуле которой равна $W^{(4)}$.

Доказательство. Если заданный расклад бифурцирующих точек для $W^{(4)}$ реализован возмущением $W^{(4)} + W^{(3)} + W^{(2)}$, то при достаточно малом ε функция $W + \varepsilon W^{(3)} + \varepsilon^2 W^{(2)}$ реализует тот же расклад. Для доказательства данного утверждения достаточно рассмотреть функцию

$$\begin{aligned} U(x, \varepsilon) &:= \varepsilon^{-4}(W(\varepsilon y) + \varepsilon W^{(3)}(\varepsilon y) + \varepsilon^2 W^{(2)}(\varepsilon y)) = \\ &= W^{(4)}(y) + W^{(3)}(y) + W^{(2)}(y) + O(\varepsilon). \end{aligned}$$

Функция $U(y, 0)$ совпадает с рассмотренной ранее возмущенной квар-тичной формой и, следовательно, имеет l стационарных точек заданного расклада. Поскольку все стационарные точки являются морсовскими, то их количество и распределение по (морсовским) типам сохранится при малых ε . После перехода к старым переменным $x = \varepsilon y$ эти точки пе-рейдут, с сохранением индексов Морса, в стационарные точки функции $W + \varepsilon W^{(3)} + \varepsilon^2 W^{(2)}$.

Теорема 1.13. Для любого *bif*-расклада $\{l_0, l_1, \dots, l_n\}$ в точке минимума с особенностью сборки выполняется соотношение $l_n \leq 1$ (то есть при распадении *tip*-особенности сборки появляется не более одной точки локального максимума).

Доказательство. Предположим, что имеется расклад, для кото-рого $l_n \geq 2$. Из теории нормальных форм ростков гладких функций [4] вытекает, что существует гладкая однопараметрическая деформация рас-сматриваемой функции в виде полинома (в некоторой системе координат), гладко зависящего от параметра,

$$\sum_{k_1, \dots, k_n} a_{k_1, \dots, k_n}(\varepsilon) x_1^{k_1} \cdot \dots \cdot x_n^{k_n}, \quad k_j \leq 2$$

(ε — скалярный параметр), у которого при всех ε в фиксированной окрестности нуля существует ровно $l = \sum l_j$ стационарных точек с раскладом $\{l_0, l_1, \dots, l_n\}$, и эти точки стремятся к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$. Без ущерба для общности рассуждения можно предполагать, что начало координат при всех ε является точкой локального максимума. Выразим переменную x в рассмотренном полиноме через радиальную и сферическую переменные (1.34): $x = r \cdot s$, $r \geq 0$, $\|s\| = 1$. Получим функцию

$$f_{s,\varepsilon}(r) = \gamma_0(s, \varepsilon)r^4 + \gamma_1(s, \varepsilon)r^3 + \gamma_2(s, \varepsilon)r^2 + O(r^5), \quad (1.38)$$

для которой $\gamma_0, \gamma_2 > 0 \quad \forall s, \varepsilon > 0$, и $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ при $\varepsilon = 0$. Такая функция имеет при малых ε только одну точку локального максимума и эта точка находится в начале координат. Так как точка локального максимума обязана быть точкой локального максимума и по радиальной переменной, то получаем противоречие с предположением о существовании второй точки локального максимума.

1.8 Бифуркационный анализ ключевой функции в случае особенности 2-мерной сборки

Уже в случае $n = 2$ описанный выше метод построения главной части ключевой функции дает принципиально новое развитие схемы, изложенной в [26], и значительно расширяет класс задач, которые можно решать таким методом. Коротко остановимся на примере дифференциального уравнения, описывающего движение слабо неоднородной упругой балки на упругом основании (более подробно эта задача будет описана в четвертой главе). Решение аналогичной задачи в случае однородной балки ранее было дано Б.М. Даринским и Ю.И. Сапроновым. Переход к случаю неоднородной балки потребовал перестройки в исследовательской схеме Даринского – Сапронова, в основе которой лежало условие постоянства пары собственных функций e_1, e_2 второго дифференциала (в нуле) функционала энергии. В случае неоднородной балки это условие нарушается и, более того, оно не допускает прямого обобщения, например, в виде

условия существования непрерывного семейства собственных функций. Условие постоянных собственных функций можно заменить условием существования пары гладких векторных полей $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2$, линейная оболочка которых инвариантна относительно второго дифференциала в нуле. Этой пары достаточно для построения главной части ключевой функции и, как следствие, для проведения анализа ветвления равновесных конфигураций балки (в ситуации особой точки типа 2-мерной сборки) [47] – [49].

В случае двумерного вырождения с однородной особенностью типа 2-мерной сборки, нормальная форма ключевой функции в классе функций на координатной плоскости, четных по каждой переменной, имеет следующий вид:

$$W_0 = x^4 + 2a x^2 y^2 + y^4 + \delta_1 x^2 + \delta_2 y^2.$$

В случае понижения симметрии до симметрии «обычной» четности нормальная форма ключевой функции имеет следующий вид:

$$W = x^4 + 2a x^2 y^2 + y^4 + \delta_1 x^2 + \delta_2 y^2 + 2\delta_3 xy,$$

$\delta_1, \delta_2, \delta_3$ — малые вещественные параметры, $a > -1$.

Полный бифуркационный анализ этого семейства означает решение следующих (основных) вопросов:

- 1) описание (при каждом a) геометрического строения каустики Σ , представляющей собой поверхность в $\mathbb{R}^3$, состоящей из таких точек $(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$, для которых существуют вырожденные экстремали функции W ;
- 2) описание всевозможных раскладов бифурцирующих экстремалей (*bif*-раскладов), отвечающих ячейкам регулярности (компонентам связности множества $\mathbb{R}^3 \setminus \Sigma$);
- 3) описание примыканий *bif*-раскладов (переходов от расклада к раскладу при пересечении параметром каустической поверхности);
- 4) описание строения линий уровня функции W .

Для проведения такого анализа необходимо привести исходную функцию к более удобному для исследования виду. Один из способов исследования основан на вторичной редукции.

В полярной системе координат $x = r \cos(\psi)$, $y = r \sin(\psi)$ получаем функцию

$$\begin{aligned}
U(r, \psi) &= W(r \cos(\psi), r \sin(\psi)) = \\
&= (r^2 \cos^2(\psi) + r^2 \sin^2(\psi))^2 + 2(a-1)r^4 \cos^2(\psi) \sin^2(\psi) + \\
&\quad + \delta_1 r^2 \cos^2(\psi) + 2\delta_2 r^2 \cos(\psi) \sin(\psi) + \delta_3 r^2 \sin^2(\psi) = \\
&= \left(1 + b \sin^2(\varphi)\right) \rho^2 + (b_1 \cos(\varphi) + b_2 \sin(\varphi) + b_3) \rho,
\end{aligned}$$

где

$$\varphi = 2\psi, \quad b = \frac{(a-1)}{2}, \quad r^2 = \rho, \quad b_1 = \frac{\delta_1 - \delta_3}{2}, \quad b_2 = \delta_2, \quad b_3 = \frac{\delta_1 + \delta_3}{2}.$$

Редуцируя (вторично) эту функцию по ρ , получим

$$\frac{\partial U}{\partial \rho}(\rho, \varphi) = 2\rho \alpha(\varphi) + \beta(\varphi) = 0,$$

где

$$\alpha(\varphi) = 1 + b \sin^2(\varphi), \quad \beta(\varphi) = b_1 \cos(\varphi) + b_2 \sin(\varphi) + b_3.$$

Следовательно,

$$\rho = -\frac{\beta}{2\alpha} \tag{1.39}$$

и для редуцированной функции получаем представление

$$w(\varphi) = \frac{\beta^2}{\alpha} = \frac{(b_1 \cos(\varphi) + b_2 \sin(\varphi) + b_3)^2}{1 + b \sin^2(\varphi)}. \tag{1.40}$$

Из полученных соотношений следует, что справедливо следующее утверждение, принадлежащее Ф.А. Белых, А.В. Зачепа, Д.В. Костину и Ю.И. Сапронову:

Теорема 1.14. *Каустика функции W совпадает с каустикой функции w .*

Второй способ связан непосредственно с системой уравнений, определяющей критические точки. Для этого перепишем уравнение без потери общности с дополнительными коэффициентами, удобными при дальнейшем дифференцировании

$$W = \frac{x^4 + 2ax^2y^2 + y^4}{4} + \frac{\tilde{\delta}_1 x^2 + \tilde{\delta}_2 y^2 + 2\tilde{\delta}_3 xy}{2}.$$

Критические значения функции W являются решением следующей системы

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial x} &= \tilde{\delta}_1 x + x^3 + 2axy^2 + \tilde{\delta}_3 y = 0, \\ \frac{\partial W}{\partial y} &= \tilde{\delta}_2 y + 2ax^2y + y^3 + \tilde{\delta}_3 x = 0, \\ \det H &= \begin{vmatrix} \tilde{\delta}_1 + 3x^2 + 2ay^2 & 4axy + \tilde{\delta}_3 \\ 4axy + \tilde{\delta}_3 & \tilde{\delta}_2 + 2ax^2 + 3y^2 \end{vmatrix} = 0 \end{aligned} \right\}$$

(здесь H — матрица Гессе).

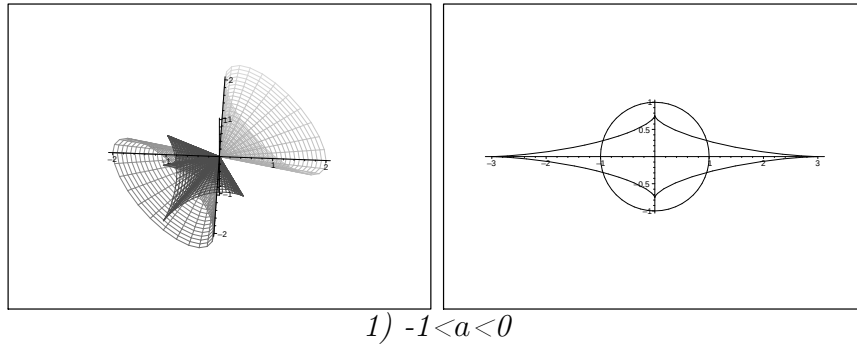
Замечание 1.8. Как дополнительный бифуркационный эффект можно отметить, что при $\delta_3 \neq 0$ все возможные решения (кроме тривиальных) становятся двухмодовыми (т.е. $x = 0 \Leftrightarrow y = 0$).

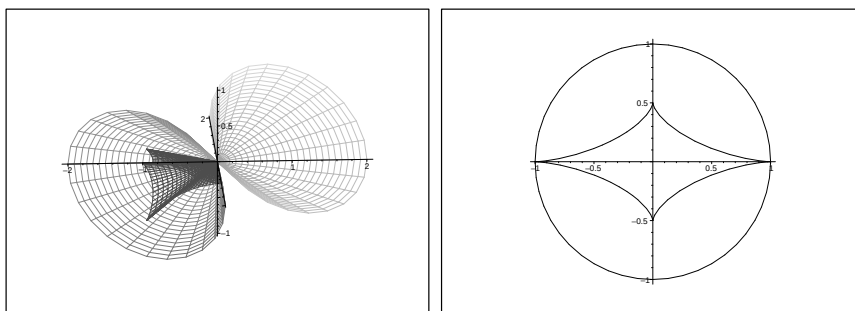
После разрешения данной системы относительно $\tilde{\delta}_1, \tilde{\delta}_2, \tilde{\delta}_3$ и перехода к полярным координатам $x = \rho \sin \varphi$, $y = \rho \cos \varphi$ получим

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\delta}_1 &= -\rho^2 \frac{(a+1+(a-1)\cos^3(2\varphi))}{2+(a-1)\sin^2(2\varphi)}, \\ \tilde{\delta}_2 &= -\rho^2 \frac{(a+1-(a-1)\cos^3(2\varphi))}{2+(a-1)\sin^2(2\varphi)}, \\ \tilde{\delta}_3 &= -\rho^2 \frac{(a^2-1)\sin^3(2\varphi)}{4+2(a-1)\sin^2(2\varphi)}. \end{aligned} \right\}$$

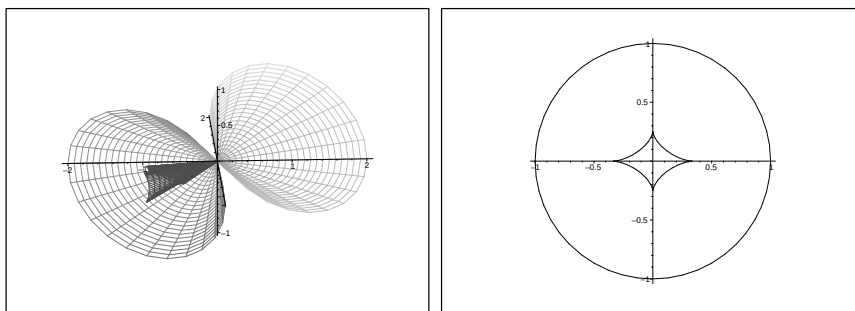
На основе этой системы можно провести бифуркационный анализ исходной функции.

Ниже дано описание каустик для $a > -1$ (рис. 15).

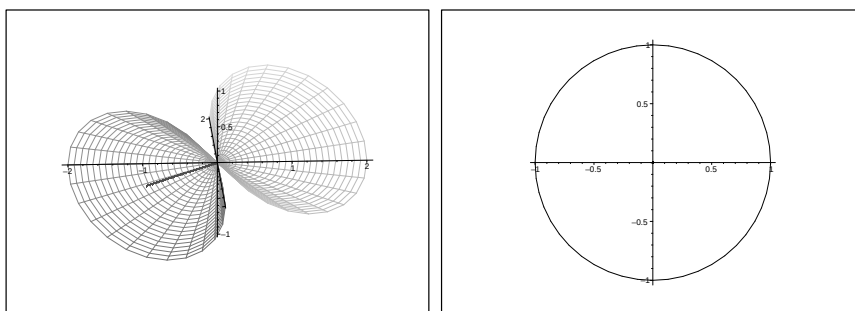




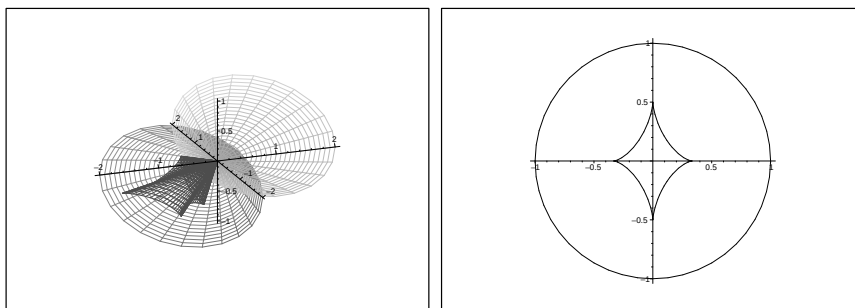
2) $a=0$



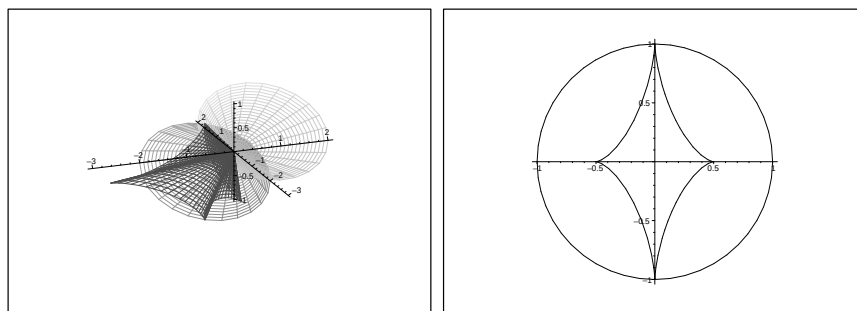
3) $0 < a < 1$



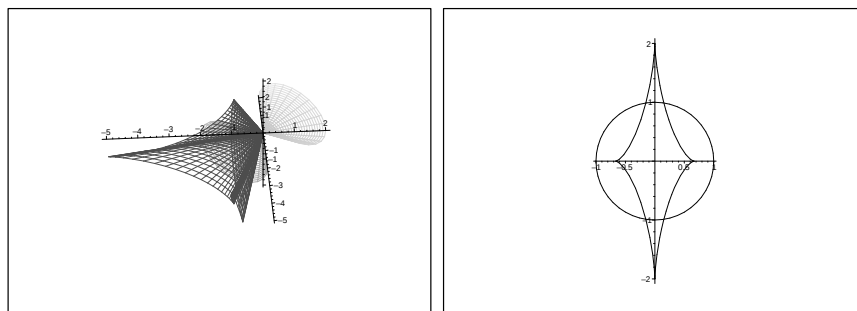
4) $a=1$ вырожденный случай



5) $1 < a < 3$



6) $a=3$



7) $a>3$

Рис. 15

Замечание 1.9. При $-1 < a < 1$ каустика совпадает, с точностью до поворота на угол $\pi/4$, с каустикой при $1 < a < +\infty$. Поэтому достаточно рассмотреть строение ключевой функции для a на одном из этих интервалов.

Рассмотрим подробно случай: $a \in (-1; 0)$ (рис. 16). Горизонтальные оси координат соответствуют δ_1, δ_2 , а вертикальная — δ_3 .

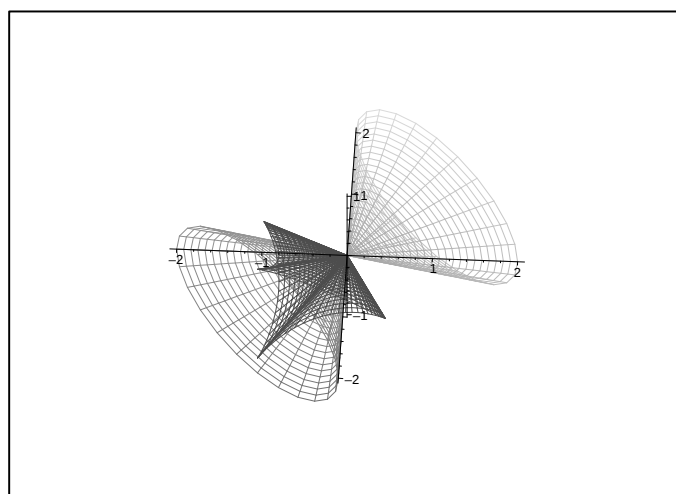


Рис. 16

На следующем рисунке представлены сечения каустики при $-1 < a < 0$ и метаморфозы линий уровня ключевой функции.

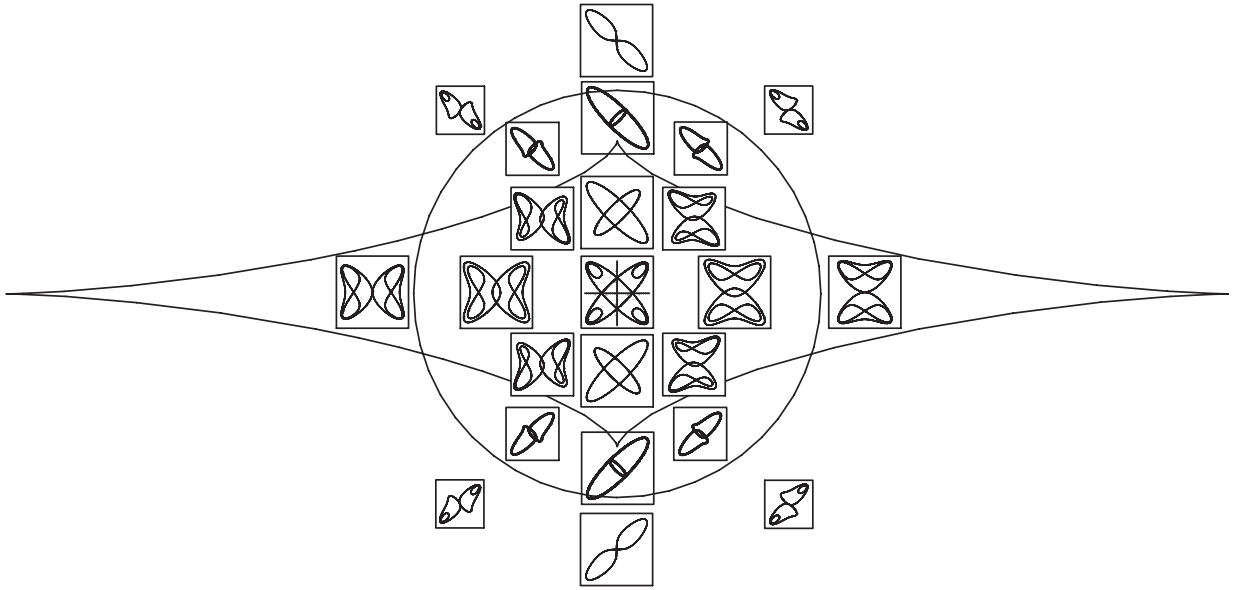


Рис. 17

Как видно из рис. 17, пространство параметров $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ разбито на ячейки регулярности, каждой из которых соответствует свой *bif*-расклад. Так, например, в ячейку под номером 1 входят те значения параметров, при которых исходная функция имеет лишь одну критическую точку (минимум). То есть данной ячейке соответствует расклад $(1,0,0)$, и линии уровня представляют собой овалы с центрами в нуле.

Для остальных ячеек получены следующие соответствия:

$$\begin{aligned} \text{ячейка 1} &\Leftrightarrow (1,0,0), & \text{ячейка 2} &\Leftrightarrow (2,1,0), & \text{ячейка 3} &\Leftrightarrow (2,2,1), \\ \text{ячейка 4} &\Leftrightarrow (4,3,0), & \text{ячейка 5} &\Leftrightarrow (4,4,1). \end{aligned}$$

Каждой ячейке регулярности соответствует определенный тип линий уровней ключевой функции. Точка минимума в нуле при переходе значений параметров через характеристическую поверхность, разделяющую 1 и 2 зоны, будет переходить в седло, при этом из неё рождаются еще два минимума.

На рис. 18 представлены типовые образцы линий уровней.

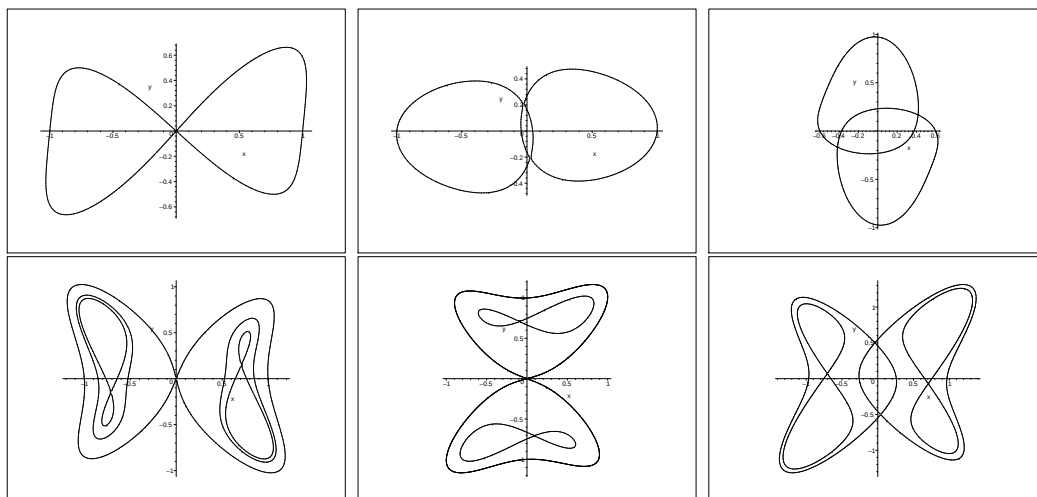


Рис. 18

При произвольных (без условия симметрии) регулярных возмущениях гладкой функции в окрестности особой точки типа двумерной сборки появляется те и только те *bif*-расклады критических точек, которые приведены в следующей таблице (см. [32]):

$$\{2, 1, 0\}, \{3, 2, 0\}, \{4, 3, 0\}, \{5, 4, 0\},$$

$$\{1, 1, 1\}, \{2, 2, 1\}, \{3, 3, 1\}, \{4, 4, 1\}.$$

В случае $-1 < a < 0$: при $\varepsilon < 0$ минимумы будут во второй и четвертой четверти, а при $\varepsilon > 0$ в первой и третьей. И симметрично при $1 < a < +\infty$.

Максимальным раскладам соответствуют следующие изображающие графы (собранные в классы гомологичных) (рис. 19):

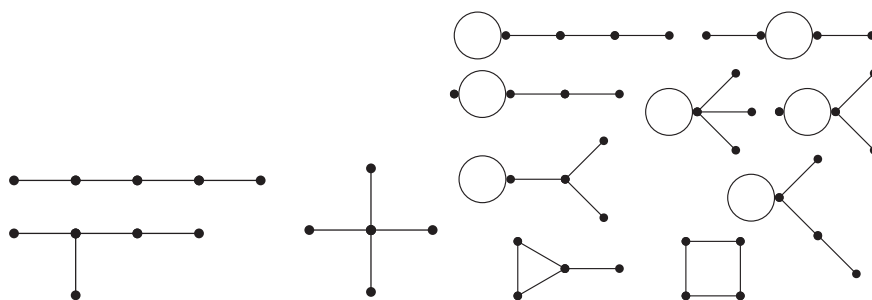


Рис. 19

Таким образом, ответы на основные качественные вопросы бифуркационного анализа, как видно из рисунков, здесь получены.

1.9 Полурегулярные угловые особенности

1.9.1 Основные определения

Обратимся к описанию раскладов экстремалей параметрического семейства гладких функций $W(x, \lambda)$, бифурцирующих из начала координат при следующих *основных* условиях:

- 1) функция $W(x, 0)$ инвариантна относительно некоторой системы коммутирующих инволюций, задающих на ядре второго дифференциала полусвободное действие группы симметрии параллелепипеда (то есть, нуль — единственная неподвижная точка);
- 2) семейство $W(x, \lambda)$ рассматривается на области, граница которой содержит нулевую точку, причем граница в некоторой окрестности нуля задана системой неравенств $g_k(x) \geq 0$, $k = 1, \dots, m$, посредством гладких функций g_k , дифференциалы которых в нуле линейно независимы.

Ключевые параметры нужно задать при этом так, чтобы редукция к ключевой функции привела к задаче анализа экстремалей (включая условные экстремали на границе области), бифурцирующих из вершины m -гранного угла в n -мерном пространстве.

Напомним, что многообразием размерности n с m -мерным углом ($m \leq n$) называется гладкое вещественное n -мерное многообразие с набором из m неособо пересекающихся гладких гиперповерхностей. Локально (в окрестности угловой точки) такое многообразие устроено как пространство $\mathbb{R}^n$ с выделенным в нем семейством гиперплоскостей

$$\mathbb{R}_j^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_j = 0\}, \quad j = 1, \dots, m$$

(здесь x_j — j -я координата точки x). Случай одной гиперплоскости ($m = 1$) называется многообразием с краем [3]. Множество

$$\mathcal{C} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, m\}$$

называется *m -гранным углом*. Точка $a \in \mathcal{C}$ называется *условно критической* для гладкой функции W в $\mathbb{R}^n$, если $\text{grad } W(a)$ ортогонален наименьшей грани $\mathcal{C}$, содержащей a . Число элементов носителя

$$\text{supp}(x) = \{k \in \{1, \dots, m\} \mid x_k \neq 0\}$$

(приведенная размерность минимальной грани угла, содержащей эту точку) называется *порядком* точки a . *Кратностью* $\hat{\mu}$ условно критической

точки $a \in \mathcal{C}$ называется размерность фактор-алгебры

$$\hat{Q}(W, a) = \mathbb{R}[[x - a]] / \hat{\mathfrak{A}}(W, a),$$

где $\mathbb{R}[[x - a]]$ — алгебра формальных степенных рядов от $x - a$, а $\hat{\mathfrak{A}}(W, a)$ — угловой якобиев идеал в $\mathbb{R}[[x - a]]$, порожденный двумя следующими наборами функций:

$$\left\{ \frac{\partial W}{\partial x_j} \right\}_{j \in \text{supp}(a)}, \quad \left\{ x_k \frac{\partial W}{\partial x_k} \right\}_{k \notin \text{supp}(a)}.$$

Точка, для которой $\hat{\mu} = 1$, называется *простой* или *регулярной*. Пусть

$$K = \{1, \dots, m\} \setminus \text{supp}(a).$$

Через $\mu_K(W, a)$ обозначается (обычная) кратность в точке a ограничения $W|_{\mathbb{R}_K^n}$, $\forall K \in \{1, \dots, m\} \setminus \text{supp}(a)$, где

$$\mathbb{R}_K^n = \bigcap_{k \in K} \mathbb{R}_k^n.$$

Нерегулярная условно критическая точка a ($\hat{\mu} > 1$), для которой

$$\mu_K \leq 1 \quad \forall K \in \{1, \dots, m\} \setminus \text{supp}(a),$$

называется *полурегулярной*.

Если $\text{supp}(a) = \emptyset$, и a — полурегулярная условно критическая точка для W , то угловой заменой координат (посредством локального диффеоморфизма пары $(\mathbb{R}^n, \mathcal{C}) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathcal{C})$, преобразующего каждую грань $\mathcal{C}$ на себя) функция W приводится к нормальной форме

$$\sum_{k=1}^m \sigma_k x_k^2 + \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_q \leq m, q \geq 2} a_{k_1, \dots, k_q} x_{k_1} \cdot \dots \cdot x_{k_q} + \sum_{p=m+1}^n \sigma_p x_p^2, \quad (1.41)$$

где $\sigma_k \in \{-1, 1\}$.

Каноническая миниверсальная деформация особенности W в нуле задается разверткой

$$W(x, \lambda) = W(x) + \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_q \leq m, q \geq 2} \lambda_{k_1, \dots, k_q} x_{k_1} \cdot \dots \cdot x_{k_q}, \quad (1.42)$$

$$\lambda = \{\lambda_{k_1, \dots, k_q}\}.$$

Доказательство этих утверждений можно осуществить либо непосредственно [3], [4], либо сведением к их эквивариантным аналогам [92], [94].

Если $\widehat{\mathbb{R}}^n$ — пространство с координатами $y_1, \dots, y_n$, накрывающее 2^m -листно $\mathcal{C}$ посредством отображения

$$\pi : \widehat{\mathbb{R}}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad \pi(y) = (y_1^2, \dots, y_m^2, y_{m+1}, \dots, y_n)^T,$$

то $W(x)$ поднимается в $\widehat{\mathbb{R}}^n$ формулой $\hat{W}(y) = W(\pi(y))$. Функция $\hat{W}$ инвариантна относительно инволюций $J_1, \dots, J_m$, где J_k изменяет знак в k -й координате. Угловому диффеоморфизму (локальному)

$$\varphi : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$$

однозначно соответствует диффеоморфизм

$$\hat{\varphi} : (\widehat{\mathbb{R}}^n, 0) \longrightarrow (\widehat{\mathbb{R}}^n, 0),$$

эквивариантный относительно $J_1, \dots, J_m$, для которого

$$\hat{\varphi}(\hat{\mathcal{C}}) \subset \hat{\mathcal{C}}, \quad \varphi\pi = \pi\hat{\varphi}$$

(здесь $\hat{\mathcal{C}} = \{x \in \widehat{\mathbb{R}}^n \mid y_j \geq 0, \ j = 1, \dots, m\}$). Таким образом угловые особенности отождествляются с $\{J_1, \dots, J_m\}$ -эквивариантными [4], [94]. При $m = n$ форме (1.41) соответствует инвариантная n -мерная сборка:

$$\widehat{W}(y) = \sum_{k=1}^m \sigma_k y_k^4 + \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_q \leq m, \ q \geq 2} a_{k_1, \dots, k_q} y_{k_1}^2 \cdot \dots \cdot y_{k_q}^2, \quad (1.43)$$

а форме (1.42) — развертка

$$\hat{W}(y) + \sum_{k=1}^m \sigma_k y_k^4 + \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_q \leq m} \lambda_{k_1, \dots, k_q} y_{k_1}^2 \cdot \dots \cdot y_{k_q}^2, \quad (1.44)$$

задающая миниверсальную деформацию особенности (1.43) в классе функций, инвариантных относительно $\{J_1, \dots, J_m\}$.

При таком отождествлении регулярные условно критические точки функции W соответствуют (обычным) регулярным критическим точкам функции $\hat{W}$. У соответствующих друг другу критических точек совпадают индексы Морса. Под *индексом Морса* регулярной условно критической точки $a \in \mathcal{C}$ подразумевается обычный индекс Морса ограничения

$$W|_{\mathbb{R}_K^n}, \quad K = \{1, \dots, m\} \setminus \text{supp}(a),$$

сложенный с количеством отрицательных первых производных W в точке a . Ясно, что при этом отождествляются бифуркационные диаграммы угловой и $\{J_1, \dots, J_m\}$ -эквивариантной особенностей.

Для полурегулярной особенности можно положить, без ущерба для общности, $m = n$.

1.9.2 Каустики

Пусть Σ — каустика (бифуркационная диаграмма функций без стратов Максвелла) для угловой особенности функции W в полурегулярной условно критической точке $a = 0$, то есть Σ — росток в нуле множества тех значений параметра в базе ограниченной миниверсальной деформации $W(x, \lambda)$ (полученной, например, из (1.42) ограничением $W(x, 0) \equiv 0$), для которых $W(\cdot, \lambda)$ имеет вырожденную условно критическую точку. Рассмотрим множество N_K , состоящее из тех $(x, \lambda) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{\hat{\mu}-1}$, для которых

$$x_j = \frac{\partial W}{\partial x_k}(x, \lambda) = 0 \quad \forall k \in K, \forall j \notin K, x_k \geq 0; \quad (1.45)$$

где $W(\cdot, \lambda)$ — ограниченная миниверсальная деформация в форме (1.42). Из условия полурегулярности следует, что N_K вблизи нуля в $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{\hat{\mu}-1}$ устроено как подмногообразие размерности $\hat{\mu} - 1$ с $(\text{card } K)$ -гранным углом. Проекция $\pi : (x, \lambda) \mapsto x$, суженная на N_K , диффеоморфно отображает некоторую окрестность нуля в N_K на окрестность нуля в угле пространства $\mathbb{R}^{\hat{\mu}-1}$, заданном неравенствами

$$\gamma_{K,k}(\lambda) \geq 0 \quad \forall k \in K, \quad (1.46)$$

где $\gamma_{K,k}(\lambda)$ — выражение x_k через λ в силу системы уравнений (1.45). Если γ_K — столбец, составленный из компонент $\gamma_{K,k}$, а H_K — матрица, составленная из элементов

$$h_{i,j} = \frac{\partial^2 W}{\partial x_i \partial x_j}(0, 0), \quad i, j \in K,$$

то

$$\gamma_K = -H_K^{-1}b_K + o(b_K), \quad (1.47)$$

где b_K — столбец, составленный из компонент b_k , $k \in K$, вектора $b = \text{grad}_x W(0, \lambda)$. Соотношение (1.47) одновременно задает асимптотику бифурцирующих условно критических точек с носителем K .

Пусть

$$N = \bigcup_K N_K, \quad S = \bigcup_{K', K''} (N_{K'} \cap N_{K''}), \quad K' \neq K''.$$

Для полурегулярной угловой особенности росток множества $\pi(S)$ в нуле совпадает с Σ . С каждой парой семейств

$$L, K, \quad L \cap K = \emptyset, \quad L \cup K \subset \{1, \dots, n\},$$

связжем подмножество

$$S_{K;L} = \{(x, \lambda) \in N_K | \text{supp}(\text{grad}_x W(x, \lambda)) \subset \{1, \dots, n\} \setminus (K \cup L)\}.$$

Из определения S следует, что

$$S = \bigcup_{K;L} S_{K;L} \quad (L \cap K = \emptyset, \quad L \cup K \subset \{1, \dots, n\}, \quad L \neq \emptyset).$$

Аналогично имеем

$$\Sigma = \bigcup_{K;L} \Sigma_{K;L} \quad (L \cap K = \emptyset, \quad L \cup K \subset \{1, \dots, n\}, \quad L \neq \emptyset), \quad (1.48)$$

где $\Sigma_{K;L} = \text{cl}(\pi(S_{K;L}))$. Разложение (1.48) задает стратификацию каустики Σ . Из определения $\Sigma_{K;L}$ получаем

$$\Sigma_{K;L} = \bigcap_{l \in L} \Sigma_{K;l}. \quad (1.49)$$

Так как $\Sigma_{K;l}$ задается соотношениями

$$x_j = \frac{\partial W}{\partial x_k}(x, \lambda) = \frac{\partial W}{\partial x_l}(x, \lambda) = 0 \quad \forall k \in K, \quad \forall j \notin K, \quad x_k \geq 0;$$

(см. (1.48)), то для $K \neq \emptyset$ компонента $\Sigma_{K;l}$ задается соотношениями

$$\gamma_{K;l}(\lambda) = 0, \quad \gamma_{K;k}(\lambda) \geq 0 \quad \forall k \in K, \quad (1.50)$$

где $\gamma_{K;l}$ получено из $\frac{\partial W}{\partial x_l}(x, \lambda)$ подстановкой вместо x явного выражения x через λ , вытекающего из равенств (1.45).

Полезно отметить, что

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{K;l}(\lambda) &= b_l(\lambda) + \sum_k h_{l;k}^K \gamma_{K;k} + o(b), \\ \gamma_{K;k}(\lambda) &= - \sum_j \bar{h}_{k;j}^K b_j(\lambda) + o(b) \quad \forall k \in K, \end{aligned} \right\} \quad (1.51)$$

где $b_j(\lambda) = \frac{\partial W}{\partial x_j}(0, \lambda)$, $\bar{h}_{k;j}^K$ — элемент матрицы H_K^{-1} (см. (1.45)). В итоге получаем следующее утверждение [75], [77]:

Теорема 1.15. *Каустика полурегулярной угловой особенности (1.45) в нуле представима в виде (1.48) (см. (1.49)), где компонента $\Sigma_{K;j}$ задается соотношениями (1.50), в которых $\gamma_{K;l}$ и $\gamma_{K;k}$ представляются в форме (1.51). При этом асимптотика бифурцирующей регулярной условно критической точки с носителем K задается формулой (1.47).*

Замечание 1.10. *Для описания фазовых переходов в теории кристаллов представляет интерес асимптотика критического значения $b_K(\lambda)$ функции $W(\cdot, \lambda)$ в регулярной условно критической точке с носителем K :*

$$b_K(\lambda) = - \sum_{k,j} \bar{h}_{k;j}^K b_k(\lambda) b_j(\lambda) + o(|b|^2). \quad (1.52)$$

1.9.3 Малые размерности

Случай $n = 1$ для полурегулярных угловых особенностей тривиален. Многие фрагменты случая $n = 2$ исследованы в рамках прикладных задач [15], [22], [72]. Полное описание дано в [77]. Случай $n = 3$ был полностью исследован (для угловых точек минимума) А.В. Гнездиловым [25]. Случай угловой точки минимума (форма (Hx, x) положительна в $\mathcal{C}$) наиболее важен для приложений (бифуркации экстремалей из точек минимума часто называют мягкими).

При $n = 2$ мягкие бифуркации соответствуют ситуации, в которой $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$ и $h_{1,2} > -1$ (см. (1.41)). Положив в канонической деформации (1.42) $\lambda_3 = h_{1,2} + \lambda_{1,2}$, получим

$$W(x, \lambda) = x_1^2 + x_2^2 + 2\lambda_3 x_1 x_2 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad \lambda \in \mathbb{R}^3.$$

Каустика Σ в этом случае состоит из четырех компонент:

$$\Sigma_{\phi;1}, \quad \Sigma_{\phi;2}, \quad \Sigma_{2;1}, \quad \Sigma_{1;2}.$$

Так как $\gamma_{\phi;j} = \lambda_j$, $\gamma_{i;i} = -\frac{1}{2}\lambda_i$ и $\gamma_{i;j} = \lambda_j - \lambda_3\lambda_i$, то первые две компоненты задаются соотношениями

$$\lambda_1 = 0 \quad (\Sigma_{\phi;1}), \quad \lambda_2 = 0 \quad (\Sigma_{\phi;2}),$$

а третья и четвертая — соотношениями

$$\begin{aligned} \lambda_1 - \lambda_3\lambda_2 &= 0, \quad \lambda_2 \leq 0 \quad (\Sigma_{2;1}), \\ \lambda_2 - \lambda_3\lambda_1 &= 0, \quad \lambda_1 \leq 0 \quad (\Sigma_{1;2}). \end{aligned}$$

Пересечение всех компонент представляет собой прямую $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Третья и четвертая компоненты пересекаются по полупрямой $\lambda_3 = 1$, $\lambda_1 = \lambda_2 \leq 0$, и обе они содержат разные «половины» прямой $\lambda_3 = -1$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$. Первая с третьей и вторая с четвертой пересекаются по полупрямым $\lambda_1 = \lambda_3$, $\lambda_2 \leq 0$ и $\lambda_2 = \lambda_3$, $\lambda_1 \leq 0$. Каустика Σ расслаивается над стратом $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ (посредством ортогонального проецирования) с особыми слоями, содержащими точки с $\lambda_3 = -1, 0, 1$.

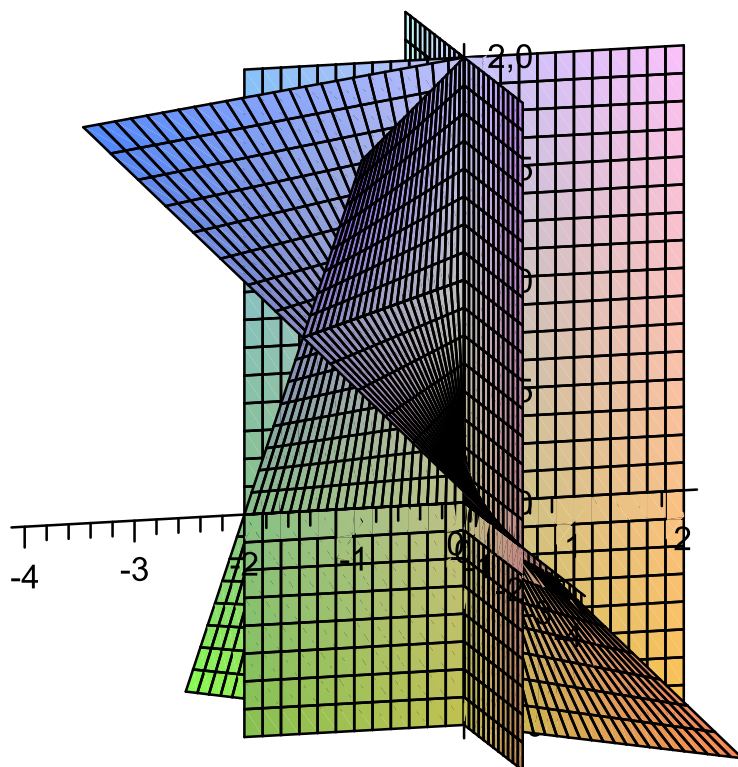


Рис. 20

Все вырожденные критические точки при $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 \neq 0$ и $|\lambda_3| \neq 1$ имеют тип краевой особенности B_2 [4]. Асимптотические формулы (1.47) для бифурцирующих условно критических точек здесь являются точными. Для координат критических точек второго порядка имеем

$$x_j = \theta_j(\lambda) = -\frac{\lambda_j - \lambda_3 \lambda_k}{2(1 - \lambda_3^2)}, \quad j \neq k.$$

Для соответствующих критических значений получаем (см. (1.52))

$$\beta_j = -\frac{1}{4}\lambda_j^2$$

(для точек первого порядка) и

$$\beta_{1,2}(\lambda) = -\frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - 2\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{4(1 - \lambda_3^2)}$$

(для точек второго порядка).

Топология линий уровня функции $W(x, \lambda)$ в $\{x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$ и функции $\hat{W}(x, \lambda)$ приведены в таблицах контуров в [77].

При $n = 3$ множество Σ состоит из двенадцати компонент

$$\Sigma_{\phi;k}, \quad \Sigma_{j;k}, \quad \Sigma_{i;j;k}, \quad (i \neq j \neq k \neq i).$$

Запишем развертку (1.42) в виде

$$W(x, \lambda, \alpha, \beta) = \sum_{j=1} 3x_j^2 + \sum_{i \neq j \neq k \neq i} \alpha_j x_i x_k + \beta x_1 x_2 x_3 + \sum_{j=1} 3\lambda_j x_j. \quad (1.53)$$

Мягкие бифуркации здесь делятся на шесть типов (по типу матрицы H [74]): положительные матрицы ($\text{ind } H = 0$), определяемые неравенствами

$$\det H > 0, \quad |\alpha_j| < 1; \quad (1.54)$$

матрицы индекса два, для которых

$$\det H > 0, \quad \alpha_1 > 1; \quad (1.55)$$

и четыре типа матриц индекса единица, каждый из которых определяется неравенством $\det H < 0$ и одной из следующих групп соотношений (с точностью до перестановки координат в $\mathbb{R}^3$):

$$\min\{\alpha_j\} > 1; \quad (1.56)$$

$$\min\{\alpha_1, \alpha_2\} > 1, \quad |\alpha_3| < 1; \quad (1.57)$$

$$\alpha_1 > 1, \quad \max\{|\alpha_2|, |\alpha_3|\} < 1; \quad (1.58)$$

$$\max\{|\alpha_1|\} < 1, \quad \alpha_1 > \alpha_2 \alpha_3. \quad (1.59)$$

Соотношения (1.54)–(1.59) характеризует тип квадрики $\{(Hx, x) = 0\}$ и ее расположение в $\mathbb{R}^3$ по отношению к $\mathcal{C}$.

Из (1.47), (1.51) получаем

$$\begin{aligned}
\gamma_{\phi;j} &= \lambda_j, \quad \gamma_{i;i} = -\frac{1}{2}\lambda_i, \quad \gamma_{i;j} = \lambda_j - \alpha_k\lambda_i \quad (i \neq j \neq k \neq i), \\
\gamma_{i,j;i} &= -\frac{\lambda_i - \alpha_k\lambda_j}{2(1 - \alpha_k^2)}, \quad \gamma_{i,j;j} = -\frac{\lambda_j - \alpha_k\lambda_i}{2(1 - \alpha_k^2)}, \\
\gamma_{i,j;k} &= \lambda_k + 2(\alpha_j\gamma_{i,j;i} + \alpha_i\gamma_{i,j;j}) = \\
&= \lambda_k + \frac{(\alpha_j\alpha_k - \alpha_i)\lambda_j + (\alpha_i\alpha_k - \alpha_j)\lambda_i}{(1 - \alpha_k^2)} + \\
&\quad + \frac{\beta(\lambda_i - \alpha_k\lambda_j)(\lambda_j - \alpha_k\lambda_i)}{4(1 - \alpha_k^2)^2}, \\
\gamma_{1,2,3;i} &= -\frac{(1 - \alpha_j^2)\lambda_j + (\alpha_j\alpha_i - \alpha_k)\lambda_i + (\alpha_j\alpha_k - \alpha_i)\lambda_k}{2(1 + 2\alpha_1\alpha_2\alpha_3 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2 - \alpha_3^2)} + o(|\lambda|^2).
\end{aligned}$$

Отсюда получаем асимптотические формулы для соответствующих критических значений получаем (см. (1.52)–(1.53))

$$\begin{aligned}
\beta_j &= -\frac{1}{4}\lambda_j^2 + o(|\lambda|^2), \\
\beta_{i,j} &= -\frac{(\lambda_i^2 + \lambda_j^2 - 2\alpha_k\lambda_i\lambda_j)}{4(1 - \alpha_k^2)} + o(|\lambda|^2) = \\
&\quad \beta_{1,2,3} = \\
&= -\frac{\left(\sum_{j=1}^n (1 - \alpha_j^2)\lambda_j^2 + \sum_{i \neq j \neq k \neq i} (\alpha_j\alpha_i - \alpha_k)\lambda_i\lambda_j\right)}{4(1 + 2\alpha_1\alpha_2\alpha_3 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2 - \alpha_3^2)} + o(|\lambda|^2).
\end{aligned}$$

Компоненты каустики задаются соотношениями

$$\begin{aligned}
\lambda_j &= 0 \quad (\Sigma_{\phi;1}), \\
\lambda_j - \alpha_k\lambda_i &= 0, \quad \lambda_i \leq 0 \quad (\Sigma_{i;j}), \\
\lambda_k + \frac{(\alpha_j\alpha_k - \alpha_i)\lambda_j + (\alpha_i\alpha_k - \alpha_j)\lambda_i}{(1 - \alpha_k^2)} + \\
&\quad + \frac{\beta(\lambda_i - \alpha_k\lambda_j)(\lambda_j - \alpha_k\lambda_i)}{4(1 - \alpha_k^2)^2} = 0, \\
\frac{\alpha_k\lambda_j - \lambda_i}{(1 - \alpha_k^2)} &\geq 0, \quad \gamma_{i,j;j} = \frac{\alpha_k\lambda_i - \lambda_j}{(1 - \alpha_k^2)} \geq 0 \quad (\Sigma_{i,j;k}).
\end{aligned}$$

Описание всех *bif*-раскладов и сепаратрисных поверхностей уровня (при рассматриваемом здесь подходе) не сложное, но требует большого количества вычислений. А.В. Гнездиловым был развит геометрический подход [25], позволивший ему дать полную классификацию всех *bif*-раскладов для мягких бифуркаций (при $n = 3$).

Рассмотрением сначала бифуркации условных минимумов.

Теорема 1.16. ([77]) *В случае (1.54) в малой окрестности нуля существует единственная точка условного минимума функции W при любых α, β и любом достаточно малом λ . При этом для любого носителя найдется сколь угодно малое λ , которому отвечает точка минимума с данным носителем.*

В случаях (1.55)–(1.56) допускается (локально) существование точек минимума лишь в начале координат и на ребрах конуса $\mathcal{C}$. Допускается также сосуществование двух или трех (но не более) точек минимума первого порядка (на ребрах).

В случае (1.57) не допускается (локально) существование точек минимума максимального порядка (то есть внутри $\mathcal{C}$), но допускается точка минимума с носителем $\{1, 2\}$ (на грани $x_3 = 0$). Более того, допускается сосуществование двух (но не более) точек минимума первого порядка, расположенных на первом и третьем или на втором и третьем ребрах, и сосуществование двух разнотипных точек минимума, расположенных на ребре $x_1 = x_2 = 0$ и грани $x_3 = 0$.

В случаях (1.58)–(1.59) порядок любой бифурцирующей точки локального минимума не превосходит двух. При этом допускается сосуществование двух (но не более) точек минимума второго порядка, расположенных на гранях $x_2 = 0$ и $x_3 = 0$. В случае (1.58) при $\alpha_1\alpha_3 < \alpha_2$ или при $\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0, \alpha_1\alpha_3 > \alpha_2$ и $\alpha_1\alpha_2 > \alpha_3$, а также в случае (1.59) при $\alpha_1\alpha_3 < \alpha_2$ допускается сосуществование разнотипных точек минимума, расположенных на ребре $x_1 = x_2 = 0$ и грани $x_3 = 0$.

Доказательство теоремы сводится к проверке разрешимости системы неравенств, определяющих области существования или сосуществования условно критических точек. Первое утверждение и второе в случае (1.55) могут быть также получены из широко известной теоремы об экстремумах выпуклой функции на выпуклом многограннике.

1.9.4 Теорема А.В. Гнездилова

В [75], [77] была описана общая структура бифуркационных диаграмм функций (*каустик*) Σ многомерных полурегулярных угловых особенностей и в ряде случаев были описаны распределения бифурцирующих невырожденных точек локального минимума по граням положительного координатного угла в $\mathbb{R}^m$. Полного описания раскладов бифурцирующих невырожденных экстремалей (*bif*-раскладов) при $m > 3$ до сих пор нет.

Бифуркационный расклад критических точек удобно изображать матрицей

$$\mathbf{M} = (l_i^j), \quad i, j = 0, 1, \dots, m-1,$$

в которой l_i^j — количество критических точек редуцированного индекса Морса i . Редуцированный индекс как индекс Морса критической точки после редукции на пространство $\mathbb{R}^m$.

В случае $m = 3$ полное описание раскладов дал А.В. Гнездилов [25]. Ниже будет приведена формулировка его теоремы.

Пусть функционал $V(x, \lambda)$ гладко зависит от параметра $\lambda \in \mathbb{R}^q$ и ему соответствует ключевая функция W , имеющая в соответствующих ключевых координатах имеет следующий вид:

$$const + \sum_{j=1}^3 \alpha_j(\delta) \rho_j + \sum_{j,k=1}^3 a_{jk} \rho_j \rho_k + o(\|\rho\|^2) + O(\delta) O(\|\rho\|^2), \quad (1.60)$$

$$\rho_j = r_j^2 = \xi_{2j-1}^2 + \xi_{2j}^2, \quad \rho = (\rho_1, \rho_2, \rho_3), \quad \delta = \lambda - \lambda_0, \quad \alpha_j(0) = 0.$$

Списки А.В. Гнездилова (для допустимых раскладов) зависят от индекса Морса ν в нуле формы $\sum_{j=1}^3 \alpha_j(\delta) r_j^2$ и от индекса Морса τ в (единственной) критической точке ограничения

$$\sum_{j,k=1}^3 a_{jk} \rho_j \rho_k \Big|_{\sum_{j=1}^3 \alpha_j(\delta) \rho_j + 1 = 0}.$$

Теорема 1.17. (А.В. Гнездилов). Пусть для ключевой функции (1.60) выполняются следующие три требования:

- 1) $rk\left(\frac{\partial \alpha_j}{\partial \lambda_i}\right) = 3$;
- 2) $\det(a_{jk}) \neq 0$, $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$, $a_{11} \neq 0$;
- 3) $\sum_{j,k=1}^3 a_{jk} \rho_j \rho_k > 0$ при $\rho_j \geq 0 \quad \forall j$ и $\|\rho\| > 0$.

Тогда при $\delta \notin \Sigma$ допускаются те и только те *bif*-расклады критических точек для V , которым соответствуют матрицы $\mathbf{M}$ из следующих списков: 1) в случае $\nu = 1, \tau = 0$ —

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

2) $\nu = 1, \tau = 1$ —

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

3) $\nu = 2, \tau = 0$ —

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

4) $\nu = 2, \tau = 1$ —

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

5) $\nu = 3, \tau = 0$ —

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

6) $\nu = 3, \tau = 1$ —

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\
& \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\
& \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
& \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
& \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
& \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};
\end{aligned}$$

7) $\nu = 3, \tau = 2$ —

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
& \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Доказательство. Пусть $\hat{W}$ — полином, полученный из W тейлоровским разложением по ξ до четвертого порядка. Из асимптотических формул для ветвей бифурцирующих экстремалей [77] следует, что локальная геометрия каустики (вблизи нуля) и структура *bif*-раскладов не изменяется при переходе от W к $\hat{W}$. Имеется взаимно однозначное соответствие между критическими орбитами $\hat{W}$ и критическими точками функции $\tilde{W} : \mathbb{R}_+^3 \times \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}$ (на координатном угле $\mathbb{R}_+^3$). Замена $|\alpha(\delta)|r_j^2 = \eta_j$ ($\eta_j \geq 0 \forall j$) сводит изучение рассматриваемых *bif*-раскладов к описанию допустимых раскладов критических точек функции $U(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = \sum_{j,k=1}^3 \tilde{a}_{jk} \eta_j \eta_k$ на следующих плоских областях в $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned}
& \{ \eta : \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 = 1, \quad \eta_j \geq 0 \forall j \}; \quad \{ \eta : \eta_1 + \eta_2 - \eta_3 = 1, \quad \eta_j \geq 0 \forall j \}; \\
& \{ \eta : \eta_1 + \eta_2 - \eta_3 = -1, \quad \eta_j \geq 0 \forall j \}.
\end{aligned}$$

Выразив η_3 через η_1 и η_2 (в силу уравнений плоскостей, несущих симплексы) и подставив эти выражения в U , получим задачу описания *bif*-раскладов многочленов второй степени на стандартных двумерных симплексах в $\mathbb{R}^2$. После приведения через аффинное преобразование координат многочлена второй степени к канонической форме $\hat{U}(\zeta_1, \zeta_2) = \text{const} \pm \zeta_1^2 \pm \zeta_2^2$ получим двойственную задачу описания *bif*-раскладов критических точек $\hat{U}$ на подвижных симплексах. Вследствие изначальной положительной определенности кватерничной части W на $\mathbb{R}^6$ функция $\hat{U}$ также является положительно определенной (после всех замен) на рассматриваемых подвижных симплексах. Описание *bif*-раскладов $\hat{U}$ на допустимых подвижных симплексах производится через описание *bif*-раскладов на соответствующих симплексах для квадратичных форм $U_0(\zeta_1, \zeta_2) = \zeta_1^2 + \zeta_2^2$, $U_1(\zeta_1, \zeta_2) = \zeta_1^2 - \zeta_2^2$, $U_2(\zeta_1, \zeta_2) = -\zeta_1^2 - \zeta_2^2$ (нижний индекс j в U_j совпадает со значением τ).

Допускаются лишь те симплексы, на которых область отрицательной определенности U_j ограничена.

На симплексах удобно использовать следующие правила: если линия уровня U_j касается ребра снаружи и ее градиент направлен внутрь, то в точке касания расположена точка минимума, если наружу — точка максимума, если линия уровня U_j касается ребра изнутри симплекса, то место касания — седловая точка; если линия уровня проходит через вершину симплекса, не пересекая угол, и градиент направлен внутрь, то в этой вершине находится точка минимума, если наружу — точка максимума, если линия уровня проходит через вершину симплекса, пересекая угол, то в данной вершине расположена седловая точка. Случай прохождения линии уровня через вершину и одновременной перпендикулярности градиента одной из сторон симплекса является вырожденным (параметр принадлежит каустике).

Исходя из указанных правил, а также геометрических свойств касания прямой с окружностями и гиперболами (линиями уровня U_0, U_2 и U_1 соответственно) можно построить характерные сечения каустики. В случае каждого сечения $\mathbb{R}^2$ будет разбиваться на области, каждой из которых соответствует свой *bif*-расклад. Перебирая связные компоненты дополнений к этим сечениям и пользуясь описанными выше правилами, легко перечислить все допустимые *bif*-расклады U_0, U_1, U_2 на всех допустимых

симплексах, что дает в итоге полное описание допустимых bif -раскладов для V в виде указанных в теореме списков матриц.

1.10 Стратифицированные множества

Дискриминантные множества Σ , каустики и другие бифуркационные множества не являются, как правило, гладкими подмногообразиями. Однако эти множества допускают представление в виде объединения гладких подмногообразий различных размерностей — *стратов*, «правильно примыкающих» друг к другу. Такое разбиение называется *стратификацией* множества Σ . Множество с фиксированной на нем стратификацией называется *стратифицированным множеством*. Теория таких множеств зародилась на стыке алгебраической геометрии и теории особенностей дифференцируемых отображений в конце 50-х — начале 60-х годов XX века в работах Х. Уитни, Р. Тома, Дж. Мазера, В.И. Арнольда и других [4], [24], [57], [69]. Введение стратификации дает возможность применения аппарата дифференциальной топологии при изучении сложных кусочно гладких множеств и их отображений.

Стратифицированные множества дают важнейший инструмент и для изучения «поведения» гладких отображений гладких многообразий [17], [18], [56], [57], [69]. Р. Том и Дж. Боардман предложили стратификацию области определения произвольного гладкого отображения, отражающую структуру вырождения отображения в особых точках [69]. Эта стратификация связана с некоторой естественной стратификацией пространства струй $J^r(n, m)$ гладких отображений $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Конструкция Р. Тома и Дж. Боардмана позволила поставить на твердую геометрическую основу такие понятия, как *отображение общего положения*, *коразмерность особенности*, *устойчивость особенности* и т.п.

Теория стратифицированных множеств и стратифицированных отображений (отображений, «сохраняющих» стратификацию) является основным техническим средством при изучении структурной устойчивости отображений.

В этом разделе кратко изложены основы теории стратифицированных множеств и рассмотрены примеры естественной стратификации. Для

получения более подробных сведений можно обратиться к монографиям [4], [60], [69] и статьям [56], [57].

В определениях стратифицированных множеств, используемых разными авторами, имеются расхождения, касающиеся главным образом формулировки правил взаимного примыкания стратов. Желание добиться некоторых технических преимуществ, при использовании теории стратификаций в приложениях, приводит иногда к излишне громоздким определениям. Более «удобные» (краткие) определения, появляющиеся в прикладных задачах, приводят к необходимости предварительного сравнительного исследования стратификаций (с целью создания технического задела для «работы» с ними).

В дальнейшем мы придерживаемся определений, близких к тем, которые приведены в [56], [57].

Определение 1.5. Пусть X — замкнутое подмножество в $\mathbb{R}^n$, представленное в виде объединения возрастающей по включению последовательности замкнутых подмножеств X_{k_j} :

$$X = \bigcup_j X_{k_j}, \quad k_1 < k_2 < \dots < k_m,$$

таким образом, что выполняются следующие условия:

- 1) $X_{k_j} \setminus X_{k_{j-1}}$ — дифференцируемое подмногообразие в $\mathbb{R}^n$ размерности k_j , $j = 1, 2, \dots, m$ (предполагается, что X_{k_0} — пустое множество; связные компоненты подмногообразия $X_{k_j} \setminus X_{k_{j-1}}$ называются стратами; предполагается также, что число стратов конечно);
- 2) граница $\partial s = cl(s) \setminus s$ каждого страта s является объединением стратов меньшей размерности;
- 3) любое гладкое отображение $f : \mathcal{D}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ($\mathcal{D}^m$ — m -мерный диск), трансверсальное страту s , трансверсально и любому страту σ из его звезды $st(s)$ (см. следующее определение).

Тогда говорят, что на X введена стратификация Мазера. Если условие 3) отбросить, то полученное разбиение называется предстратификацией.

Определение 1.6. Пусть X — предстратифицированное множество. Говорят, что страт s' примыкает к страту s'' (обозначается

$s' \prec s''$) в заданной предстратификации X , если $s' \subset \partial s''$. Совокупность всех стратов, к которым примыкает страт s (в фиксированной предстратификации), называется звездой страта s и обозначается $st(s)$.

Определение 1.7. Пусть X — предстратифицированное множество. Говорят, что страт s' примыкает к страту s'' в точке $a \in s'$ регулярно по Уитни, если $s' \prec s''$ и выполняются следующие условия A и B Уитни:

(A) угол между касательными пространствами $T_b(s'')$ и $T_a(s')$ стремится к нулю при $b \rightarrow a$, $b \in s''$;

(B) угол между вектором $\overline{a_k, b_k}$ и плоскостью $T_{b_k}(s'')$ стремится к нулю при $a_k \rightarrow a$, $b_k \rightarrow a$, $a_k \in s'$, $b_k \in s''$.

Известно, что условие A следует из B [57].

Определение 1.8. Пусть X — предстратифицированное множество, в котором выполняется условие регулярного примыкания в каждой точке $a \in s''$ для любой пары примыкающих стратов s' , s'' ($s' \prec s''$). Тогда заданная предстратификация называется стратификацией Уитни.

1.11 Алгебраические множества

Классический пример стратифицированного множества — алгебраическое множество [16], [57], [60].

Определение 1.9. Пусть M — подмножество в $\mathbb{R}^n$, представляющее собой множество решений некоторой системы полиномиальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} f_1(x_1, \dots, x_n) &= 0, \\ f_2(x_1, \dots, x_n) &= 0, \\ \dots &\dots \dots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.61)$$

Тогда M называется алгебраическим множеством.

Легко увидеть, что объединение двух алгебраических множеств также является алгебраическим множеством. Если алгебраическое множество M не допускает представление в виде объединения пары различных

(непустых) алгебраических множеств (неприводимое множество), то M называется *алгебраическим многообразием*. Множество M является алгебраическим многообразием тогда и только тогда, когда порожденный им идеал

$$I(M) = \{g \in \mathbb{R}[x] \mid g(a) = 0 \quad \forall a \in M\}$$

является простым в кольце многочленов $\mathbb{R}[x]$, $x = (x_1, \dots, x_n)^\top$ [16].

В дальнейшем будем предполагать, что полиномы, входящие в левую часть системы уравнений (1.61), являются алгебраическим базисом соответствующего идеала $I(M)$.

Определение 1.10. Пусть M — алгебраическое множество в $\mathbb{R}^n$, заданное системой полиномиальных уравнений (1.61), образующей базис в $I(M)$. Точка $a \in M$ называется *регулярной* (простой), если ранг матрицы Якоби $\frac{\partial f}{\partial x}(a)$ в этой точке ($f = (f_1(x), \dots, f_m(x_m))^\top$) принимает свое максимальное на M значение r . Все остальные точки называются *особыми* или *сингулярными*. Число $n - r$ называется *размерностью* алгебраического множества M и обозначается $\dim(M)$.

Данное определение регулярных и сингулярных точек корректно (не зависит от выбора базиса в $I(V)$). Это вытекает из того, что каждые два базиса алгебраически выражаются друг через друга (данное обстоятельство приводит к линейной эквивалентности соответствующих систем градиентов в произвольной точке a).

Теорема 1.18. Пусть M — алгебраическое множество в $\mathbb{R}^n$, заданное системой полиномиальных уравнений (1.61), образующей базис $I(M)$. Тогда множество $\Sigma(M)$ всех особых точек M образует алгебраическое подмножество в M (возможно пустое).

Доказательство вытекает из следующего замечания: точка $a \in M$ является сингулярной тогда и только тогда, когда в этой точке равны нулю все миноры (максимального) порядка r матрицы Якоби $\frac{\partial f}{\partial x}$, образованной полиномами из левой части системы уравнений (1.61).

Замечание 1.11. Если N — собственное алгебраическое подмножество алгебраического многообразия M , то $\dim(N) < \dim(M)$.

Теорема 1.19. (Уитни) Множество $M \setminus \Sigma(M)$ всех регулярных точек алгебраического подмножества $M \subset \mathbb{R}^n$ является гладким подмногообразием (непустым) в $\mathbb{R}^n$ размерности $n - r$ (r — максимальный ранг матрицы Якоби левой части системы уравнений (1.61)).

Хаслер Уитни также доказал, что $M \setminus \Sigma(M)$ состоит из конечного числа связных компонент. Более того, он установил, что для произвольного собственного алгебраического подмножества N алгебраического множества M дополнение $M \setminus N$ также состоит из конечного числа связных компонент (см. дополнение А в [60], посвященное доказательству теоремы Уитни о конечности алгебраических множеств).

Замечание 1.12. Из теоремы Уитни вытекает очевидная предстратификация алгебраического множества M , основанная на рассмотрении серии вложений

$$M \supset \Sigma(M) \supset \Sigma(\Sigma(M)) \supset \dots$$

Данная предстратификация является стратификацией (выполняется условие регулярного примыкания стратов) [69].

1.12 Изолированные особые точки алгебраических множеств

Алгебраическое множество $M \subset \mathbb{R}^n$ в малой окрестности каждой своей регулярной точки устроено весьма просто: достаточно малые окрестности диффеоморфны открытым подмножествам линейного пространства $\mathbb{R}^m$, $m = \dim M$. Этот факт допускает следующее уточнение [60]: для любой регулярной точки $a \in M$ пара $(\mathcal{U}, \partial\mathcal{U})$, где

$$\mathcal{U} = M \cap T_\varepsilon^n(a), \quad T_\varepsilon^n(a) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| \leq \varepsilon\}$$

(пересечение с шаром радиуса ε в точке a), является парой подмногообразий в $\mathbb{R}^n$, диффеоморфной паре $T_\varepsilon^m(0), \partial T_\varepsilon^m(0)$. Оказывается, что это утверждение «почти переносится» на изолированные особые точки.

Теорема 1.20. (Милнор) Пусть a — изолированная особая точка алгебраического множества $M \subset \mathbb{R}^n$. Тогда при всех достаточно

малых ε пересечение $\mathcal{U} = M \cap T_\varepsilon^n(a)$ гомеоморфно конусу над $K = M \cap \partial T_\varepsilon^n(a)$. Более того, пара $(T_\varepsilon^n(a), M \cap \partial T_\varepsilon^n(a))$ гомеоморфна паре конусов над парой многообразий $(\partial T_\varepsilon^n(a), K)$.

Доказательство этой теоремы вытекает из формулируемых ниже утверждений [60].

Лемма 1.2. Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$ — алгебраическое множество размерности $n - r$ и пусть $\Sigma_0(M) = M \setminus \Sigma(M)$ (множество регулярных точек). Тогда для любого полинома $g \in \mathbb{R}[x]$ множество критических точек его сужения $g|_{\Sigma_0(M)}$ равно пересечению $\Sigma_0(M)$ с алгебраическим множеством N , состоящим из точек $x \in M$, в которых

$$rk \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_1} \end{pmatrix} < r,$$

где $f_1, \dots, f_n$ — базис (любой) идеала $I(M)$.

Доказательство выводится из соответствующих свойств отображения, полученного из заданного отображения редукцией по размерности.

Лемма 1.3. Сужение $g|_{\Sigma_0(M)}$ полиномиальной функции g может принимать лишь конечное число критических значений (если множество критических значений не пусто).

Доказательство леммы вытекает из того, что множество критических точек функции $g|_{\Sigma_0(M)}$ представимо в виде разности алгебраических множеств и, следовательно, представимо в виде конечного объединения гладких подмногообразий (теорема Уитни). Если L — одно из этих подмногообразий, то, по построению, $\text{grad } g(a) = 0 \quad \forall a \in L$. Следовательно, значение g на L постоянно. Так как семейство таких подмногообразий конечно, то и множество критических значений $g|_{\Sigma_0(M)}$ конечно.

Лемма 1.4. Каждая достаточно малая сфера $S_\varepsilon(a)$ в $\mathbb{R}^n$ с центром в произвольной изолированной точке $a \in \Sigma(M)$ пересекается с M по гладкому подмногообразию (возможно, пустому).

Доказательство леммы: положив $g(x) = |x - a|^2$ и взяв любое значение c , меньшее минимального критического значения этой функции на $\Sigma_0(M)$, получим гладкое подмногообразие $M \cap \{g = c\}$.

Доказательство теоремы (1.20.) легко получить, если рассмотреть поле касательных векторов к $\Sigma_0(M)$ (локально заданное), являющихся градиентами функции $g|_{\Sigma_0(M)}$, где $g(x) = |x - a|^2$, и порожденный этим векторным полем поток (оператор сдвига вдоль интегральных кривых данного векторного поля).

В [60] сформулировано следующее утверждение, известное под названием *лемма об отборе кривых*.

Теорема 1.21. (Лемма Милнора) Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$ — алгебраическое множество и пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое подмножество, заданное конечным набором полиномиальных неравенств:

$$U = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_1(x) > 0, \dots, g_l(x) > 0\}.$$

Если подмножество $M \cap U$ содержит точки, сколь угодно близкие к началу координат, то существует аналитическая кривая $\alpha(t)$ в $\mathbb{R}^n$, такая, что $\alpha(0) = 0$ и $\alpha(t) \in M \cap U \quad \forall t > 0$.

Лемма Милнора является мощным инструментом изучения ветвей бифурцирующих решений и их асимптотических представлений.

1.13 Топологическая степень отображения. Истоки понятия степени

Как известно, в анализе нелинейных уравнений выделяются следующие три основных этапа: 1) *анализ разрешимости* уравнения, 2) *анализ структуры множества решений* и 3) *анализ точных или приближенных представлений решений*.

Основной инструмент в анализе разрешимости — теория топологической степени отображения [51], [66].

Различные подходы к определению степени основаны на разных топологических идеях (комбинаторное, гомологическое, гомотопическое,

аналитическое и другие определения). Ниже использован «гладкий» подход (основанный на теории гладких многообразий и их отображений).

Своеобразие предлагаемой здесь версии состоит в том, что в ней применяется идея одномерной редукции (сведение к отображению регулярных ориентированных кривых). Эта идея играет центральную роль при переносе теории степени на бесконечномерный случай (редукции Каччиополи и Смейла в теории фредгольмовых отображений [12] являются её прямыми аналогами).

Изложение теории топологической степени начнем со случая линейных уравнений, на котором проиллюстрируем указанные выше три этапа исследования уравнений.

Пусть над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$ задана система линейных уравнений

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

или, в матричном виде, уравнение

$$Ax = b, \tag{1.62}$$

$$A = (a_{ij}), \quad x = (x_1, \dots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n, \quad b = (b_1, \dots, b_m)^\top \in \mathbb{R}^m.$$

Проверка разрешимости уравнения (1.62) (первый этап) осуществляется через широко известный критерий Кронекера – Капелли:

$$rk(A|b) = rk A. \tag{1.63}$$

Если (1.63) выполняется, то можно заранее утверждать (не вычисляя решений), что множество всех решений (1.62) является $(n - r)$ -мерным аффинным подпространством в $\mathbb{R}^n$, $r = rk A$. Этим полностью решается вопрос о структуре множества решений (второй этап). И, наконец, любое решение (1.62) можно представить в виде так называемого общего решения

$$u = u_0 + \sum_{j=1}^{n-r} \xi_j e_j, \tag{1.64}$$

где u_0 — любое частное решение (1.62), а $\{e_1, \dots, e_n\}$ — базис в подпространстве $\{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\}$ (фундаментальное множество решений однородного уравнения $Ax = 0$). Для построения $u_0, e_1, \dots, e_n$ имеются специальные вычислительные процедуры (третий этап).

Другой широко известный пример — теорема Гаусса (основная теорема алгебры) с её следствиями и теория Абеля – Галуа. Теорема Гаусса утверждает, что любое полиномиальное уравнение

$$f(z) = 0, \quad z \in \mathbf{C}, \quad (1.65)$$

$$f(z) = \sum_{j=0}^n a_j z^j, \quad a_j \in \mathbf{C} \quad \forall j, \quad a_n \neq 0,$$

при $n > 0$ разрешимо над полем комплексных чисел $\mathbf{C}$. Из этой теоремы следует, что уравнение (1.65) имеет, с учетом кратности, ровно n решений ($n = \deg f$).

Теорией Абеля – Галуа решается вопрос о представимости решения через радикалы. В современной вычислительной математике разработано большое количество алгоритмов приближенного представления решений (1.65).

Часто уравнение (1.65) приходится рассматривать не на всей комплексной плоскости, а на некоторой области $U \subset \mathbf{C}$. Пусть эта область задана как множество точек, ограниченное регулярной замкнутой кривой γ . Если γ не содержит нулей полинома f , то есть выполняется граничное условие

$$f(z) \neq 0, \quad z \in \partial U,$$

то количество решений (1.65) в U (с учетом кратности) определяется логарифмическим вычетом

$$\deg(f, U) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz, \quad (1.66)$$

который естественно назвать *степенью* многочлена f относительно области U .

Область с регулярной границей будем называть *регулярной*. Степень $\deg(f, U)$ обладает следующими важными свойствами:

1) *свойство аддитивной зависимости степени от области*

$$\deg(f, U) = \deg(f, U_1) + \deg(f, U_2),$$

если

$$U = U_1 \cup U_2 \quad \text{и} \quad U_1 \cap U_2 \cap f^{-1}(0) = \emptyset$$

(U, U_1, U_2 — регулярные области);

2) *свойство гомотопической инвариантности степени*

$$\deg(f, U) = \deg(g, U),$$

если полином f можно деформировать в полином g непрерывным изменением коэффициентов с условием, что при этом не появляются нули на границе U (при деформации не требуется сохранение «обычной» степени; то есть, вообще говоря, $\deg(f, \mathbf{C}) \neq \deg(g, \mathbf{C})$).

Важность этих свойств заключена в том, что они вместе с условием 3) (*условие нормировки*)

$$\deg(id, T) = 1, \quad T = \{z \in \mathbf{C} : |z| \leq 1\}, \quad id(z) \equiv z$$

однозначно определяют степень: всякая функция $\mathbf{C}[z] \rightarrow \mathbf{C}$, для которой выполняются свойства 1)–3), совпадает с $\deg(f, U)$.

Такие же построения можно провести и в классе голоморфных функций. Естественно возникает мысль о построении аналогичного «топологического счетчика» решений для непрерывных отображений $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Это действительно можно сделать, и не только для отображений плоскости, но и для отображений многомерных пространств и многообразий.

Предварительно рассмотрим более подробно случай одномерных многообразий.

1.14 Одномерные отображения

Для гладкой функции $y = f(x)$, рассматриваемой как отображение $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, имеется естественный *индикатор* нулей на произвольном отрезке $U = [\alpha, \beta]$, задаваемый формулой:

$$\deg(f, U) := \frac{1}{2}(\operatorname{sgn} f(\beta) - \operatorname{sgn} f(\alpha)),$$

при $f(\alpha) \cdot f(\beta) \neq 0$. Если область U равна объединению непересекающихся отрезков: $U = \bigcup_{j=1}^m U_j$, $U_j = [\alpha_j, \beta_j]$ (такие области будем называть *регулярными*) и выполняется условие $f(\alpha_j) \cdot f(\beta_j) \neq 0 \quad \forall j$, то положим

$$\deg(f, U) := \sum_{j=1}^m \deg(f, U_j).$$

В этом определении гладкость не используется, и поэтому оно применимо для непрерывных функций.

Свойства 1)–3) проверяются очевидным образом. Если гладкая функция f имеет в U ровно r нулей $\{a_1, \dots, a_r\}$ и все нули регулярны ($\frac{df}{dx}(a_j) \neq 0 \quad \forall j$), то, как нетрудно увидеть, имеет место соотношение (формула Кронекера)

$$\deg(f, U) = \sum_{j=1}^m \operatorname{sgn} \frac{df}{dx}(a_j).$$

Эта формула даёт основу для многомерного обобщения.

Пусть далее M — одномерное гладкое ориентированное компактное многообразие, а $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ — гладкое отображение, не имеющее нулей на ∂M . Положим

$$\deg(f, M) := \sum_k \deg(f, M_k),$$

где M_k — компонента связности M . При этом полагаем

$$\deg(f, M_k) = 0,$$

если $\partial M_k = \emptyset$ и

$$\deg(f, M_k) = \frac{1}{2}(\operatorname{sgn} f(b_k) - \operatorname{sgn} f(a_k)),$$

если $\partial M_k = \{a_k, b_k\}$ (порядок перечисления точек края соответствует ориентации многообразия M).

В этом случае также имеет место формула Кронекера

$$\deg(f, M) = \sum_{j=1}^m s(f, a_j),$$

в которой $s(f, a_j) := \operatorname{sgn} \frac{d\tilde{f}_j}{dt}(0)$, $\tilde{f}_j(t) = f(\varphi_j(t))$, $\varphi_j(t)$ — произвольная положительная параметризация M в окрестности нуля a_j , $\varphi_j(0) = a_j$ (все нули предполагаются регулярными: $\frac{d\tilde{f}_j}{dt}(0) \neq 0 \quad \forall j$).

Замечание 1.13. Вместо $\frac{d\tilde{f}}{dt}(a)$ ниже используется более краткая запись $\frac{df}{dl}(a)$. Под l подразумевается натуральный параметр, «отсчитываемый» со знаком плюс в положительном направлении и со знаком минус — в отрицательном.

Замечание 1.14. Одномерные гладкие многообразия чаще всего появляются в виде так называемых гладких регулярных кривых, принадлежащих многомерным пространствам. При их задании обычно используются следующие две основные формы:

1) параметрическая кривая

$$x = x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T, \quad t \in U \subset \mathbb{R}, \quad \frac{dx}{dt}(t) \neq 0 \quad \forall t;$$

2) кривая, заданная гладким уравнением

$$g(x) = 0, \quad x \in \mathcal{O},$$

где $\mathcal{O}$ — замкнутая область в $\mathbb{R}^n$ (замыкание открытого множества с гладкой границей), g — гладкое отображение $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n-1}$, удовлетворяющее условиям

$$rk \frac{\partial g}{\partial x}(x) = n - 1 \quad \forall x \in \mathcal{O}$$

и

$$\tau \notin T_a(\partial\mathcal{O}) \quad a \in \partial\mathcal{O} \cap g^{-1}(0),$$

τ — касательный вектор к рассматриваемой кривой (в точке a), $T_a(\partial\mathcal{O})$ — подпространство касательных к границе области векторов в точке a .

При использовании уравнения $g(x) = 0$ на кривой определяется индуцированная ориентация: касательный вектор τ в произвольной точке a кривой объявляется положительным, если положителен определитель матрицы Якоби отображения g в точке a , расширенной строкой координат вектора τ (τ записан в последней строке).

Замечание 1.15. Нетрудно проверить, что для определенной таким образом степени отображения одномерного многообразия в числовую ось также выполняются основные свойства 1)–3).

1.15 Отображения n -мерных пространств

Пусть $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ — гладкое отображение, U — ограниченная гладкая область в $\mathbb{R}^n$, для которой выполняется граничное условие

$$f(x) \neq 0, \quad x \in \partial U. \quad (1.67)$$

Теорема 1.22. Если начало координат — регулярное значение f на U (ранг матрицы Якоби отображения f в любой точке $a \in f^{-1}(0) \cap U$ максимален), то множество нулей f на U конечно или пусто.

Доказательство. Если a — регулярный нуль f , то f диффеоморфно отображает некоторую окрестность точки a на некоторую окрестность начала координат. Следовательно, ни один из нулей не может быть предельной точкой для остальных нулей. Так как область U компактна, то из этого вытекает, что множество нулей f в U может быть лишь конечным (в случае его непустоты).

Замечание 1.16. Регулярные значения f на U образуют открытое и плотное подмножество в $\mathbb{R}^n$. Это утверждение является прямым следствием теоремы Сарда [4].

Определение 1.11. Пусть точка b является регулярным значением f на U . Тогда целое число

$$\deg(f, U, b) := \sum_{a \in f^{-1}(b)} \operatorname{sgn} \det \frac{\partial f}{\partial x}(a)$$

называется локальной степенью отображения f на U относительно b .

Теорема 1.23. Пусть b, c — пара регулярных значений f на U и пусть эти точки принадлежат одной компоненте связности множества $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial U)$. Тогда

$$\deg(f, U, b) = \deg(f, U, c).$$

Доказательство. Так как множество регулярных значений открыто, то эти точки можно соединить ломаной кривой, принадлежащей компоненте связности множества $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial U)$ с условием, что смежные вершины находятся в открытом выпуклом подмножестве данной компоненты связности.

Следовательно, достаточно рассмотреть лишь случай, в котором пара a, c принадлежит открытому выпуклому подмножеству в $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial U)$. Причем, без ущерба для общности, можно считать, что точка c совпадает с началом координат, а точка a расположена на последней координатной

оси. Пусть $a = (0, \dots, 0, 1)^\top$. Можно также считать, что последняя координатная ось трансверсальна к g . Последнее означает, что начало координат в $\mathbb{R}^{n-1}$ является регулярным значением отображений $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ и $g|_{\partial U}$, где g получено отбрасыванием последней компоненты отображения f . Выполнения условия регулярности можно добиться малым возмущением отображения f (в силу теоремы Сарда). Достаточно малые возмущения не устроят регулярность значений a, c и не изменят локальные степени относительно этих точек.

На кривой $l = g^{-1}(0) \cap U$ зададим индуцированную ориентацию. Последняя компонента f_n отображения f задаёт отображение $l \longrightarrow \mathbb{R}$, для которого определена степень.

Доказательство теоремы теперь сводится к проверке следующего утверждения.

Лемма 1.5. (одномерная редукция) *Имеет место равенство*

$$\deg(f, U, d) = \deg(f_n, l) \quad \forall d \in [0, a],$$

где $[0, a]$ — прямолинейный отрезок, соединяющий 0 и a .

Доказательство леммы. Так как отрезок $[0, a]$ состоит из регулярных значений f (в силу предположения о принадлежности пары a, c выпуклому множеству регулярных значений в $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial U)$), то гомотопия $f_n(x, t) := f_n(x) - t$, $t \in [0, 1]$, протекает без нулей на ∂l . Следовательно,

$$\deg(f_n(\cdot, t), l) = \text{const.}$$

С другой стороны, справедливо равенство

$$\deg(f, U, d) = \deg(f_n(\cdot, t), l), \quad d = (0, \dots, 0, t)^\top.$$

Оно вытекает из очевидного соотношения

$$f^{-1}(d) = f_n^{-1}(t) \cap g^{-1}(0),$$

означающего совпадение множеств решений уравнений

$$f(x) = d, \quad x \in U,$$

$$f_n(x) = t, \quad x \in l,$$

и равенства

$$\operatorname{sgn} \det \frac{\partial f}{\partial x}(u) = \operatorname{sgn} \frac{df_n}{dl}(u) \quad \forall u \in l. \quad (1.68)$$

Последнее равенство легко проверяется после замены $x = Ry$, $\det R > 0$, переводящей касательный вектор к $\tilde{l} = Rl$ в точке $v = R^{-1}u$ в вектор, параллельный последней координатной оси, после чего матрица Якоби отображения $\tilde{f}(y) := f(Ry)$ приобретает следующий вид:

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial \bar{y}}(v) & \bar{0} \\ \frac{\partial \tilde{f}_n}{\partial \bar{y}}(v) & \frac{d\tilde{f}_n}{dy_n}(v) \end{pmatrix},$$

$$\bar{y} = (y_1, \dots, y_{n-1})^\top, \quad \det \frac{\partial \tilde{g}}{\partial \bar{y}}(v) > 0$$

(см. определение индуцированной ориентации во втором замечании предыдущего раздела).

Таким образом, в новых переменных имеем очевидное равенство

$$\operatorname{sgn} \det \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(v) = \operatorname{sgn} \frac{d\tilde{f}_n}{dy_n}(v),$$

из которого вытекает (1.68).

Следствие 1.1 Пусть $d = \inf_{x \in \partial U} \|f(x)\|$. Тогда для любой пары регулярных значений b, c , удаленных от начала координат не более, чем на d , имеет место равенство

$$\deg(f, U, b) = \deg(f, U, c).$$

Последнее утверждение позволяет теперь дать определение степени в общем случае.

Определение 1.12. (основное) Степенью гладкого отображения $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ на гладкой ограниченной области U при краевом условии (1.67) называется локальная степень f относительно любого регулярного значения b , достаточно близкого к началу координат:

$$\deg(f, U) := \deg(f, U, b) \left(:= \sum_{a \in f^{-1}(b)} \operatorname{sgn} \det \frac{\partial f}{\partial x}(a) \right).$$

Замечание 1.17. Данное определение легко распространяется на случаи негладких областей и негладких непрерывных отображений посредством сглаживания границ областей и отображений. Сглаживания можно делать в силу известной теоремы Вейерштрасса о равномерной аппроксимации непрерывной функции полиномами (на любом компакте).

Замечание 1.18. Для введенной в (1.12.) степени также выполняются основные свойства:

1) аддитивная зависимость степени от области

$$\deg(f, U) = \deg(f, U_1) + \deg(f, U_2),$$

если $U = U_1 \cup U_2$ и $U = U_1 \cap U_2 \cap f^{-1}(0) = \emptyset$,

2) гомотопическая инвариантность степени

$$\deg(f, U) = \deg(g, U),$$

если f и g можно соединить непрерывной гомотопией на U , то есть включить в непрерывное семейство гладких отображений

$$h_t : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad t \in [0, 1], \quad h_0 = f, \quad h_1 = g,$$

без нулей на границе: $h_t(x) \neq 0 \quad \forall x \in \partial U$,

3) условие нормировки

$$\deg(id, T) = 1,$$

где $T = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$, $id(x) \equiv x$.

1.16 Отображения n -мерных многообразий

Пусть M, N — гладкие ориентированные n -мерные многообразия и $f : M \longrightarrow N$ — гладкое собственное отображение (собственность означает, что прообраз любого компакта компактен). Из теоремы Сарда следует, что множество $\mathcal{S}$ особых значений f замкнуто и нигде не плотно в N . Нетрудно установить (см. теорему 1.22.), что прообраз любого регулярного значения b конечен. Следовательно, можно определить локальную степень

$$\deg(f, b) := \sum_{a \in f^{-1}(b)} s(f, a).$$

Символ $s(f, a)$ обозначает знак точки:

$$s(f, a) := \operatorname{sgn} \det \frac{\partial}{\partial x} (\psi f \varphi^{-1})(0),$$

φ, ψ — положительные (относительно заданных ориентаций на M и N) локальные диффеоморфизмы в точках a и $f(a)$, $\varphi(a) = \psi(f(a)) = 0$.

Основная теорема переносится и на случай многообразий.

Теорема 1.24. Пусть b, c — пара регулярных значений f и пусть эти точки принадлежат одной компоненте связности множества

$$N \setminus (f(\partial M) \cup \partial N).$$

Тогда

$$\deg(f, b) = \deg(f, c).$$

Доказательство теоремы сводится к рассмотрению случая близко расположенных точек b, c (принадлежащих общей координатной окрестности). Следовательно, можно положить $N = \mathbb{R}^n$. Но в этом случае доказательство почти дословно повторяет доказательство теоремы 1.23.

Замечание 1.19. Для случая отображений многообразий также выполняются основные свойства степени.

1.17 Индексы зацеплений гладких циклов

Если M, N — гладкие с пустыми краями ориентированные подмногообразия в $\mathbb{R}^n$, для которых

$$M \cap N = \emptyset, \quad \dim M + \dim N = n - 1,$$

то определяется индекс зацепления M и N через степень отображения

$$f : M \times N \longrightarrow S^{n-1},$$

где

$$f(x, y) := \frac{x - y}{\|x - y\|}, \quad x \in M, \quad y \in N,$$

$$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}.$$

Гладкие регулярные циклы в определении индекса зацепления можно заменить на сингулярные отображения $\varphi : M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ и $\psi : N \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $\varphi(M) \cap \psi(N) = \emptyset$, положив (при определении индекса зацепления)

$$f(x, y) = \frac{\varphi(x) - \psi(y)}{\|\varphi(x) - \psi(y)\|}, \quad x \in M, \quad y \in N.$$

Глава 2

Метод фредгольмова функционала

В данной главе приведены формулировки основных определений и утверждений из бесконечномерной топологии и теории фредгольмовых уравнений, используемых в книге (более подробные сведения можно найти в [12], [32], [40], [51], [52], [53], [66], [67]).

2.1 Общие сведения о фредгольмовых уравнениях

Широко известно, что многие нелинейные краевые задачи математической физики допускают трактовку в виде фредгольмова операторного уравнения

$$f(x) = b, \quad x \in E, \quad b \in F,$$

в котором f — гладкое фредгольмово отображение банахова пространства E в банахово пространство F [9], [12], [51]. Решение такого уравнения часто можно осуществить переходом (редукцией) к конечномерному уравнению

$$\theta(\xi) = \beta, \quad \xi, \beta \in \mathbb{R}^n.$$

Определение 2.1. Пусть E, F — банаховы пространства и $A : E \rightarrow F$ — линейный непрерывный оператор. Оператор A называется фредгольмовым, если

$$\dim(\text{Ker} A) < \infty, \quad \dim(\text{Coker} A) (:= \dim(F/\text{Im} A)) < \infty.$$

Число $\dim(\text{Ker} A) - \dim(\text{Coker} A)$ называется индексом фредгольмова оператора A и обозначается $\text{ind } A$.

Из определения следует, что образ $A(E)$ замкнут в F , и A изоморфно отображает любое подпространство, дополняющее $\text{Ker } A$ (в E), на $\text{Im } A$.

Если $L_1 : E_1 \rightarrow E_2$, $L_2 : E_2 \rightarrow E_3$ — фредгольмовы операторы, то и оператор $L_2 L_1$ фредгольмов. При этом

$$\text{ind}(L_2 L_1) = \text{ind}(L_1) + \text{ind}(L_2).$$

Определение 2.2. *Нелинейное отображение $f : \mathcal{U} \rightarrow F$, где $\mathcal{U}$ — открытое подмножество в E , называется фредгольмовым, если его производная Фреше $\frac{\partial f}{\partial x}(x)$ является фредгольмовым оператором в каждой точке $x \in \mathcal{U}$.*

Индексом нелинейного фредгольмова отображения f , определенного на связной области, называется индекс линейного оператора $\frac{\partial f}{\partial x}(x)$:

$$\text{ind } f := \text{ind } \frac{\partial f}{\partial x}(x)$$

(если область связная, то индекс $\frac{\partial f}{\partial x}(x)$ не зависит от x).

В дальнейшем будем считать, что $f : \mathcal{U} \rightarrow F$, где $\mathcal{U}$ — область банахова пространства E (E, F — банаховы пространства), является нелинейным фредгольмовым отображением нулевого индекса, и наряду с этим выполнены условия:

- а) $E \subset F \subset H$ — тройка непрерывно вложенных пространств (H — гильбертово пространство).
- б) E плотно в H (это означает, что любой элемент из H может быть представлен как предел последовательности из E). Кроме того, из плотности E в H , следует, что F тоже плотно в H .

Уравнение

$$f(x) = 0 \quad , \quad x \in \mathcal{U}, \tag{2.1}$$

называется (нелинейным) фредгольмовым уравнением.

2.2 Фредгольмов функционал

Здесь приведены формулировки основных определений и утверждений теории вариационных фредгольмовых уравнений (более подробные

сведения по теории гладких конечномерных и бесконечномерных вариационных задач можно найти в [9], [14], [32], [53], [59], [62], [69], [71], [72], [73], [84]).

Определение 2.3. Если для гладкого отображения $f : \mathcal{U} \subset E \rightarrow F$ существует такой гладкий функционал $V : \mathcal{U} \rightarrow R$, что $f = \text{grad}_H V$ или, что эквивалентно,

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x)h = \left\langle f(x), h \right\rangle_H, \quad \forall x \in \mathcal{U}, \quad h \in E,$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в гильбертовом пространстве H , то отображение f называется потенциальным (предполагается, что E непрерывно вложено в F , F непрерывно вложено в H и E плотно в H). Функционал V называется потенциалом отображения f . Уравнение (2.1) называется потенциальным.

Если V является потенциалом f , то уравнение (2.1) можно переписать в виде

$$\text{grad}_H V(x) = 0, \quad x \in \mathcal{U}. \quad (2.2)$$

Оно называется уравнением Эйлера – Лагранжа экстремалей (критических точек) функционала V .

Определение 2.4. Пусть $V(x)$ — гладкий функционал, заданный на банаховом пространстве E . Точка a называется критической точкой функционала V , если

$$\frac{\partial V}{\partial x}(a)h = \left\langle f(a), h \right\rangle_H = 0 \quad \forall h \in E \setminus \{0\}.$$

Плотность E в H обеспечивает равносильность последнего равенства уравнению (2.2).

Таким образом, множество решений уравнения (2.1) и множество критических точек функционала V совпадают. То есть построение решений уравнения (2.1) можно заменить построением критических точек функционала V (вариационный метод). Функционал V называется фредгольмовым, если его градиент — фредгольмово отображение.

Напомним, что критическая точка функции $W : \mathcal{U} \subset R^n \rightarrow R$ называется невырожденной (морсовской), если

$$\det \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}(a) \right) \neq 0.$$

Для функционала определение морсовской критической точки можно дать следующим образом.

Определение 2.5. Пусть $V : E \rightarrow R$ — гладкий фредгольмов функционал, E — банахово пространство. Критическая точка функционала V называется невырожденной (морсовской), если

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a)h \neq 0 \quad \forall h \in E \setminus \{0\}.$$

2.3 Леммы Морса

Лемма 2.1. (лемма Морса для функции, [71]) Пусть a — невырожденная критическая точка гладкой функции $W : R^n \rightarrow R$. В некоторой окрестности $\mathcal{U} \subset R^n$ точки a можно указать такую локальную систему координат $x_1, x_2, \dots, x_n$, удовлетворяющую условию $x_i(a) = 0 \forall i$, что

$$W(x) = W(a) - \sum_{k=1}^q x_k^2 + \sum_{k=q+1}^n x_k^2.$$

на $\mathcal{U}$. Число q называется индексом Морса критической точки.

Лемма 2.2. (лемма Морса для функционала, [87]) Пусть V — фредгольмов функционал с градиентной реализацией в тройке пространств $\{E, F, H\}$, и $x_o \in E$ — невырожденная критическая точка V . Тогда существует диффеоморфизм $\varphi : (\mathcal{U}, x_o) \rightarrow (\mathcal{O}, 0)$, где $\mathcal{U}$ и $\mathcal{O}$ — окрестности, соответственно, точки x_o и нуля в E , такой, что

$$V(x) = V(x_o) + \frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}(x_o)y, y \right\rangle, \quad y = \varphi(x), \quad x \in \mathcal{U}, \quad f = \text{grad } V$$

($\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в H).

Индексом Морса невырожденной критической точки a функционала V называется максимальная размерность подпространства, на котором отрицательно определен второй дифференциал $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(a)(h, h)$.

2.4 Фредгольмовы функционалы с групповой симметрией

В бифуркационном анализе задач с групповой симметрией, содержащих параметры, также достаточно хорошо зарекомендовал себя метод конечномерной редукции [9], [10], [32], [50]. Решение многих из них (в условиях симметрии) может быть сведено к анализу миниверсальных разверток краевых и угловых особенностей гладких функций, изученных В.И. Арнольдом, С.Т.С. Уоллом, Д. Сирсмой, Д. Питом, Т. Постоном, Ю.И. Сапроновым, А.В. Гнездиловым и др. [4], [25], [72], [77]. Подробные сведения по симметричному анализу дифференциальных уравнений имеются в [39], [68], а по теории G -эквивариантных вариационных задач — в [9], [32], [53], [72], [84].

Пусть G — некоторая группа, H — вещественное гильбертово пространство. Через $O(H)$ будем обозначать группу ортогональных преобразований H . Ортогональным представлением G на H называется гомоморфизм из G в группу $O(H)$. Пусть X — линейное подпространство в H , обладающее тем свойством, что $R_g x \in X$ для $\forall x \in X$ и $\forall g \in G$. Определено ортогональное представление $\bar{R}$ группы G на X , которое называется подпредставлением, индуцированным представлением R . Подпространство X называют устойчивым относительно группы G . Если $\dim X < \infty$, то подпредставление называют конечномерным.

Определение 2.6. Функционал V называется инвариантным относительно действия группы G (или обладающим G -групповой симметрией), если

$$V(R_g x) = V(x), \quad \forall x \in E, \quad g \in G.$$

Определение 2.7. отображение f называется эквивариантным относительно действия группы G , если

$$f(R_g x) = R_g f(x) \quad \forall x \in E \subset H, \quad g \in G.$$

Определение 2.8. Орбитой группы G , проходящей через данную точку $x_0 \in E$, называется множество всех точек $x \in E$, для каждой из которых существует такое $g_0 \in G$, что $x = R_{g_0} x_0$.

Точка $x_0 \in E$ называется неподвижной точкой относительно действия группы G , если $g(x_0) = x_0 \quad \forall g \in G$.

Если некоторая точка x_0 является критической для функционала V , то и вся орбита $G(x_0)$ состоит из критических точек. Орбита функционала V , состоящая из его критических точек, называется критической орбитой функционала V .

Утверждение 2.1 Пусть гладкий фредгольмов функционал V инвариантен относительно ортогонального действия группы $\mathbb{Z}_2^n$ и допускает $\mathbb{Z}_2^n$ -эквивариантную n -мерную редукцию (Ляпунова – Шмидта). Пусть при этом группа $\mathbb{Z}_2^n$ полусвободно действует на пространстве ключевых параметров. Тогда для соответствующей ключевой функции W (автоматически инвариантной относительно группы $\mathbb{Z}_2^n$) в некоторой системе координат (карте) на пространстве ключевых параметров выполнено следующее равенство:

$$W(\xi_1, \dots, -\xi_k, \dots, \xi_n) = W(\xi_1, \dots, \xi_k, \dots, \xi_n) \quad \forall \xi, k.$$

2.5 Фредгольмовы уравнения с параметрами

Важным обстоятельством, часто встречающимся в нелинейных уравнениях математической физики, является зависимость уравнений от параметров, т.е. уравнение записывается в виде

$$f(x, \lambda) = b, \quad x \in E, \quad b \in F, \quad \lambda \in \mathbb{R}^k.$$

При некотором λ решение $x(\lambda)$ образуют «устойчивое» семейство, но с изменением параметра при некоторых критических значениях λ это семейство может исчезнуть или разбиться на несколько ветвей.

Пусть f включено в $f(x, \lambda) : U \times \mathbb{R}^k \rightarrow F$, $f(x, 0) = f(x)$ — семейство гладких фредгольмовых отображений, гладко зависящее от параметра λ . Если отображение $f(\cdot, \lambda)$ потенциально с потенциалом $V(\cdot, \lambda)$, то потенциал также гладко зависит от данного параметра. В такой ситуации естественным образом возникает понятие бифуркации экстремалей и, соответственно, бифуркационного значения параметра.

Определение 2.9. Пусть $\lambda = \lambda_0$ — значение параметра λ , при котором a является изолированной критической точкой функционала

$V(x, \lambda)$. Значение $\lambda = \lambda_0$ называется бифуркационным, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое λ_1 , $\|\lambda_1 - \lambda_0\| < \varepsilon$, при котором V имеет не менее двух критических точек a_1, a_2 таких, что $\|a_1 - a\| < \varepsilon$ и $\|a_2 - a\| < \varepsilon$.

В процессе перехода λ через бифуркационное значение λ_0 говорят о рождении критических точек (из точки a). В прикладных задачах часто полагают $a = 0$ и рассматривают рождение критических точек из нуля.

Определение 2.10. Пусть задана гладкая фредгольмова параметрическая развертка

$$f(\cdot, \lambda) : E \rightarrow F, \quad \lambda \in \Lambda^m \subset \mathbb{R}^m.$$

Пусть Ω — открытое подмножество в E . Бифуркационным (или дискриминантным) множеством $\Sigma(\Omega)$ уравнения

$$f(x, \lambda) = b, \quad x \in \Omega, \quad (2.3)$$

называется совокупность тех значений $\lambda = \bar{\lambda}$, для которых данное уравнение имеет в Ω вырожденное решение $\bar{x}$:

$$f(\bar{x}, \bar{\lambda}) = b, \quad \text{codim} \left(\text{Im} \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{\lambda}) \right) > 0.$$

Определение 2.11. Пусть $\tilde{\Sigma}(\Omega)_{\bar{\lambda}}$ — росток множества $\Sigma(\Omega)$ в точке $\bar{\lambda}$. Тогда пересечение

$$\Sigma(\bar{x}, \bar{\lambda}) = \bigcap_{\Omega: \bar{x} \in \Omega} \tilde{\Sigma}(\Omega)_{\bar{\lambda}}$$

называется бифуркационной диаграммой уравнения (2.3) в точке $(\bar{x}, \bar{\lambda})$.

2.6 Схема Ляпунова — Шмидта (локальная)

Пусть E, F — вещественные банаховы пространства, $f : E \rightarrow F$ — нелинейное фредгольмово отображение нулевого индекса. Пусть, далее, зафиксированы прямые разложения

$$E = E^n \dot{+} E^{\infty-n}, \quad F = F^n \dot{+} F^{\infty-n},$$

где E^n и F^n — n -мерные подпространства в E и F соответственно, а $E^{\infty-n}$ и $F^{\infty-n}$ — произвольные прямые дополнения к E^n и F^n в E и F .

Если $e_1, e_2, \dots, e_n$ — базис E^n , то для каждого вектора $x \in E$ имеет место разложение

$$x = u + v, \quad u = \sum_{i=1}^n \xi_i e_i, \quad v \in E^{\infty-n}.$$

Если $g_1, g_2, \dots, g_n$ — базис F^n , то

$$f(x, \lambda) = f^n(x, \lambda) + f^{\infty-n}(x, \lambda),$$

$$f^n(x, \lambda) = \sum_{i=1}^n v_i(x, \lambda) g_i, \quad f^{\infty-n}(x, \lambda) \in F^{\infty-n}.$$

Предположив, что производная

$$\frac{\partial f^{\infty-n}}{\partial v}(a, \lambda) : E^{\infty-n} \rightarrow F^{\infty-n}$$

является изоморфизмом в некоторой точке $a \in E$, $f(a, \lambda) = 0$, получим, в силу теоремы о неявной функции, зависимость $v = \Phi(u, \lambda)$ (для u из достаточно малой окрестности $\mathcal{O} \subset E^n$ точки $\bar{u}$), такую, что $\Phi(\bar{u}, \lambda) = \bar{v}$ ($\bar{u}, \bar{v}$ — компоненты a) и

$$f^{\infty-n}(u + \Phi(u, \lambda), \lambda) = 0, \quad \forall u \in \mathcal{O}$$

(отображение $\Phi : \mathcal{O} \rightarrow E^{\infty-n}$ при этом является гладким). Для отыскания решений уравнения $f(x, \lambda) = 0$ в окрестности точки $x = a$ достаточно найти решения уравнения

$$f^n(u + \Phi(u, \lambda), \lambda) = 0. \quad (2.4)$$

Определение 2.12. *Отображение $\tau : E^n \rightarrow F^n$, где*

$$\tau(u, \lambda) = f^n(u + \Phi(u, \lambda), \lambda),$$

называется ключевым.

Очевидно, что уравнение (2.3) эквивалентно уравнению

$$\theta(\xi, \lambda) = 0, \quad (2.5)$$

где θ — координатная форма отображения τ .

2.7 Вариационная версия метода Ляпунова – Шмидта

Пусть $f : E \rightarrow F$ — гладкое фредгольмово нулевого индекса отображение банаховых пространств, обладающее свойствами собственности (прообраз любого компакта является компактом) и потенциальности:

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x)h \equiv \langle f(x), h \rangle,$$

где V — гладкий функционал на E (потенциал отображения f), $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в некотором гильбертовом пространстве H ($E \subset F \subset H$ — непрерывно вложенные пространства, E плотно в H). Если выполнено условие положительности (монотонности)

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial x}(x)h, h \right\rangle > 0 \quad \forall (x, h) \in E \times (E \setminus \{0\}), \quad (2.6)$$

то уравнение

$$f(x) = 0$$

однозначно разрешимо. Это верно в силу теоремы Банаха – Каччиополи – Мазура. Решение этого уравнения является точкой глобального минимума функционала V на E .

Если (2.6) заменяется более слабым условием

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial x}(x)h, h \right\rangle > 0 \quad \forall (x, h) \in E \times (L \setminus \{0\}), \quad (2.7)$$

где $L = E \cap N^\perp$, $N = \text{span}\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, $N^\perp$ — ортогональное дополнение к N в H , $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ — некоторая ортонормированная в H система векторов из E , то можно определить ключевую функцию W следующим образом:

$$W(\xi) = \inf_{x: \langle x, e_i \rangle = \xi_i, \forall i} V(x) \quad , \quad \xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)^\top. \quad (2.8)$$

Данная функции W полностью отвечает за поведение функционала V . Условие собственности f можно ослабить, заменив его условием собственности при каждом ξ отображения

$$f_*(\cdot, \xi) : L \rightarrow L_*, \quad \text{где } L_* = F \cap N^\perp, \quad (2.9)$$

$$f_*(v, \xi) := f\left(\sum_{i=1}^n \xi_i e_i + v\right) - \sum_{i=1}^n \left\langle e_i, f\left(\sum_{i=1}^n \xi_i e_i + v\right) \right\rangle e_i.$$

При выполнении этих условий уравнение

$$f_*(v, \xi) = 0 \quad (2.10)$$

однозначно разрешимо при всех ξ и его решение $v = h(\xi)$ гладко зависит от ξ — по теореме о неявной функции. Из (2.9) получаем

$$W(\xi) = V \left(\sum_{i=1}^n \xi_i e_i + h(\xi) \right). \quad (2.11)$$

Переход от V к W называется редукцией Ляпунова – Шмидта. Первые реализации идеи конечномерной редукции были сделаны А.М. Ляпуновым и Э. Шмидтом [55], [95]. Вместо функции (2.11) они рассматривали так называемое уравнение разветвления

$$\theta(\xi) = 0, \quad \xi \in R^n, \quad (2.12)$$

где

$$\begin{aligned} \theta(\xi) &= (\theta_1(\xi), \theta_2(\xi), \dots, \theta_n(\xi)), \\ \theta_i(\xi) &= \left\langle f \left(\sum_{i=1}^n \xi_i e_i + h(\xi) \right), e_i \right\rangle. \end{aligned}$$

Легко заметить, что

$$\theta(\xi) = \text{grad}W(\xi).$$

Утверждение 2.2 (см. [32], [78]) *Пусть отображение (2.9) является собственным и пусть для него выполняется условие положительности (2.6). Тогда маргинальное отображение*

$$\varphi : \xi \longmapsto \sum_{i=1}^n \xi_i e_i + h(\xi),$$

где $h(\xi)$ определено уравнением (2.10), устанавливает взаимно однозначное соответствие между критическими точками ключевой функции W и заданного функционала V . При этом локальные кольца особенностей соответствующих функций в точках ξ и $\varphi(\xi)$ изоморфны. В соответствующих друг другу однократных критических точках имеет место совпадение индексов Морса.

В некоторых случаях переход к функции многих переменных по схеме Ляпунова – Шмидта не согласован с ограничениями на область определения функционала, поэтому иногда удобнее воспользоваться редукцией Морса – Ботта [79].

2.8 Редукция Морса – Ботта

Пусть M — конечномерное компактное связное риманово C^∞ -многообразие без края и a, b — фиксированная пара точек на M . Через χ обозначим множество H^1 — кривых $x : [0, 1] \rightarrow M$, соединяющих a и b ($x(0) = a, x(1) = b$). Принадлежность кривой $x = x(t)$ классу H^1 означает её абсолютную непрерывность и суммируемость скалярного квадрата скорости

$$|\dot{x}(t)|^2 = (\dot{x}(t), \dot{x}(t))_{x(t)}.$$

Через $(\cdot, \cdot)_a$ обозначается скалярное произведение в касательном пространстве $T_a(M)$, $a \in M$. В χ естественно вводится бесконечномерная риманова структура с модельным гильбертовым пространством.

$$X = \{u(t) \in H^1([0, 1], R^m) : u(0) = u(1) = 0\}, \quad m = \dim M.$$

Функционал действия

$$V(x) = \int_0^1 \frac{|\dot{x}|^2}{2} dt$$

на χ является гладким и достигает своего минимального значения на кратчайшей кривой γ , соединяющей a и b [71]. Пусть c — регулярное значение V , $V(\gamma) > c$. Нетрудно установить существование такой величины $\varepsilon > 0$, что для любой кривой $x = x(t)$ в $\{V \leq c\}$ и любой пары точек $t, s \in [0, 1]$, для которой $|t - s| < \varepsilon$, точки $x(t)$ и $x(s)$ принадлежат геодезически выпуклому открытому подмножеству в M . Пусть целое положительное число n такое, что $\frac{1}{n+1} < \varepsilon$. Рассмотрим $M^n = \underbrace{M \times \dots \times M}_n$ и подмножество $N_c \subset M^n$, состоящее из таких точек $(q_1, q_2, \dots, q_n)$, для которых

$$\sum_{i=0}^n \int_{\frac{i}{n+1}}^{\frac{i+1}{n+1}} |\dot{\gamma}_{i,q}|^2 dt \leq 2c,$$

$\gamma_{i,q}$ — кратчайшая параметрическая кривая с параметром $t \in \left[\frac{i}{n+1}, \frac{i+1}{n+1}\right]$, соединяющая q_i и q_{i+1} ($q_0 = a, q_{n+1} = b$). Легко увидеть, что отображения

$$\begin{aligned} P : \{V \leq c\} &\rightarrow N_c, \quad \varphi : N_c \rightarrow \{V \leq c\}, \\ P(x) &= \left(x \left(\frac{1}{n+1} \right), \dots, x \left(\frac{n}{n+1} \right) \right)^\top, \\ \varphi(q)(t) &:= \gamma_{i,q}(t) \quad \forall t \in \left[\frac{i}{n+1}, \frac{i+1}{n+1} \right], \end{aligned}$$

являются гладкими. При этом

$$P(\varphi(q)) \equiv q, \quad V(\varphi(q)) = \inf_{x: P(x)=q} V(x).$$

Нетрудно проверить, что $\varphi(q)$ — невырожденная точка минимума для V . Отображения P и φ гомотопически обратны друг другу. Процедура стягивания слоев $P^{-1}(q)$ в точки $\varphi(q)$ детально описана в [71].

Замечание 2.1. Если на M задано действие группы G с условиями $g(a) = a, g(b) = b \quad \forall g \in G$ и инвариантностью функционала действия относительно преобразований

$$x(t) \mapsto g(x(t)) \quad \forall g \in G,$$

то ключевая функция $W, W(q) := V(\varphi(q))$, будет инвариантной относительно преобразований

$$(q_1, \dots, q_n) \rightarrow (g(q_1), \dots, g(q_n)).$$

2.9 Обобщенная редукция

Общеизвестным примером схемы конечномерной редукции является локальный метод Ляпунова – Шмидта, который служит одним из основных инструментов теории бифуркаций. Вариационная версия метода конечномерных редукций, опирающаяся на теорию нелинейных фредгольмовых отображений, изложена в [79]. Как в локальном, так и в глобальном случаях в одной и той же задаче могут применяться различные схемы редукции.

Рассмотренная ниже редукция применялась в работах [79], [80].

Определение 2.13. Пусть V — гладкий функционал, заданный на области Ω банахова пространства E . Конечномерной редукцией V на открытом подмножестве $\Psi \subset \Omega$ называется тройка $\{p, \varphi, N\}$, удовлетворяющая следующим условиям:

(1) Гладкое отображение $p : \Psi \rightarrow N$ (N — конечномерное многообразие) является субмерсией (то есть каждый дифференциал касательных пространств $\frac{\partial p}{\partial x}(a) : T_a(\Psi) \rightarrow T_\xi(N)$ является отображением «на»).

(2) $\forall \xi \in \mathcal{U} = p(\Psi)$ функционал $V_\xi = V|_{p^{-1}(\xi)}$ имеет единственную, причем невырожденную, критическую точку $\varphi(\xi)$ (что означает невырожденность второго дифференциала

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(V|_{p^{-1}(\xi)})(\varphi(\xi))(h, h),$$

$h \in T_{\varphi(\xi)}(p^{-1}(\xi))$, как квадратичной формы на линейном пространстве).

(3) Отображение $\varphi : \mathcal{U} \rightarrow \Psi$ является гладким.

Отображение p называется редуцирующей субмерсией. Размерностью редукции называется размерность образа редуцирующей субмерсии.

Определение 2.14. Функция $W : \mathcal{U} \rightarrow R$, определенная равенством

$$W(\xi) = V(\varphi(\xi)), \quad \xi \in \mathcal{U}, \quad (2.13)$$

также называется ключевой, а отображение φ — маргинальным.

Определение 2.15. Если $\forall \xi \in N$ точка $\varphi(\xi)$ является точкой минимума функционала $V_{p^{-1}(\xi)}$, то редукция называется эллиптической.

В случае эллиптической редукции ключевая функция определяется равенством

$$W(\xi) = \inf_{x:p(x)=\xi} V(x) = V(\varphi(\xi)). \quad (2.14)$$

Утверждение 2.3 Пусть $\{p, \varphi, N\}$ — эллиптическая конечномерная редукция гладкого функционала V на область Ω гладкого банахова многообразия M . Тогда маргинальное отображение φ устанавливает взаимно однозначное соответствие между множествами критических

точек ключевой функции W и функционала V . При этом соответствующие друг другу критические точки одновременно являются либо вырожденными, либо нет. В случае невырожденности соответствующие критические точки имеют одинаковые значения индексов Морса.

2.10 Квазиинвариантные подмногообразия в бесконечномерных пространствах

Для случая бесконечномерных пространств понятие квазиинвариантного подмногообразия (КИ-подмногообразия) было введено в [81], [82] при изучении поведения гладких фредгольмовых функционалов в условиях разрушения непрерывной симметрии. Компактные морсовские критические орбиты превращаются (в результате возмущения, разрушающего непрерывную симметрию) в КИ-подмногообразия, диффеоморфные исходным орбитам. Изучение экстремалей и многообразий уровней функционала в такой ситуации можно осуществлять, перейдя к сужению функционала на квазиинвариантное подмногообразие. Критические точки сужения остаются критическими и для функционала в целом. Если сужение на КИ-подмногообразии регулярно и эллиптическое (индекса нуль), то переход к сужению не изменит свойств критических точек: сохранятся индексы Морса, кратности, структура локальных колец особенности и т.д., то есть имеется прямая связь между топологическими строениями многообразий уровней исходного функционала и его эллиптического сужения.

Приведем основное определение КИ-подмногообразия [81]: *гладкое с пустым краем подмногообразие $K \subset E$ называется квазиинвариантным относительно функционала V , если существует такая гладкая ретракция $p : O(K) \longrightarrow K$, где $O(K)$ — окрестность K в E , что каждая точка $a \in K$ является критической точкой для сужения $V|_{p^{-1}(a)}$.*

Если K — конечномерное КИ-подмногообразие, то найдется такая окрестность $\tilde{O}(K)$, что тройка $\{\tilde{O}, K, p\}$ является гладким локально тривиальным расслоением с базой K и проекцией p . Таким образом, подмногообразие K является квазиинвариантным, если некоторая окрестность $O(K)$ гладко расслаивается над K и каждая точка $a \in K$ является критической точкой для сужения $V|_{p^{-1}(a)}$, где p — проекция расслоения. Если каждая точка $a \in K$ является морсовской критической точкой для

сужения $V|_{p^{-1}(a)}$, то K называется регулярным (морсовским) квазиинвариантным подмногообразием.

Для всех точек связного морсовского квазиинвариантного подмногообразия K индекс Морса $V|_{p^{-1}(a)}$ будет постоянным, и это постоянное значение называется индексом Морса квазиинвариантного подмногообразия K (обозначаемым $Ind(V, K)$).

Каждое инвариантное относительно V подмногообразие $K \subset E$ является квазиинвариантным (подмногообразие K называется инвариантным, если $grad V(a) \in T_a(K)$ для $\forall a \in K$).

При условии фредгольмовости индекса ноль функционала V каждое его компактное морсовское КИ-подмногообразие является структурно устойчивым: при гладком параметрическом возмущении функционала вблизи невозмущенного квазиинвариантного подмногообразия имеется диффеоморфное ему морсовское квазиинвариантное подмногообразие для возмущенного функционала V_λ (при всех достаточно малых λ). Значение индекса Морса при этом также сохраняется.

Если K — квазиинвариантное подмногообразие в E , то найдется четверка $(\tilde{O}(K), K, L, p)$, являющаяся гладким локально тривиальным расслоением с базой K , стандартным слоем L и проекцией $p : O(K) \rightarrow K$. Таким образом, подмногообразие K является квазиинвариантным, если некоторая его окрестность в N гладко расслаивается над K и каждая точка $a \in K$ является морсовской критической точкой для сужения $W|_{p^{-1}(a)}$, где p — проекция расслоения.

КИ-подмногообразия, задаваемые во многих случаях как образы маргинальных отображений [32], оказались весьма полезными при отыскании допустимых раскладов бифурцирующих экстремалей (*bif*-раскладов). Большинство известных из приложений раскладов можно трактовать как результат разрушения непрерывных симметрий (ключевая функция наследует симметрию).

Более сложные примеры аналогичного анализа (в случае трех и более ключевых переменных) приведены в [32], [41], [42].

2.11 Приближенное вычисление ключевой функции

Из утверждения 2.3 следует, что исследование экстремалей (редуцируемого) функционала сводится к анализу критических точек ключевой функции. Кроме того, все топологические и аналитические понятия, характеризующие тип стационарной точки (кратность, локальное кольцо особенности, версальная деформация, бифуркационная диаграмма и т.д. [4]) для таких функционалов вводятся через ключевые функции и их нормальные формы. Исследование нормальной формы ключевой функции позволяет детально описать качественную картину поведения ветвей критических точек, в частности, находить точное их количество и первые асимптотики.

Опишем одну практическую схему локальной редукции [32].

Рассмотрим потенциальное уравнение $f(x, \lambda) = 0$ с потенциалом

$$V(x, \lambda) = 0, \quad x \in E, \quad \lambda \in R^m.$$

Пусть E, F — вещественные банаховы пространства, H — гильбертово пространство, E непрерывно вложено в F , E плотно в H . Пусть $\Omega(0)$ — некоторая открытая окрестность нуля в E , $\mathcal{U}(0)$ — окрестность нуля в R^m и $f(0, \lambda) = 0 \forall \lambda$. Пусть выполнены следующие два условия:

(1) На $\mathcal{U}(0)$ определен набор гладких нормированных в H функций из E (ведущих мод бифуркации) $\{e_i(\lambda)\}_{i=1}^n$, $\lambda \in \mathcal{U}(0)$, таких, что

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, \lambda) e_i(\lambda) = \alpha_i(\lambda) e_i(\lambda), \quad (2.15)$$

где $\{\alpha_i(\lambda)\}_{i=1}^n$ — гладкие спектральные функции;

(2) если $N_\lambda = \text{span}\{e_1(\lambda), e_2(\lambda), \dots, e_n(\lambda)\}$, $N_\lambda^\perp$ — ортогональное дополнение к N_λ в метрике H , $L_\lambda = E \cap N_\lambda^\perp$, то ноль является невырожденной критической точкой для сужения $V(x, \lambda)|_{x \in L_\lambda}$.

Для любого $x \in \Omega(0)$ положим $\xi_i(\lambda) = \langle x, e_i(\lambda) \rangle$, где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в H . Тогда

$$x = \sum_{i=1}^n \xi_i(\lambda) e_i(\lambda) + v(\lambda) \quad v(\lambda) \perp e_i(\lambda) \forall i.$$

Аналогично

$$f(x, \lambda) = \sum_{i=1}^n f_i(x, \lambda) e_i(\lambda) + f_*(x, \lambda) \quad f_*(x, \lambda) \perp e_i(\lambda) \forall i.$$

Пусть $L_\lambda^* = F \cap N_\lambda^\perp$. Тогда из условия (2) следует, что $f_*(\cdot, 0) : L_0 \rightarrow L_0^*$ — локальный диффеоморфизм (в некоторой окрестности $\Omega(0)$ точки $0 \in L_0$). Следовательно, по теореме о неявной функции, найдется такая гладкая функция $u = \Phi(\xi, \lambda)$, $(\xi, \lambda) \in \Omega^n(0) \times \mathcal{U}(0)$, $\Phi(\xi, \lambda) \in L_\lambda$, где $\Omega^n(0)$ — некоторая окрестность нуля в R^n , что

$$f_* \left(\sum_{i=1}^n \xi_i e_i(\lambda) + \Phi(\xi, \lambda), \lambda \right) = 0, \quad \forall (\xi, \lambda) \in \Omega^n(0) \times \mathcal{U}(0).$$

Функция

$$W(\xi, \lambda) = V \left(\sum_{i=1}^n \xi_i e_i(\lambda) + \Phi(\xi, \lambda), \lambda \right) \quad (2.16)$$

является ключевым для функционала $V(x, \lambda)$. Уравнение

$$f^n \left(\sum_{i=1}^n \xi_i e_i(\lambda) + \Phi(\xi, \lambda), \lambda \right) = 0$$

является ключевой (уравнением разветвления). Достаточно близкая к нулю точка $a \in E$ является решением уравнения $f(x, \lambda) = 0$ при $\lambda = \bar{\lambda}$ тогда и только тогда, когда

$$a = \sum_{i=1}^n \bar{\xi}_i e_i + \Phi(\bar{\xi}, \bar{\lambda}), \quad (2.17)$$

где $\bar{\xi}$ — близкая к нулю критическая точка ключевой функции. При этом a — невырожденное решение уравнения $f(x, \lambda) = 0$ (невырожденная экстремаль функционала V) лишь одновременно с невырожденностью $\bar{\xi}$, как критической точки для функции $W(\cdot, \bar{\lambda})$. Таким образом, изучение решения уравнения $f(x, \lambda) = 0$ или экстремалей функционала V вблизи нуля также сводится к анализу ветвления критических точек функции $W(\cdot, \lambda)$.

Формула (2.17) является основой для получения асимптотических приближений к ветвям бифурцирующих решений.

В приложениях возникает проблема вычисления тейлоровских разложений ключевой функции W . Во многих случаях достаточно ограничиться несколькими первыми членами разложения W в ряд Тейлора. В локальных задачах это производится при помощи специальным образом подобранной ритцевской аппроксимации.

Определение 2.16. Ритцевской аппроксимацией [79] функционала V , заданного на банаховом пространстве E , называется функция

$$W_R(\xi) = V \left(\sum_{i=1}^n \xi_i e_i \right) \quad \xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)^\top,$$

где $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ — некоторый линейно независимый набор функций из E (базис аппроксимации).

Экстремалам $\bar{\xi} = (\bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_n)$ функции W соответствуют точки

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^n \bar{\xi}_i e_i,$$

называемые ритцевскими аппроксимациями экстремалей V .

Точность ритцевских аппроксимаций повышается лишь за счет увеличения количества базисных функций. Если, обобщая, рассмотреть «нелинейные» аппроксимации вида

$$W(\xi) = V \left(\sum_{j=1}^n \xi_j e_j + \Phi(\xi) \right),$$

где Φ — гладкое отображение из $N := \text{span}(e_1, \dots, e_n)$ в $N^\perp$ (ортогональное дополнение к N в метрике пространства функций с суммируемым квадратом), то во многих задачах можно достигнуть любой аппроксимативной точности при априори зафиксированном наборе базисных функций и, следовательно, априори ограниченном количестве степеней свободы аппроксимирующей системы. Таким образом, схему Ляпунова — Шмидта можно рассматривать как разновидность нелинейной ритцевской аппроксимации.

Формула (2.17) дает асимптотическое представление бифурцирующих экстремалей.

При исследовании ключевых функций фредгольмовых функционалов важную роль играют условия локальной конечной определенности гладких функций в особых точках. Приведем наиболее часто употребляемое условие, найденное Дж. Мазером (см. [4], [14]).

Предварительно напомним, что гладкая функция V называется сильно r -определенной в точке a , если каждая функция U с тем же отрезком

ряда Тейлора (порядка r) в точке a , который имеется у V , сильно локально гладко эквивалентна функции V , то есть найдется такое гладкое отображение $\varphi : (\mathbb{R}^n, a) \rightarrow (\mathbb{R}^n, a)$ с единичной матрицей Якоби в точке a , что в некоторой окрестности этой точки a выполнено равенство $V(\varphi(x)) = U(x)$.

Согласно Дж. Мазеру, функция V является сильно r -определенной в нуле, если выполняется следующее **условие Мазера**:

$$\mathfrak{M}^{r+1} \subset \mathfrak{M}^2 \cdot J(V). \quad (2.18)$$

Здесь $\mathfrak{M}^k$ — k -я степень максимального идеала $\mathfrak{M}$ в $\mathbb{R}[[x]]$, а $J(V)$ — якобиев идеал функции V в нуле.

Доказательства теорем опираются на следующую теорему о миниверсальных деформациях особенностей [4], [14]: Пусть $W_1(x, \lambda)$ и $W_2(x, \mu)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^n$ — две миниверсальные деформации одной и той же функции $W_0(x)$ в нулевой особой точке, тогда существует гладкий локальный диффеоморфизм

$$(x, \lambda) \longrightarrow (\varphi(x, \mu), \varphi(\mu)), \quad \varphi(x, 0) \equiv x,$$

такой, что

$$V_1(\varphi(x, \mu), \varphi(\mu)) \equiv V_2(x, \mu).$$

2.12 Алгоритм вычисления ключевой функции, асимптотическое представление решений

Итак, если представить семейство фредгольмовых отображений $f : E \times \mathbb{R}^m \rightarrow F$ в виде

$$\mathcal{A}(\varepsilon)x + \mathcal{B}(x, x, \varepsilon) + \mathcal{C}(x, x, x, \varepsilon) + o(\|x\|_E^3),$$

$\mathcal{A}(\varepsilon)$ — гладкое семейство линейных фредгольмовых операторов нулевого индекса, $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ — квадратичный и кубический операторы, то задав ортопроекторы $\mathcal{P} : E \longrightarrow N$, $\mathcal{Q} = \mathcal{I} - \mathcal{P}$, где $\mathcal{P}x := \sum_{j=1}^n \langle x, e_j \rangle e_j$, $e_1, e_2, \dots, e_n$ — моды бифуркации, можно представить *общий алгоритм вычисления ключевого уравнения* в виде последовательности следующих действий:

1) запись исходного уравнения $f(x, \varepsilon) = 0$ в виде системы уравнений

$$\begin{cases} f_{(n)}(u + v, \varepsilon) = 0, \\ f_{(\infty-n)}(u + v, \varepsilon) = 0, \end{cases}$$

$$u = \mathcal{P}x, \quad v = \mathcal{Q}x, \quad f_{(n)}(x, \varepsilon) := \mathcal{P}f(x, \varepsilon), \quad f_{(\infty-n)}(x, \varepsilon) := \mathcal{Q}f(x, \varepsilon);$$

2) вывод зависимости

$$v = \Phi(\xi, \varepsilon), \quad \xi = \widehat{u}, \quad \Phi(\xi, \varepsilon) = \Phi^{(3)}(\xi, \varepsilon) + o(|\xi|^3), \quad (2.19)$$

$$\Phi^{(2)}(\xi, \varepsilon) = \sum_{|k|=3} \Phi_k \xi^k, \quad k = (k_1, k_2, \dots, k_n),$$

$$\Phi_k \xi^k := \Phi_{k_1, k_2, \dots, k_n} \xi_1^{k_1} \xi_2^{k_2} \dots \xi_n^{k_n}, \quad |k| = k_1 + k_2 + \dots + k_n, \quad k_j \in \mathbb{Z}_+,$$

$$\Phi^{(3)}(\xi, \varepsilon) = -\overline{\mathcal{A}}^{-1} \mathcal{B}_{(\infty-n)}(u, u, \varepsilon), \quad u := \sum_{j=1}^n \xi_j e_j,$$

$$\overline{\mathcal{A}} := \mathcal{A}|_{\mathcal{N}^\perp}, \quad \mathcal{B}_{(\infty-n)} := \mathcal{Q}\mathcal{B};$$

3) переход к ключевому уравнению:

$$\Theta(\xi, \varepsilon) := \Theta^{(1)}(\xi, \varepsilon) + \Theta^{(3)}(\xi, \varepsilon) + o(|\xi|^3) = 0;$$

$$f_{(n)}(x, \varepsilon) = \mathcal{A}_{(n)}(\varepsilon)x + \mathcal{C}_{(n)}(x, x, x, \varepsilon) + \dots,$$

$$\mathcal{C}_{(n)} := \mathcal{P}\mathcal{C},$$

$$\begin{aligned} \Theta(\xi, \varepsilon) &= f_{(n)}\left(u + \Phi^{(3)}(\xi, \varepsilon) + \dots, \varepsilon\right) = \\ &= \mathcal{A}_{(n)}u + \mathcal{C}_{(n)}(u, u, u, \varepsilon) + \dots; \end{aligned}$$

4) вычисление главной части ключевой функции по основной формуле:

$$W(\xi, \varepsilon) = V\left(\sum_{i=1}^n \xi_i e_i(\varepsilon) + \Phi(\xi, \varepsilon), \varepsilon\right). \quad (2.20)$$

Для главной части ключевой функции получаем представление

$$\widetilde{W}(\xi, \varepsilon) = \widetilde{V}\left(\sum_{i=1}^n \xi_i e_i(\varepsilon) + \widetilde{\Phi}(\xi, \varepsilon), \varepsilon\right), \quad (2.21)$$

где $\widetilde{W}, \widetilde{V}, \widetilde{\Phi}$ — соответствующие аппроксимирующие полиномы (отрезки тейлоровских разложений) степеней для отображений W, V, Φ .

Формулы (2.19)–(2.21) дают конструктивную основу для разработки вычислительных алгоритмов в конкретных задачах. В частности, формула (2.19) дает асимптотическое представление решения основного (исходного) уравнения.

2.13 Каустика в бесконечномерном случае

Определения дискриминантного множества и каустики для фредгольмова функционала такие же, как и в случае гладкой функции на конечномерном пространстве.

Рассмотрим гладкое фредгольмово уравнение $f(x, \lambda) = 0$ с потенциалом

$$V(x, \lambda), \quad x \in E, \quad \lambda \in R^m.$$

Пусть E, F — вещественные банаховы пространства, H — гильбертово пространство, E непрерывно вложено в F , E плотно в H (в данной тройке пространств определен градиент f функционала V). Пусть Ω — некоторая открытая окрестность нуля в E , $\mathcal{U}$ — окрестность нуля в R^m и $f(0, \lambda) = 0 \quad \forall \lambda$.

Определение 2.17. *Дискриминантное множество $\Delta(\Omega)$ — это совокупность тех значений параметра $\lambda \in \mathcal{U}$, при которых $V(\cdot, \lambda)$ имеет в Ω критическую точку на нулевой поверхности уровня, то есть*

$$\Delta(\Omega) = \{\lambda : \exists x, \quad V(x, \lambda) = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial x}(x, \lambda) = 0\}.$$

Определение 2.18. *Каустика $\Sigma(\Omega)$ — это совокупность тех значений параметра $\lambda \in \mathcal{U}$, при которых $V(\cdot, \lambda)$ имеет в Ω вырожденную критическую точку.*

Асимптотические формулы предыдущего раздела дают основу для приближенного построения дискриминантных множеств и каустик.

2.14 Топологическое сравнение ключевых функций

Подробное исследование по проблеме топологического сравнения ключевых функций, полученных в разных редуцирующих схемах для одной задачи, проведено в работах [80], [88].

Приведем формулировки некоторых утверждений из этих работ.

Утверждение 2.4 Пусть $W_0 = V \cdot \varphi_0$, $W_1 = V \cdot \varphi_1$ — ключевые функции в двух редукциях, φ_0, φ_1 — соответствующие маргинальные отображения, и пусть $\dim \text{Ker} \nabla^2 V(x_0) = n$. Тогда функции W_0 и W_1 локально эквивалентны в нуле: существует локальный диффеоморфизм $\psi : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$, такой, что на некоторой окрестности нуля $W_0(\xi) \equiv W_1(\psi(\xi))$.

Утверждение 2.5 Все ключевые функции редуцируемого функционала, полученные в эллиптических редуцирующих системах фиксированной размерности, локально эквивалентны (в соответствующих критических точках).

Утверждение 2.6 Пусть $W(x) = W_0(x) + h(x)$, где $x \in \mathbb{R}^n$, $h(x) \in \mathcal{M}^2 \cdot \mathcal{J}$, $\mathcal{M}$ — максимальный идеал в кольце ростков гладких функций в нуле, $\mathcal{J}$ — яковиев идеал (порожденный ростками первых производных). Тогда W сильно эквивалентна W_0 , и любые миниверсальные деформации этих функций также сильно эквивалентны.

Утверждение 2.7 Пусть для функционала V задано гладкое семейство эквивариантных конечномерных редукций p_t , $t \in [0, 1]$, определяющих ключевые функции $W_t : \mathbb{R}^m \rightarrow R$. Тогда $\forall s, t \in [0, 1]$ существует эквивариантный диффеоморфизм $\psi_s^t : R^m \rightarrow R^m$ такой, что $W_s(\xi) = W_t(\psi_s^t(\xi))$.

Из теорем, установленных в [80], [88], вытекает, в частности, что две нелокально построенные ключевые функции гладкого функционала, построенные в гомотопных (непрерывно деформируемых одна в другую) редуцирующих системах, глобально право эквивалентны. Если исходный функционал обладает некоторой симметрией, то естественно стремление получать ключевые функции, наследующие эту симметрию. Эквивалентность ключевых функций также имеет место (с учетом симметрии).

2.15 Угловые особенности функционалов и их возмущения

Развитие методов изучения поведения гладких функционалов вблизи угловых особых точек на крае банахова многообразия представляет интерес как для общей теории особенностей гладких функционалов, так и для ее приложений к задачам теории упругости, теории фазовых переходов и т.п.

Угловые особенности функций на конечномерных многообразиях были введены Д. Сирсмой [94] как обобщение краевых, ранее введенных и изученных В.И. Арнольдом [2], [4]. Д. Сирсма установил при этом, что список простых угловых особенностей получается вложением списка простых краевых особенностей.

Некоторые геометрические и топологические аспекты вариационных задач на многообразиях с краем и углами исследовали А.А. Аграчев, С.А. Вахрамеев, О.В. Кунаковская и др. Краевые особенности фредгольмовых функционалов и некоторые их применения изучались в работах О.Ю. Даниловой (ссылки имеются в [32]).

Среди унимодальных угловых особенностей есть такие, которые не имеют прямых аналогов в краевом случае (например, особенность $x^2 + y^2 + axu$ в вершине положительного квадранта на координатной плоскости). Более сложные примеры (высокой модальности) и их приложений были рассмотрены в [32], [77].

В [25] дана полная классификация *bif*-раскладов в полурегулярных точках минимума на вершинах трехгранных углов, полученная при решении задачи о ветвлении критических тором для функций с поликруговой симметрией и там же описаны характерные плоские сечения соответствующих каустик.

Анализ бифуркаций в обычных (некраевых) критических точках эффективно осуществляется на основе схем конечномерной редукции. Аналогичный подход применим и в угловых точках, но при этом возникает необходимость согласования ключевых параметров с неравенствами, задающими угол. В [77] была предложена естественная идея включения системы ограничителей в систему ключевых параметров.

Ниже сделан акцент на задачу определения и вычисления мод би-

фуркации или, что эквивалентно, на задачу представления бифурцирующих экстремалей в форме

$$\sum_{j=1}^n \xi_j e_j + o(\xi), \quad (2.22)$$

где $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)^\top$ — критическая точка ключевой функции (векторные коэффициенты e_j выполняют роль мод бифуркации).

В анализе обычных критических точек моды бифуркации чаще всего определяются как собственные функции оператора, являющегося главной частью оператора Гессе (производной Фреше градиента) в заданной критической точке. В угловых же точках выбор мод менее очевиден.

2.15.1 Редуцирование угловых особенностей

Пусть, как и ранее, E, F — банаховы пространства и $f : E \rightarrow F$ — фредгольмово потенциальное отображение нулевого индекса, $E \subset F \subset \mathcal{H}$, где $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство (все вложения непрерывны и E плотно в $\mathcal{H}$). Пусть гладкий функционал V является потенциалом f , то есть

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x) h = \langle f(x), h \rangle_{\mathcal{H}}, \quad x, h \in E$$

($\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}}$ — скалярное произведение в $\mathcal{H}$). Уравнение

$$f(x) = 0 \quad (2.23)$$

определяет экстремали (критические точки) гладкого функционала $V(x)$.

Если $f(x, \lambda) : E \times \mathbb{R}^q \rightarrow F$ — семейство гладких фредгольмовых отображений, гладко зависящее от параметра λ , и если отображение $f(\cdot, \lambda)$ потенциально с потенциалом $V(\cdot, \lambda)$, то его потенциал также гладко зависит от данного параметра.

Иногда функционал $V(x, \lambda)$ рассматривается в окрестности нуля при ограничениях на основную переменную в виде m неравенств, задающих неособо пересекающиеся гладкие поверхности и выделяющих m -*гранный угол*:

$$\mathcal{C} = \{x \in E \mid g_j(x) \geq 0, \ j = 1, \dots, m\}.$$

В случае $m = 1$ (одного неравенства) получаем так называемую краевую особенность. Точка $a \in \mathcal{C}$ называется *условно критической* для гладкого

функционала $V(x, \lambda)$, если $\text{grad}_{\mathcal{H}} V(0)$ ортогонален грани $\mathcal{C}$, содержащей a . Число элементов носителя

$$\text{supp}(a) = \{k \in \{1, \dots, m\} \mid g_k(a) \neq 0\}$$

(приведенная размерность минимальной грани угла, содержащей эту точку) называется *порядком* точки a .

Анализ поведения $V(x, \lambda)$ можно проводить на основе перехода к функции

$$W(\xi) := \inf_{x: g(x)=\xi} V(x)$$

в какой-либо схеме конечномерной редукции. Здесь $g(x) = (g_1, \dots, g_n)^\top$, $\{g_j\}_{j=1}^n$ — набор независимых гладких функционалов (ключевых параметров), включающий в себя семейство ограничителей $\{g_k\}_{k=1}^m$ (задающих угол). Функционалы $g_j(x)$ подчинены, как правило, дополнительным условиям. Ниже предполагается, что $\text{grad}_{\mathcal{H}} g_j(x) \in F \quad \forall x \in E$.

2.15.2 Многообразие катастроф и каустика

Пусть $\hat{M} \in E \times \mathbb{R}^q$ — многообразие катастроф, то есть $\hat{M} = M_0 \cup \dots \cup M_m$, где M_k определяется соотношениями:

$$f(x, \lambda) = 0, \quad x \in \mathcal{C}_k, \quad \dim \text{Ker} \frac{\partial [f]_k}{\partial x}(x, \lambda) > 0.$$

Здесь $\mathcal{C}_k$ — совокупность граней угла $\mathcal{C}$ приведенной размерности k , $\mathcal{C}_0$ — вершинная грань угла, а $[f]_k = \text{grad}_{\mathcal{H}}(V|_{\mathcal{C}_k})$.

Каустика (бифуркационное множество) Σ определяется как образ канонической проекции $\pi : E \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^q$ многообразия катастроф: $\Sigma = \pi(\hat{M})$.

Если известна оценка сверху числом d значений индексов Морса всех бифурцирующих экстремалей, то каждый *bif*-расклад можно описать характеристической матрицей

$$L = \begin{pmatrix} l_0^0 & \dots & l_d^0 \\ \dots & \dots & \dots \\ l_0^m & \dots & l_d^m \end{pmatrix},$$

в которой элемент l_i^j совпадает с количеством критических точек (углового) индекса j на i -мерных гранях.

Как обычно, *версальные деформации* угловых особенностей содержат информацию о всех метаморфозах (о перестройках поверхностей уровня, расклейках и склейках особых точек, о различных бифуркационных эффектах и т.д.), происходящих при всевозможных гладких деформированиях функции, и поэтому они играют центральную роль в теории угловых особенностей (как и в теории обычных особенностей [4]).

В случае угловой особенности версальная деформация определяется как функция $V(x, \lambda)$, для которой совокупность ростков функций $\frac{\partial V}{\partial \lambda_j}(x, 0)$ (начальных скоростей деформации) дает систему линейных образующих в угловом кольце особенности $\hat{Q}_0(V)$. Если эта совокупность является базисом $\hat{Q}_0(V)$, то деформация называется миниверсальной. Если вместо кольца ростков гладких функций рассмотреть максимальный (в нем) идеал и профакторизовать его по угловому якобиеву идеалу, то получим усеченное угловое локальное кольцо $\hat{Q}_0^*(V)$. Деформация $V(x, \lambda)$, для которой $V(x, 0) = 0$ и совокупность ростков функций $\frac{\partial V}{\partial \lambda_j}(x, 0)$ образует базис $\hat{Q}_0^*(V)$, называется ограниченной миниверсальной деформацией. Каустика такой деформации называется главной и обозначается Σ (чаще всего каустикой особенности называют главную каустическую).

Каустика разбивает базу ограниченной миниверсальной деформации на ячейки, каждой из которых отвечает единственный *bif*-расклад.

В бифуркационном анализе угловой особой точки выделяются, как и в обычной теории, следующие две основные задачи: 1) описание геометрического строения (главной) каустической и 2) описание *bif*-раскладов, соответствующих компонентам связности дополнения к каустике (в базе ограниченной миниверсальной деформации).

2.15.3 Моды бифуркации

Пусть $g_1, \dots, g_r$ — редуцирующая система. Рассмотрим редуцирующее подмногообразие $\mathcal{N}$, состоящее из условных экстремалей $\varphi(\xi)$ функционала V , взятых на подмногообразиях $\mathcal{M}_\xi := g^{-1}(\xi)$ (отображение $\xi \mapsto \varphi(\xi)$ называется маргинальным). Без ущерба для общности можно предположить, что нуль является угловой критической точкой, принадлежащей минимальной грани.

Пусть N — линейная оболочка системы градиентов ограничителей в нуле:

$$N := \text{Lin}(\text{grad } g_1(0), \dots, \text{grad } g_m(0))$$

и пусть $\tilde{N} := A^{-1}(N)$, где $A := \frac{\partial f}{\partial x}(0)$ — оператор Гессе в нуле.

Пусть, далее, $e_1, \dots, e_r$ — ортонормированный в энергетической метрике $\langle x, y \rangle_1 := \langle \bar{A}(x), y \rangle$ ($\bar{A}(u+v) := u + A(v)$, $u \in \text{Ker } A$, $v \perp \text{Ker } A$) базис подпространства $\tilde{N}$, построенный при условии, что его первые n векторов задают базис ядра оператора Гессе: $\text{Lin}\{e_1, \dots, e_n\} = \text{Ker } A$.

Теорема 2.1. *Подпространство $\tilde{N}$ является касательным к редуцирующему подмногообразию $\mathcal{N}$ в нуле.*

Доказательство. Условная экстремаль функционала V на подмногообразии $\mathcal{M}_\xi$ является решением (единственным вблизи нуля) уравнения

$$P_x \cdot f(x) = 0,$$

где P_x — ортогональный проектор на касательное подпространство в точке $x \in \mathcal{M}_\xi$ к подмногообразию $\mathcal{M}_\xi$. Следовательно, верно тождество

$$P_{\varphi(\xi)} \cdot f(\varphi(\xi)) = 0.$$

Продифференцировав это тождество в нуле, легко убедиться, что образ дифференциала маргинального отображения совпадает с прообразом нуля оператора $P_0 \cdot A$ или, что равносильно, с прообразом подпространства N относительно A . Что и требовалось доказать.

Теорема 2.2. *Существует такое диффеоморфное преобразование координат в пространстве ключевых параметров, что после его применения к редуцирующему отображению g (в образе) для маргинального отображения реализуется представление (2.22) с коэффициентами $e_1, \dots, e_n$ в линейной части, задающими заранее выбранный базис в $\tilde{N}$. Слагаемое $o(\xi)$ при этом (в (2.22)) ортогонально $\tilde{N}$ (в энергетической метрике $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$).*

Доказательство. Для редуцирующего подмногообразия $\mathcal{N}$ рассмотрим параметризацию вида

$$\gamma(\xi) = \sum_k \xi_k e_k + \alpha(\xi), \quad \alpha(\xi) = o(\xi), \quad \alpha(\xi) \perp \tilde{N} \quad (2.24)$$

(соотношение ортогональности задано в энергетической метрике). Очевидно, что отображение $\psi := g \cdot \gamma$ является локальным диффеоморфизмом пространства ключевых параметров. После замены $\xi \mapsto \psi(\xi)$ (образа редуцирующего отображения) получим отображение $p = \psi^{-1} \cdot g$, для которого $p(\gamma(\xi)) \equiv \xi$. Следовательно, после замены редуцирующего отображения g на p отображение γ становится маргинальным. Так как для него выполняется представление (2.24), то справедливость утверждения теоремы установлена.

Замечание 2.2. В случае линейных ограничителей имеет место соотношение $g \cdot \alpha = 0$ и, следовательно, диффеоморфизм ψ является линейным.

2.16 Фредгольмовы функционалы с круговой симметрией

Редуцирующие схемы позволяют исследовать бифуркации решений разнообразных нелинейных задач с параметрами. На ее основе можно строить алгоритмизируемые процедуры анализа циклов динамических систем, бифурцирующих из сложных фокусов, анализировать рождение периодических волн в нелинейных средах и т.д. Анализ бифуркаций периодических волн тесно связан с анализом критических орбит фредгольмовых функционалов, обладающих круговой симметрией [32].

2.16.1 Функционалы с гладкой круговой симметрией

Пусть $V : E \rightarrow \mathbb{R}$ — фредгольмов функционал с градиентом в тройке $\{E, F, H\}$ и пусть задано такое представление T группы $SO(2)$ в группу $O(H)$ ортогональных операторов $H \rightarrow H$, что $T_g(E) \subset E$, $T_g(F) \subset F$, $\forall g \in SO(2)$, и функционал V инвариантен относительно действия $SO(2)$ на E (обладает *круговой симметрией*):

$$V(T_g x) = V(x) \quad \forall x \in E, g \in SO(2).$$

Предположим также эквивариантность редукции $p : E \rightarrow \mathbb{R}^n$, означающую задание на $\mathbb{R}^n$ действия группы $SO(2)$ с условием $p(T_g(x)) = T_g(p(x)) \forall x \in E, g \in G$ так, что редуцирующее отображение эквивариантно: $p(T_g(x)) = T_g(p(x)) \forall x \in E, g \in G$.

Далее будет предполагаться, что действие окружности не имеет ненулевых неподвижных точек. Пространство N мод бифуркации в этом случае четно и разбивается в прямую сумму двумерных подпространств:

$$N = N^1 \dot{+} N^2 \dot{+} \dots \dot{+} N^q, \quad (2.25)$$

инвариантных относительно заданного действия окружности и таких, что сужения действия $SO(2)$ на каждое из этих подпространств является неприводимым.

Если отождествить каждое подпространство N^k с комплексной плоскостью $\mathbf{C}$, то индуцированное действие окружности на N^k сведется к стандартному действию окружности на комплексной плоскости некоторой кратности p_k :

$$\{\varphi, z\} \mapsto e^{ip_k\varphi} z. \quad (2.26)$$

Алгебраическая структура ключевой функции, отвечающей данному функционалу, зависит от набора кратностей $\{p_k\}$ или, более точно, от резонансов. Под резонансами подразумеваются такие нетривиальные наборы целых чисел $\{m_1, m_2, \dots, m_q\}$, для которых выполняются (резонансные) соотношения

$$\sum_{k=1}^q m_k p_k = 0.$$

Ясно, что множество $\mathcal{R}$ всех резонансов является подгруппой целочисленной решетки $\mathbf{Z}^n$. Любой базис подгруппы $\mathcal{R}$ будем называть базисным набором резонансов.

В частности, если $q = 2$, то базисный набор состоит из одного элемента $\{m_1, m_2\}$.

2.16.2 Ослабление условия гладкости действия группы Ли

В некоторых задачах бифуркационного анализа приходится иметь дело с негладкими ортогональными действиями групп Ли, порождающими гладкие действия на пространствах ключевых параметров или, соответственно, на квазиинвариантных подмногообразиях. Такая ситуация возникает, например, в вариационных задачах, связанных с поиском и изучением периодических решений. Если отменить условие гладкости ортогонального действия группы Ли G на гильбертовом пространстве H и

заменить его более слабым условием непрерывности действия G на банаховом пространстве E , порождающего гладкое действие на пространстве ключевых параметров или, соответственно, на квазиинвариантном подмногообразии, то многие определения и теоремы изложенной выше (эквивариантной) теории бифуркаций сохранятся.

Дадим краткое изложение элементов модифицированной теории.

Пусть задана связная компактная группа Ли G и зафиксирован гомоморфизм

$$\mathcal{T} : G \longrightarrow O(H)$$

из этой группы в группу ортогональных линейных преобразований гильбертова пространства H (гладкость $\mathcal{T}$ не предполагается). Гомоморфизм $\mathcal{T}$ задает ортогональное действие на пространстве H :

$$G \times H \longrightarrow H,$$

$$(g, x) \longmapsto y = \mathcal{T}_g(x) \quad \forall (g, x) \in G \times E.$$

Предположим, что, во-первых, E , F и V инвариантны относительно данного действия:

$$\mathcal{T}_g(E) \subset E, \quad \mathcal{T}_g(F) \subset F, \quad V(\mathcal{T}_g(\cdot)) = V(\cdot) \quad \forall g \in G,$$

и, во-вторых, индуцированные гомоморфизмы $\mathcal{T} : G \longrightarrow GL(E)$, $\mathcal{T} : G \longrightarrow GL(F)$ непрерывны.

Из инвариантности функционала V следует эквивариантность его первого и второго кодифференциалов:

$$f \mathcal{T}_g = \mathcal{T}_g f \quad (f = \nabla^1 V),$$

$$\nabla^2 V(\mathcal{T}_g x) = \mathcal{T}_g \nabla^2 V(x) \mathcal{T}_g^{-1} \quad \forall (g, x) \in G \times E. \quad (2.27)$$

Из соотношения (2.27) вытекает, что множество критических точек V инвариантно (орбита каждой критической точки состоит из критических точек). Если критическая орбита оказалась, в силу тех или иных обстоятельств, дифференцируемым подмногообразием в E , то для нее может быть определен индекс Морса, как максимальная размерность подпространства в E , на котором отрицательно определен второй дифференциал. В случае гладкости критической орбиты все ее характеристики определяются сужением функционала на локальную трансверсаль к орбите.

Постоянство вдоль орбиты, например, индекса Морса V на трансверсали в этом случае — следствие из теоремы об устойчивости индекса Морса фредгольмова функционала [86].

Пусть далее $V : E \rightarrow \mathbb{R}$ — коэрцитивный функционал с градиентом в тройке $\{E, F, H\}$, и пусть V инвариантен относительно заданного действия G на E :

$$V(T_g x) = V(x) \quad \forall x \in E, g \in G.$$

Рассмотрим редуцирующую субмерсию $p : E \rightarrow \mathbb{R}^n$, считая, что на $\mathbb{R}^n$ задано действие той же группы G при условии, что редуцирующее отображение эквивариантно: $p(T_g(x)) = T_g(p(x)) \forall x \in E, g \in G$. В этом случае квазиинвариантное подмногообразие $\mathcal{N} := \varphi(\mathbb{R}^n)$ инвариантно (φ — маргинальное отображение).

Основное условие (назовем его *условием $\mathcal{D}$*) состоит в требовании гладкости действия G на пространстве ключевых параметров $\mathbb{R}^n$. Индуцированное действие G на подмногообразии $\mathcal{N}$ автоматически является гладким.

Очевидно, что при выполнении условия $\mathcal{D}$ сохраняются все утверждения о бифуркациях орбит экстремалей, полученные на основе анализа ключевой функции в случае гладкого действия G на H .

2.16.3 О бифуркации циклов динамических систем

Очевидно, что существует прямая аналогия рассмотренных выше резонансов с резонансами в теории бифуркаций циклов динамических систем из сложного фокуса [3], [8], [15]. Так же, как и в теории динамических систем, наиболее сложными для изучения являются случаи резонансов с порядками, не превышающими четырех:

$$|m| := \sum_{k=1}^q |m_k| \leq 4$$

(сильные резонансы).

Обратимся к модельному уравнению

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \kappa_2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \kappa_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \kappa_0 w + \beta w^3 = 0.$$

Прикладной и теоретический интерес представляет решение типа «бегущей волны» $w(x, t) = p(kx + \omega t)$, поиск которого сводится к построению периодического решения уравнения

$$\tilde{\kappa}_2 \frac{\partial^4 p}{\partial x^4} + \tilde{\kappa}_1 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \tilde{\kappa}_0 p + \beta p^3 = 0, \quad \tilde{\kappa}_1 = k^2 \kappa_1 + \omega^2,$$

определяющего экстремали функционала (энергии)

$$V(p, \kappa) = \frac{1}{T} \int_0^T \left(\frac{\kappa_2}{2} \left(\frac{d^2 p}{dx^2} \right)^2 - \frac{\tilde{\kappa}_1}{2} \left(\frac{dp}{dx} \right)^2 + \frac{\kappa_0}{2} p^2 + \frac{\beta}{4} p^4 \right) dx.$$

Длительное время изучались лишь одномодовые волны, представимые в виде $w(x, t) = r \sin(kx - \omega t + \varphi) + o(r)$, где r, k, ω, φ — волновые параметры (амплитуда, волновое число, частота, фазовый сдвиг), зависящие от $\delta := \kappa - \bar{\kappa}$ ($\kappa = (\kappa_0, \kappa_1, \kappa_2)^\top$, $\bar{\kappa}$ — критическое значение вектора κ).

Однако легко убедиться, что данное уравнение допускает 4-мерные вырождения, порождающие 2-модовые бифуркации периодических волн с интересными геометрическими и физическими свойствами. Такие волны допускают представление

$$w(x, t) = r_1 \sin(py + \varphi_1) + r_2 \sin(qy + \varphi_2) + o(r_1, r_2),$$

$$y = kx - \omega t, \quad p, q \in \mathbf{Z}, \quad (p, q) = 1.$$

Разнообразие профилей и «скоростных» свойств бифурцирующих волн определяются двумя первыми слагаемыми этого разложения.

Можно показать, что в случае 4-мерного вырождения в нуле с резонансом 1 : 2 уравнения $f(x, 0) = 0$, где $f(x, \lambda)$ — градиент фредгольмова функционала $V(x, \lambda)$, ключевая функция

$$W(\xi, \delta) = \inf_{p: \langle p, e_j \rangle = \xi_j} V(p, \bar{\lambda} + \delta)$$

(здесь e_1, e_2 и e_3, e_4 — ортонормированные базисные пары векторов в подпространствах N_1 и N_2 в пространстве мод N , $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)^\top$, $\xi_j = \langle x, e_j \rangle$), рассмотренная в полярных координатах

$$\xi_1 = r_1 \cos(\varphi_1), \quad \xi_2 = r_1 \sin(\varphi_1), \quad \xi_3 = r_2 \cos(\varphi_2), \quad \xi_4 = r_2 \sin(\varphi_2),$$

допускает представление в виде

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2}(\alpha_1 r_1^2 + \alpha_2 r_2^2) + \frac{1}{4}(A_1 r_1^4 + A_2 r_2^4 + 2B r_1^2 r_2^2) + C r_1^2 r_2 \cos(\psi + \theta) + \\
& + \vartheta(r_1^2, r_2^2) + r_1^2 r_2 \varrho(r_1^2, r_2, \psi),
\end{aligned} \tag{2.28}$$

где A_1, A_2, B, C — вычисляемые константы, $\psi = \varphi_2 - 2\varphi_1$, ϑ , ϱ — некоторые гладкие функции, соответственно, двух и трех переменных, для которых

$$\vartheta(r_1^2, r_2^2) = O(|\xi|^6), \quad \varrho(r_1^2, r_2, \psi) = O(|\xi|^2).$$

Доказательство основано на несложно проверяемом соотношении

$$\begin{aligned}
& W(r_1 \cos(\varphi_1), r_1 \sin(\varphi_1), r_2 \cos(\varphi_2), r_2 \sin(\varphi_2), \delta) = \\
& = W(r_1, 0, r_2 \cos(\psi), r_2 \sin(\psi), \delta).
\end{aligned}$$

Здесь учитывается также четность ключевой функции по паре переменных ξ_1, ξ_2 (следствие круговой симметрии).

Если $A_2 \cdot C \neq 0$, то существование бифурцирующих критических орбит ключевой функции (2.28) и первые асимптотики их зависимости от закритического приращения управляющего параметра определяется полиномом

$$-\frac{1}{2}(\alpha_1 r_1^2 + \alpha_2 r_2^2) + \frac{1}{4}(A_1 r_1^4 + A_2 r_2^4 + 2B r_1^2 r_2^2) + C r_1^2 r_2 \cos(\psi + \theta)$$

(главной частью выражения (2.28)).

Замечание. Дополнительные симметрии (например, условие четности) могут привести к равенству $C = 0$, что в случае $A_1 \cdot A_2 - B^2 \neq 0$ несколько упрощает задачу исследования критических точек ключевой функции (несмотря на повышение кратности нуля в амплитудных уравнениях). Именно такая ситуация возникает при изучении 2-модовых бифуркаций периодических волн в упругой балке на упругом основании.

Эти утверждения будут ниже воспроизведены в несколько более общей ситуации.

2.17 Многомодовые вырождения экстремалей функционалов с круговой симметрией

Для ряда фундаментальных и прикладных вопросов циклогенеза можно успешно использовать общий функционально-аналитический подход — в рамках теории бифуркаций орбит экстремалей $SO(2)$ -инвариантных (с круговой симметрией) фредгольмовых функционалов. В этой связи представляет интерес изучение нормальных форм вторично редуцированных ключевых функций $W(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}^3$, соответствующие резонансам $1 : 2 : 3$, $1 : 2 : 4$, $p : q : p + q$ и др. (функция $W(\xi)$ получается посредством вариационного метода Ляпунова – Шмидта с использованием вторичных редукций (по фазовым переменным) и условий Дж. Мазера о конечной определенности ростка гладкой функции). В анализе нормализованных ключевых функций весьма полезным бывает переход к краевой или угловой особенности, позволяющий упростить описание геометрии каустики и ветвей бифурцирующих орбит экстремалей. Именно поэтому играет важную роль в изучении многомодового циклогенеза теория угловых и краевых особенностей.

Проблема многих мод возникает не только в задачах механики упругих тел, но и в теории фазовых переходов в кристаллах, в теории нелинейных волн, при моделировании автоколебаний в RC-генераторах, в моделях экономики, популяционной динамики, химической кинетики и др. разделах современного естествознания. Соответствующие модельные уравнения не допускают, как правило, общих формул для своих решений. Алгоритмов приближенного построения и качественного анализа периодических колебаний, бифурцирующих из сложных вырожденных, разработано крайне мало.

В связи с появлением в настоящее время скоростных компьютеров и эффективных программно-вычислительных комплексов, появились и новые возможности в анализе циклогенеза.

2.18 Пример вырождения по шести модам

Изложенная выше процедура приближенного вычисления и анализа критических $SO(2)$ -орбит, служащих прототипом периодических колебаний динамических систем. В качестве демонстрационного модельного уравнения, дающего вырождение по шести модам, можно рассмотреть ОДУ шестого порядка

$$\frac{d^6 w}{dt^6} + a_2 \frac{d^4 w}{dt^4} + a_1 \frac{d^2 w}{dt^2} + a_0 w + U \left(w, \frac{dw}{dt}, \frac{d^2 w}{dt^2}, \dots, \frac{d^6 w}{dt^6} \right) = 0, \quad (2.29)$$

$$U(w, w_1, w_2, \dots, w_6) = O(w^2 + w_1^2 + \dots + w_6^2).$$

Под двойным резонансом (типа $p_1 : p_2 : p_3$) уравнения 2.29 подразумевается случай одновременного существования (для соответствующего линеаризованного ОДУ) трех периодических решений $\exp(\frac{2\pi i p_k}{T} t)$, $T > 0$, $p_k \in \mathbb{Z}$, $k = 1, 2, 3$, $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq p_3$, $HOD(p_1, p_2, p_3) = 1$. Резонанс $p_1 : p_2 : p_3$ называется сильным, если существует такой ненулевой набор целых чисел n_1, n_2, n_3 , что $n_1 p_1 + n_2 p_2 + n_3 p_3 = 0$ и $|n_1| + |n_2| + |n_3| \leq 4$. Число $|n_1| + |n_2| + |n_3|$ называется порядком резонансного соотношения $n_1 p_1 + n_2 p_2 + n_3 p_3 = 0$. Число, наименьшее из порядков резонансных соотношений, называется порядком данного резонанса. Ниже предполагается, что $1 \leq p_1 < p_2 < p_3$ (резонансы типа $1 : 1$ отсутствуют). Резонансные соотношения порядка ≤ 4 называются сильными, а остальные — слабыми.

Таким образом, резонанс, для которого существует сильное резонансное соотношение, называется сильным (слабым в противном случае).

Основное предположение, которого мы придерживаемся, — условие потенциальности: уравнение (2.29) служит уравнением Эйлера – Лагранжа периодических экстремалей функционала

$$V(w, a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{L} \left(w, \frac{dw}{dt}, \frac{d^2 w}{dt^2}, \frac{d^3 w}{dt^3} \right) dt, \quad (2.30)$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{d^3 w}{dt^3} \right)^2 - a_2 \left(\frac{d^2 w}{dt^2} \right)^2 + a_1 \left(\frac{dw}{dt} \right)^2 - a_0 w^2 \right) + \mathcal{U},$$

$$\mathcal{U} = \mathcal{U} \left(w, \frac{dw}{dt}, \frac{d^2 w}{dt^2}, \frac{d^3 w}{dt^3} \right), \quad \mathcal{U}(w, w_1, w_2, w_3) = o(w^2 + w_1^2 + w_2^2 + w_3^2).$$

Этот функционал можно считать заданным, например, на банаховом пространстве 2π -периодических функций класса C^6 (со значениями на вещественной оси).

Здесь также применима центральная конструктивная идея книги — сведение (редукция) задачи об изучении бифурцирующих критических орбит функционала к задаче о бифуркации орбит $SO(2)$ -инвариантной гладкой функции на конечномерном пространстве. Нас интересует в первую очередь методика изучения бифурцирующих орбит в случаях резонансов, имеющих особую практическую важность, — $1 : 2 : 3$, $1 : 2 : 4$, $p : q : p + q$ и др.

Как и выше, можно рассмотреть уравнение в тройке последовательно вложенных (непрерывно) банаховых пространств $E \subset F \subset H$, H — гильбертово пространство, E плотно в H . Рассмотрение тройки пространств позволяет одновременно учитывать круговую симметрию и спектральное строение линейной части уравнения (при построении мод бифуркации и выводе асимптотических формул для экстремалей).

Анализ бифуркационных эффектов можно осуществить посредством модифицированной вариационной версии метода Ляпунова – Шмидта, позволяющей свести анализ функционала (2.30) к анализу ключевой функции (от шести ключевых переменных $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, \xi_6$)

$$W(\xi, a) = \inf_{w: \langle w, e_k \rangle = \xi_k} V(w, a), \quad (2.31)$$

где $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ — набор мод бифуркации [31], [34].

При выяснении взаимных примыканий экстремалей разного типа возникает необходимость в получении информации о структуре фазового портрета динамической системы $\dot{w} = -\text{grad } V(w, a)$ (градиент задан в скалярном произведении $\langle p, q \rangle$ пространства H). Если известна ключевая функция W , то эта структура определяется фазовым портретом градиентной динамической системы $\dot{\xi} = -\text{grad } W(\xi, a)$.

2.19 Вычисление главной части ключевой функции

Итак, возвращаясь к общему рассмотрению, предположим, что задано операторное уравнение

$$f(x) = b, \quad x \in E, \quad b \in F,$$

в котором f — гладкое фредгольмово отображение нулевого индекса и выполнены стандартные условия:

- а) $E \subset F \subset H$ — тройка непрерывно вложенных пространств (H — гильбертово пространство);
- б) E плотно в H (это означает, что любой элемент из H может быть представлен как предел последовательности из E). Кроме того, из плотности E в H , следует, что F тоже плотно в H .

Предположим также, что для гладкого отображения $f : \mathcal{U} \subset E \rightarrow F$ имеется такой гладкий функционал $V : \mathcal{U} \rightarrow R$, что $f = \text{grad}_H V$ или, что эквивалентно,

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x)h = \langle f(x), h \rangle_H, \quad \forall x \in \mathcal{U}, \quad h \in E,$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в гильбертовом пространстве (функционал V — потенциал отображения f).

Пусть выполнено условие

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial x}(x)h, h \right\rangle > 0 \quad \forall (x, h) \in E \times (L \setminus \{0\}), \quad (2.32)$$

где $L = E \cap N^\perp$, $N = \text{span}\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, $N^\perp$ — ортогональное дополнение к N в H , $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ — некоторая ортонормированная в H система векторов из E . При этом определена ключевая функция

$$W(\xi) = \inf_{x: \langle x, e_i \rangle = \xi_i, \forall i} V(x) \quad \xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)^\top. \quad (2.33)$$

2.19.1 Случай резонанса 1 : 2

Пусть задан гомоморфизм (вообще говоря, негладкий) $T : G \rightarrow O(H)$ группы $G = SO(2)$ в группу ортогональных линейных преобразований

гильбертова пространства H , определяющий ортогональное действие (вообще говоря, не непрерывное)

$$G \times H \rightarrow H, \quad (g, w) \mapsto y = T_g(w) \quad \forall (g, w) \in G \times H.$$

Будем предполагать, что пространства E , F и функционал V_δ инвариантны относительно данного действия:

$$T_g(E) \subset E, \quad T_g(F) \subset F, \quad V_\delta(T_g(\cdot)) = V_\delta(\cdot),$$

наряду с эквивариантностью редуцирующей субмерсии

$$\mathbf{p} : x \mapsto \xi, \quad x \in \mathcal{U} \subset E, \quad \xi \in \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$$

($\mathcal{U}$, $\mathcal{O}$ — некоторые открытые подмножества). Ключевая функция W_δ также будет инвариантной.

Условие состоит круговой симметрии в требовании гладкости действия группы $SO(2)$ в пространстве ключевых параметров. Это условие выполнено, если, например, отображение

$$R : g \longrightarrow SO(N), \quad R_g := T_g|_N, \quad N := \text{Ker} \frac{\partial f_0}{\partial x}(0), \quad (2.34)$$

является гладким ($\dim N = n$).

Ниже всюду предполагается, что отображение $\mathcal{T} : SO(2) \longrightarrow O(H)$ из группы $SO(2)$ в группу ортогональных линейных преобразований гильбертова пространства H является слабо гладким. Последнее означает, что индуцированное действие $SO(2)$ на любом конечномерном инвариантном подпространстве $N \subset H$ является гладким.

В рассмотренных ниже случаях индуцированное действие $SO(2)$ на пространстве ключевых параметров $\mathbb{R}^n$ предполагается полусвободным (начало координат — единственная неподвижная точка). В таком случае $n = 2m$. Если при этом отождествить вектор $\xi \in \mathbb{R}^{2m}$ с комплексным вектором $z = (z_1, \dots, z_m)^\top \in \mathbb{C}^m$, $z_k = \xi_{2k-1} + i\xi_{2k}$, то условие инвариантности W_δ можно записать в виде соотношения

$$W_\delta(\tilde{z}) = W_\delta(z), \quad \tilde{z} = (\exp(i p_1 \varphi) z_1, \dots, \exp(i p_m \varphi) z_m)^\top, \quad p_k \in \mathbb{Z},$$

(инвариантность относительно действия

$$\{\exp(i\varphi), z\} \mapsto (\exp(i p_1 \varphi) z_1, \dots, \exp(i p_m \varphi) z_m)^\top \quad (2.35)$$

группы $SO(2)$).

Множество ненулевых критических точек ключевой функции и их образов относительно маргинального отображения $\varphi_\delta : \mathbb{R}^n \longrightarrow E$ представляет собой набор одномерных подмногообразий (критических орбит действия (2.35), см. [68]), диффеоморфных окружности.

Теорема 2.3. (Ладыкина Е.В., Сапронов Ю.И. [31], [45]) .

В случае 4-мерного вырождения ($n = 2m = 4$) ключевая функция W_δ допускает представление в виде

$$-\frac{1}{2}(\alpha_1 I_1 + \alpha_2 I_2) + \frac{1}{3}(C_3 I_3 + C_4 I_4) + \frac{1}{4}(A_1 I_1^2 + A_2 I_2^2 + 2B I_1 I_2) + o(\|\xi\|^4), \quad (2.36)$$

где

$$\begin{aligned} I_1 &= \xi_1^2 + \xi_2^2, & I_2 &= \xi_3^2 + \xi_4^2, \\ I_3 &= (\xi_1^2 - \xi_2^2)\xi_3 + 2\xi_1\xi_2\xi_4, & I_4 &= 2\xi_1\xi_2\xi_3 - (\xi_1^2 - \xi_2^2)\xi_4 \end{aligned}$$

(полная система инвариантов действия (2.35) группы $SO(2)$ на $\mathbb{R}^4$), A_1, A_2, B, C_1, C_2 — вычисляемые константы, зависящие от δ (их точные значения в данный момент не важны).

Доказательство основано на асимптотическом представлении

$$W_\delta = U_\delta(\xi) + o(I_1^2, I_2^2, I_3^2, I_3 I_4), \quad (2.37)$$

где

$$U_\delta(\xi) = V \left(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \xi_3 e_3 + \xi_4 e_4 + \sum_{j:|j|=2}^3 a_j \xi^j \right)$$

— нелинейная ритцевская аппроксимация V по модам бифуркации e_1, e_2, e_3, e_4 , $a_j = a_j(\delta)$ — вычисляемые элементы пространства E , $\langle a_j, e_k \rangle = 0 \quad \forall j, k$.

После масштабирования и деления W_δ на подходящий множитель получим функцию

$$\widetilde{W}_\delta = \widetilde{U}_\delta(\xi) + o(\|\xi\|^4),$$

где

$$\widetilde{U}_\delta(\xi) = -\frac{1}{2}(\beta_1 I_1 + \beta_2 I_2) + \frac{1}{3}(C_1 I_3 + C_4 I_4) + \frac{1}{4}(I_1^2 + I_2^2 + 2a I_1 I_2).$$

Таким образом, получаем следующее утверждение:

Теорема 2.4. (Ладыкина Е.В., Сапронов Ю.И. [31], [45]) .

В случае 4-мерного вырождения с резонансом $1 : 2$ ключевая функция W_δ допускает в полярных координатах

$$\xi_1 = r_1 \cos(\varphi_1), \quad \xi_2 = r_1 \sin(\varphi_1), \quad \xi_3 = r_2 \cos(\varphi_2), \quad \xi_4 = r_2 \sin(\varphi_2), \quad (2.38)$$

представление (после масштабирования и деления на нормирующую константу) в виде

$$\begin{aligned} \widetilde{W} = & -\frac{1}{2}(\beta_1 r_1^2 + \beta_2 r_2^2) + c r_1^2 r_2 \cos(\psi) + \frac{1}{4}(r_1^4 + r_2^4 + 2a r_1^2 r_2^2) + \\ & + \vartheta(r_1^2, r_2^2) + r_1^2 r_2 \varrho(r_1^2, r_2, \psi), \quad a > -1, \end{aligned} \quad (2.39)$$

где $a = a(\delta)$, $c = c(\delta)$ — вычисляемые константы, $\psi = \varphi_2 - 2\varphi_1 + \text{const}$, ϑ , ϱ — некоторые гладкие функции, соответственно, двух и трех переменных, для которых

$$\vartheta(r_1^2, r_2^2) = O(|\xi|^6), \quad \varrho(r_1^2, r_2, \psi) = O(|\xi|^2).$$

Очевидно, что множество ненулевых критических точек функции W_δ представляют собой набор одномерных подмногообразий, диффеоморфных окружности.

Условие стационарности орбиты по фазе $\psi = 2\varphi_1 - \varphi_2$ приводит к следующим критическим значениям фазы:

$$\psi = 0 + O(|\xi|^2), \quad \pi + O(|\xi|^2).$$

Дальнейшее изучение условий стационарности по амплитудам r_1, r_2 приводит к задаче о бифуркации критических точек из критической точки с омбилической особенностью параболического типа [72]. В этом случае локальной нормальной формой ключевой функции (при нулевых значениях возмущающих параметров) является полином

$$\widetilde{W}_0 = r_2^4 \pm r_1^2 r_2.$$

Из теории особенностей гладких функций известно [4], [72], что критическая точка с особенностью параболической омбилики имеет в нуле кратность $\mu = 5$.

Заметим, что функция $r_2^4 \pm r_1^2 r_2$ симметрична относительно следующей пары преобразований:

$$I_1 : (r_1, r_2) \longrightarrow (-r_1, r_2), \quad I_2 : (0, r_2) \longrightarrow (0, -r_2).$$

Так как и функция $\widetilde{W}_\delta$ (см. (2.39)) инвариантна относительно преобразований I_1, I_2 (вследствие $SO(2)$ -эквивариантности ключевой функции), то она эквивалентна (в классе деформаций особенностей с симметрией относительно преобразований I_1, I_2) следующей (миниверсальной) развертке ростка функции $\widetilde{W}_0$ в нуле [92]:

$$W_\delta(r_1, r_2) = r_2^4 \pm r_1^2 r_2 + \delta_1 r_1^2 + \delta_2 r_2^2.$$

Стандартная замена $r_1^2 = u, u \geq 0$, приводит к эквивалентной задаче о бифуркациях экстремалей из краевой особой точки [4] для следующей развертки (ниже введено обозначение $v = r_2$):

$$\widehat{W}_\delta(u, v) = v^4 \pm uv + \delta_1 u + \delta_2 v^2, \quad u \geq 0. \quad (2.40)$$

Полином $v^4 \pm uv$ можно заменить полиномом $v^4 + uv$, отбросив ограничение $v \geq 0$ (критические точки с отрицательными значениями v переходят в критические точки с положительными значениями v после смены знака во втором слагаемом полинома $v^4 + uv$).

Переход от функции $\widetilde{W}_\delta$ к краевой особенности функции $v^4 + uv, u \geq 0$ и ее деформации не отражается на каустике, которая представляет собой росток в нуле следующего объединения множеств:

$$\Sigma = \Sigma_1^{int} \cup \Sigma_1^{ext} \cup \Sigma_0,$$

где $\Sigma_1^{int}, \Sigma_1^{ext}$ — подмножества (компоненты) каустики, отвечающие за вырождение краевых особенностей вдоль края и, соответственно, по нормали, а Σ_0 — компонента, отвечающая за вырождение внутренних (некраевых) критических точек.

Нетрудно проверить, что в рассмотренной задаче компонента Σ_0 является пустой. Следовательно, построение параметризации каустики сводится к параметризации лишь ее «краевых» компонент.

Вырождение вдоль края (внутреннее вырождение)

Для функции $\widehat{W}_\delta(u, v) = v^4 + uv + \delta_1 u + \delta_2 v^2$ рассмотрим ее краевые критические точки, в которых вторая частная производная по v обращается в нуль, то есть выполняются следующие соотношения:

$$\frac{\partial \widehat{W}_\delta}{\partial v}(0, v) = \frac{\partial^2 \widehat{W}_\delta}{\partial v^2}(0, v) = 0,$$

или

$$4v^3 + 2\delta_2 v = 12v^2 + 2\delta_2 = 0.$$

На основе этих соотношений легко увидеть, что множество Σ_1^{int} задается уравнением $\delta_2 = 0$. Переход параметра δ_2 сверху вниз через нуль приводит к рождению пары симметрично расположенных точек минимума (относительно края). Нуль становится при этом точкой максимума. Индекс Морса всех краевых критических точек изменяется на единицу при смене знака производной W в нуле по нормали к краю (по переменной u).

Вырождение вдоль нормали (внешнее вырождение)

Рассмотрим краевые критические точки функции $\widehat{W}$, в которых частная производная по u обращается в нуль (внешнее вырождение):

$$\frac{\partial \widehat{W}_\delta}{\partial u}(0, v) = 4v^3 + 2\delta_2 v = 0.$$

После сопоставления последнего соотношения с уравнением критических краевых точек нетрудно заметить, что множество Σ_1^{ext} задается уравнением

$$(\delta_2 + 2\delta_1^2)\delta_1 = 0.$$

Таким образом, каустика функции $\widehat{W}_\delta(u, v)$ получается объединением координатного креста $\delta_1\delta_2 = 0$ с параболой $\delta_2 + 2\delta_1^2 = 0$.

2.19.2 Трехмодовые бифуркации. Базисные инварианты

В общем случае трехмодовой бифуркации ключевая функция приобретает следующий вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^3 \delta_k I_k \right) + \frac{1}{4} \left(\sum_{k=1}^3 A_k I_k^2 + 2 \sum_{k,j=1}^3 B_{k,j} I_k I_j \right) + \\ + J + o(\|\xi\|^4), \end{aligned} \quad (2.41)$$

где $I_k = \xi_{2k-1}^2 + \xi_{2k}^2$ — стандартные инварианты, а J — линейная комбинация всех дополнительных (то есть кроме стандартных I_k) базисных инвариантов степени ≤ 4 для рассматриваемого действия.

Перечислим инварианты для ряда двойных резонансов. Вновь обратимся к комплексной форме вещественных многочленов:

$$z_k := \xi_{2k-1} + \xi_{2k} i.$$

Во всех случаях инвариантами действия окружности являются многочлены $I_k = |z_k|^2$, $k = 1, 2, 3$ (инварианты степени 2). Кроме того, имеются следующие инварианты степеней 3 и 4: $\bar{z}_1^2 z_2$, $\bar{z}_1 \bar{z}_2 z_3$, $\bar{z}_1 \bar{z}_3 z_2^2$, $\bar{z}_1^3 z_3$ — в случае $1 : 2 : 3$; $\bar{z}_1^2 z_2$, $\bar{z}_2^2 z_3$, $\bar{z}_1^2 \bar{z}_2 z_3$ — в случае $1 : 2 : 4$; $\bar{z}_1^2 z_2$, $\bar{z}_2^3 z_3$ — в случае $1 : 2 : 6$; $\bar{z}_1^3 z_2$, $\bar{z}_2^2 z_3$ — в случае $1 : 3 : 6$; $\bar{z}_1^3 z_2$, $\bar{z}_2^3 z_3$ — в случае $1 : 3 : 9$; $\bar{z}_1^3 z_2$, $\bar{z}_1 \bar{z}_2 z_3$ — в случае $1 : 3 : 4$ и т.д.

Последний набор инвариантов имеет место для серии резонансов $q : p : q + p$, $p + q \geq 5$. Для серии $q : p : 2q + p$, $p + q \geq 5$, имеется инвариант $\bar{z}_1^2 \bar{z}_2 z_3$, а для $q : p : q + 2p$ — $\bar{z}_1 \bar{z}_2^2 z_3$. Для серии $q : p : 2p$ — инвариант $\bar{z}_2^2 z_3$, а для $q : p : 3p$ — инвариант $\bar{z}_2^3 z_3$.

Если перейти к полярным координатам $z_k = r_k e^{i\varphi_k}$, то получим ключевую функцию в виде

$$\mathcal{W}_\delta = \sum_{j=1}^3 r_k^4 + \sum_{j < k} a_{j,k} r_j^2 r_k^2 + b_1 r_1^2 r_2 + b_2 r_2^2 r_3 + b_3 r_1 r_2 r_3 + \delta_1 r_1^2 + \delta_2 r_2^2 + \delta_3 r_3^2 + O(\|r\|^4),$$

$\{a_{j,k}, b_l\}$ — структурные параметры ($\{b_l\}$ зависят, вообще говоря, от φ), $\{\delta_j\}$ — малые параметры.

2.19.3 Случай резонанса $1 : 2 : 4$

Здесь мы ограничимся рассмотрением резонанса $1 : 2 : 4$ [34], случаи остальных резонансов исследуются аналогичным образом.

Пусть $\mathfrak{A}$ — якобиев идеал, порожденный компонентами градиента изучаемой функции, $\mathfrak{M}$ — максимальный идеал в кольце ростков гладких функций ($\mathfrak{M} = \langle x_1, x_3, x_3 \rangle$).

Теорема 2.5. *Ключевая функция $\mathcal{W}_\delta$, редуцированная по угловым переменным (в критической точке с резонансом $1 : 2 : 4$), приводится к следующему виду (нормальной форме):*

$$\mathcal{U}_\delta = x_3^4 + c x_1^2 x_3^2 + x_1^2 x_2 + x_2^2 x_3 + \delta_1 x_1^2 + \delta_2 x_2^2 + \delta_3 x_3^2,$$

c — параметр.

Доказательство проводится стандартным образом. Сначала вычисляется тейлоровское приближение $\widetilde{W}$ к ключевой функции до четвертого порядка (на пространстве ключевых переменных $\mathbb{R}^6$). Затем в трех плоскостях парных мод бифуркации вводятся полярные координаты. У записанной в этих координатах тейлоровской аппроксимации $\widetilde{W}$ ключевой функции определяются критические значения (трех) угловых переменных. После подстановки этих значений вместо угловых переменных получаем редуцированную главную часть в виде полинома $\mathcal{W}$ четвертой степени от трех радиальных переменных. Дальнейший процесс нормализации полученной функции $\mathcal{W}$ опирается на теорему Дж. Мазера об определяемости функции своей главной частью и на ряд соотношений, которые будут приведены ниже.

Легко проверить, что для градиента $\mathcal{U}_0$ имеет место представление

$$\begin{aligned} \text{grad } \mathcal{U}_0 &= (f_1, f_2, f_3)^\top = \\ &= (2x_1x_2 + 2c x_1x_3^2, \quad x_1^2 + 2x_2x_3, \quad x_2^2 + 4x_3^3 + 2c x_1^2x_3)^\top. \end{aligned}$$

Лемма 2.3. (см. [34]) *Для рассмотренной выше функции $\mathcal{U}_0$ выполняются следующие включения:*

$$\begin{aligned} \{x_1x_2, x_2^2\} &\in \mathfrak{A} \quad (\text{mod } \mathfrak{M}^3), \\ x_1^3 &\in \mathfrak{M} \cdot \mathfrak{A} \quad (\text{mod } \mathfrak{M}^4), \\ \{x_1x_3^3, x_3^4\} &\in \mathfrak{M} \cdot \mathfrak{A} \quad (\text{mod } \mathfrak{M}^5). \end{aligned}$$

Здесь $\mathfrak{A}$ — якобиев идеал (идеал, порожденный компонентами градиента $\mathcal{U}_0$), $Q = \mathbb{R}[[x_1, x_2, x_3]]/\mathfrak{A}$ — локальное кольцо особенности $\mathcal{U}_0$ в нуле.

Первые два включения выводятся непосредственно из «алгебраического строения» градиента, а последнее выводится из соотношений

$$x_1f_3 = 4x_1x_3^3 + x_1x_2^2 + 2c x_1^3x_3, \quad x_3f_3 - x_1f_1 = 4x_3^4 + x_2^2x_3 - 2x_1^2x_2.$$

Из леммы 2.3. вытекают следующие утверждения.

Лемма 2.4. *Для функции $\mathcal{U}$ имеют место следующие включения:*

$$\begin{aligned} \{x_1^4, x_1^3x_2, x_1^2x_2^2, x_1x_2^3, x_1^3x_3, x_1^2x_2x_3, x_1x_2^2x_3, x_2^3x_3, x_1x_2x_3^2, x_2^2x_3^2\} &\subset \mathfrak{M}^2 \cdot \mathfrak{A}, \\ \mathfrak{M}^5 &\subset \mathfrak{M}^2 \cdot \mathfrak{A}. \end{aligned}$$

Лемма 2.5. (см. [34]) *Мономы*

$$1, x_1, x_2, x_3, x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_1x_3, x_1^2x_3, x_1x_3^2, x_1^2x_3^2$$

образуют базис локального кольца Q особенности функции $\mathcal{U}_0$ в нуле.

Таким образом, ограниченная миниверсальная деформация этой функции имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} x_1^2x_2 + x_2^2x_3 + x_3^4 + c x_1^2x_3^2 + \lambda_1x_1 + \lambda_2x_2 + \lambda_3x_3 + \delta_1x_1^2 + \delta_2x_2^2 + \delta_3x_3^2 + \\ + \lambda_4x_1x_3 + \lambda_5x_1x_3^2 + \lambda_6x_1^2x_3. \end{aligned}$$

Обобщенно симметричная ограниченная миниверсальная деформация выглядит следующим образом:

$$x_1^2x_2 + x_2^2x_3 + x_3^4 + c x_1^2x_3^2 + \delta_1x_1^2 + \delta_2x_2^2 + \delta_3x_3^2, \quad c \neq 0.$$

Здесь имеется в виду симметрия относительно группы преобразований, порожденной следующими действиями:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ c_1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \\ x_3 \\ -c_1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ c_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_3 \\ -c_2 \end{pmatrix}.$$

Здесь c_1 — коэффициент при мономе $x_1^2x_2$: $c_1 = 1$, c_2 — коэффициент при $x_2^2x_3$: $c_2 = 1$.

2.19.4 Бифуркационный анализ ключевой функции посредством редукция к краевой особенности

После замены $x_1^2 = y_1$, $x_2 = y_2$, $x_3 = y_3$ получим функцию с краевой особенностью [4]

$$\overline{U}_\delta(0, y_2, y_3) = y_1y_2 + y_2^2y_3 + y_3^4 + c y_1y_3^2 + \delta_1y_1 + \delta_2y_2^2 + \delta_3y_3^2, \quad (2.42)$$

определенную на полупространстве $y_1 \geq 0$.

Каустик можно представить в виде $\Sigma = \Sigma_{0,1,1}^{int} \cup \Sigma_{0,1,1}^{ext} \cup \Sigma_{1,1,1}$, где $\Sigma_{0,1,1}^{int}$ и $\Sigma_{0,1,1}^{ext}$ — подмножества (компоненты) каустики, отвечающие за вырождение краевых особенностей вдоль края $y_1 = 0$ и, соответственно,

по нормали, а $\Sigma_{1,1,1}$ — компонента, отвечающая за вырождение внутренних (некраевых) критических точек. Рассмотрим эти компоненты.

Описание компоненты $\Sigma_{0,1,1}^{int}$ («следящей» за внутренним вырождением (вырождением вдоль края)) сводится к изучению функции $\bar{U}_\delta$. Рассмотрим ее (краевые) критические точки (в них частные производные по y_2, y_3 обращаются в нуль):

$$\begin{aligned}\bar{U}_\delta(0, y_2, y_3) &= y_2^2 y_3 + y_3^4 + \delta_2 y_2^2 + \delta_3 y_3^2 \\ \begin{cases} \frac{\partial \bar{U}}{\partial y_2} = 2y_2 y_3 + 2\delta_2 y_2 = 0; \\ \frac{\partial \bar{U}}{\partial y_3} = y_2^2 + 4y_3^3 + 2\delta_3 y_3 = 0. \end{cases}\end{aligned}$$

Следовательно, получаем три класса экстремалей:

1. $y_2 = 0, y_3 = 0$;
2. $y_2 = 0, y_3^2 = -\frac{\delta_3}{2}$;
3. $y_3 = -\delta_2, y_2^2 = 2\delta_2 \delta_3 + 4\delta_2^3$.

Так как для матрицы Гессе имеем

$$H_{0,1,1} = \begin{pmatrix} 2y_3 + 2\delta_2 & 2y_2 \\ 2y_2 & 12y_3^2 + 2\delta_3 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} y_3 + \delta_2 & y_2 \\ y_2 & 6y_3^2 + \delta_3 \end{pmatrix},$$

то для гессиана получаем

$$h_{0,1,1}^{int} = 4 \det \begin{pmatrix} y_3 + \delta_2 & y_2 \\ y_2 & 6y_3^2 + \delta_3 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, для первого класса ($y_2 = 0, y_3 = 0$) имеем

$$h_{0,1,1}^{int} = 4\delta_2 \delta_3 = 0 \implies (\delta_2 = 0) \vee (\delta_3 = 0).$$

Для второго класса ($y_2 = 0, y_3^2 = -\frac{\delta_3}{2}$)

$$h_{0,1,1}^{int} = 4 \begin{vmatrix} \delta_2 \pm \sqrt{-\frac{\delta_3}{2}} & 0 \\ 0 & \delta_3 \end{vmatrix} = 0 \implies (\delta_3 = 0) \vee (\delta_3 = -2\delta_2^2).$$

Для третьего класса ($y_3 = -\delta_2, y_2^2 = 2\delta_2 \delta_3 + 4\delta_2^3$) получаем

$$h_{0,1,1}^{int} = 4 \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ y_2 & 0 \end{vmatrix} = 4y_2^2 = 8(\delta_2 \delta_3 + 2\delta_2^3) = 0 \iff (\delta_2 = 0) \vee (\delta_3 = -2\delta_2^2).$$

Компонента $\Sigma_{0,1,1}^{ext}$, следящая за внешним вырождением (вырождением вдоль нормали) определяется рассмотрением (краевых) критических точек функции $\bar{U}_\delta$, в которых производная по y_1 обращается в нуль (внешнее вырождение):

$$h_{0,1,1}^{ext} = \frac{\partial \bar{U}_\delta}{\partial y_1}(0, y_2, y_3) = y_2 + c y_3^2 + \delta_1 = 0.$$

Следовательно, для первых двух классов получаем $\delta_1 = 0$, а для третьего класса: $2\delta_2\delta_3 + 4\delta_2^3 - \delta_1^4 - c^2\delta_2^4 - 2c\delta_1\delta_2^2 = 0$.

Компоненту $\Sigma_{1,1,1}^{ext}$, следящую за вырождением вне края нетрудно описать посредством редукции к одномерной особенности. Действительно, функция (2.42) имеет одномерное вырождение в начале координат (по переменным y_1, y_2 эта функция регулярна) и поэтому можно перейти к функции одной переменной

$$R(y_3) := \text{extr}_{y_1, y_2} \bar{U}_\delta(y).$$

Так как

$$\frac{\partial \bar{U}_\delta}{\partial y_1} = \delta_1 + y_2 + c y_3^2, \quad \frac{\partial \bar{U}_\delta}{\partial y_2} = y_1 + 2\delta_2 y_2 + 2y_2 y_3,$$

то для редуцированной функции получаем представление

$$R(y_3) = c^2 y_3^5 + (1 + \delta_2 c^2) y_3^4 + 2c \delta_1 y_3^3 + (2c \delta_1 \delta_2 + \delta_3) y_3^2 + \delta_1^2 y_3 + \text{const},$$

на основе которого нетрудно получить компьютерные изображения $\Sigma_{1,1,1}^{ext}$ и перечислить расклады критических точек.

2.20 Параметризации каустик на основе алгоритма Релея – Шредингера

Имеется альтернативный подход к локальному изучению геометрии каустики и построению параметризации ее стратов, основанный на прямом описании множества $\mathcal{P}$ параболических точек функционала $V(x, \lambda)$ (точек, в которых вырожден второй дифференциал) [93], [89]. Множество $\mathcal{P}$ можно рассматривать как спектр (в терминологии общей теории операторных пучков) (x, λ) -семейства линейных операторов, порожденных вторыми дифференциалами. Для построения параметризации $\mathcal{P}$ можно воспользоваться теорией возмущений симметричных линейных операторов, основанной на вариационном методе [62].

2.20.1 Прямой подход к описанию каустики

Новый подход к построению параметризации каустики, свободный от условия версальности параметрической деформации и более экономный с точки зрения вычислительных затрат (по сравнению с подходом, основанном на переходе к ключевой функции), предложен в [89]. Его основу составляет теория Релея – Шредингера [85] возмущений симметричных линейных операторов или, более точно, алгоритм Релея – Шредингера вычисления возмущенных простых собственных значений и собственных векторов, разложенных в степенные ряды по малым приращениям параметров.

В «практических» задачах ключевая функция W функционала V разыскивается в виде полиномиальной нормальной формы

$$W_0(\xi) + \sum_{k \in K} \alpha_k(\lambda) \xi^k$$

(K — конечное подмножество в $\mathbf{Z}_+^n$, W_0 — полином). Если деформация миниверсальна, то отображение

$$\pi : \lambda \longmapsto \alpha = (\alpha_k(\lambda))_{k \in K}$$

субмерсивно в нуле. Следовательно,

$$\Sigma(V) = \pi^{-1}(\Sigma(W)),$$

где $W(\xi, \alpha) = W_0(\xi) + \sum_{k \in K} \alpha_k \xi^k$, $\alpha = \{\alpha_k\}_{k \in K}$, а $\Sigma(V)$ и $\Sigma(W)$ — каустики. Из этого соотношения следует, что Σ_V совпадает с декартовым произведением $\Sigma(W)$ на бесконечномерный диск.

Для выяснения точного расположения каустики в пространстве «управляющих» параметров требуется построение формул зависимости α и β от δ, q , что представляет собой весьма сложную вычислительную задачу.

Прямой же подход, основанный на теории возмущений линейных операторов, требует более малого объема вычислительных затрат.

2.20.2 Параболические множества

Пусть $V(x, \lambda)$ — гладкий фредгольмов функционал нулевого индекса, $x \in E$, $\lambda \in \Lambda$, $\Lambda \subset L$ (Λ — открытое подмножество в некотором бана-

ховом пространстве L), и пусть при этом $f(x, \lambda) = \text{grad}_x V(x, \lambda)$ — градиентное векторное поле, определенное в тройке пространств $E \subset F \subset H$ (F — пространство значений значений градиента, H — гильбертово пространство). Как и ранее, предполагается, что E непрерывно вложено в F , F непрерывно вложено в H и E плотно в H .

В декартовом произведении $\mathbb{R}^m \times \Lambda$ рассмотрим подмножество (многообразие катастроф)

$$K = \{(\bar{x}, \bar{\lambda}) \in E \times \Lambda \mid f(\bar{x}, \bar{\lambda}) = 0, \quad \dim \text{Ker} \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{\lambda}) > 0\}.$$

Пусть $P : E \times \Lambda \longrightarrow \Lambda$ — проекция, $P(x, \lambda) = \lambda$. Ее образ $\Sigma = P(K)$ совпадает с каустикой семейства функционалов $V(x, \lambda)$.

Предположим, что функционал имеет вид

$$V(x, \lambda) = V_0(x, \delta) - \langle q, x \rangle, \quad q \in F. \quad (2.43)$$

($\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в H). Под параметром λ здесь подразумевается пара (δ, q) .

В соответствии с (2.43) имеем разложения $f(x, \delta, q) = f_0(x, \delta) - q$ и

$$A(x, \delta) := \frac{\partial f}{\partial x}(x, \delta, q) = \frac{\partial f_0}{\partial x}(x, \delta)$$

(оператор Гессе не зависит от q). Пусть $A_0 = A(0, 0)$, тогда $A(x, \delta) = A_0 + R(x, \delta)$ ($R(0, 0) = 0$).

Точка $a \in E$ называется параболической для $V(\cdot, \delta)$, если существует $h \in E$, $h \neq 0$, такое, что $\frac{\partial f}{\partial x}(a, \delta)h = 0$. Другими словами, a — спектральное значение операторного пучка $A(x, \delta)$ (при фиксированном δ).

Итак, наличие вырожденной критической точки a при заданном значении параметра λ означает одновременность следующих двух событий: 1) точка a является параболической и 2) точка a является критической для функционала V . Так как второй дифференциал (2.43) не зависит от q , то описание каустики целесообразно начать с описания параболических множеств $\mathcal{P}_\delta$ (множеств всех параболических точек при различных δ). Пусть

$$\mathcal{P} := \bigcup_{\delta} (\mathcal{P}_\delta, \delta), \quad \mathcal{P} \subset E \times \mathbb{R}^m$$

(это множество также будем называть параболическим). Предположим, что нам удалось дать аналитическое описание некоторой части множества

$\mathcal{P}$ в виде системы гладких параметрических уравнений

$$\left. \begin{aligned} \delta &= \psi(z), \\ x &= g(z), \end{aligned} \right\} \quad (2.44)$$

$z \in Z$ (Z — область в некотором банаховом пространстве). Тогда, очевидно, соответствующая часть каустики функционала (2.43) определяется следующей системой параметрических уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \delta &= \psi(z), \\ q &= f_0(g(z), \psi(z)). \end{aligned} \right\} \quad (2.45)$$

Итак, наша первоначальная цель — отыскание уравнений параболического множества или отдельных его компонент (в виде соотношения (2.44)).

2.20.3 Случай простого собственного значения

В соответствии с вариационным принципом [62], собственные значения и векторы симметричного оператора $A(\varepsilon)$ ($\varepsilon = (x, \delta) \in \mathcal{E}$ — открытое подмножество в $E \times \mathbb{R}^m$) являются, соответственно, критическими значениями и критическими точками квадратичной формы $2W_\varepsilon(h)$ на пересечении σ единичной сферы в H с E , где

$$W_\varepsilon(h) = \frac{1}{2} \langle A(\varepsilon)h, h \rangle. \quad (2.46)$$

Для наименьшего собственного значения имеет место следующее представление:

$$\alpha(\varepsilon) = 2 \inf_{h \in O(e_0)} W_\varepsilon(h) \quad (2.47)$$

($O(e_0)$ — окрестность e_0 в σ). Функция $\alpha(\delta)$ является гладкой, что вытекает из следующего утверждения:

Теорема 2.6. *Если $e_0 \in \sigma$ — простой собственный вектор A_0 , то при достаточно малых ε вблизи e_0 на σ существует единственный простой собственный вектор $e(\varepsilon)$ оператора $A(\varepsilon)$, этот вектор гладко зависит от ε и допускает следующее асимптотическое представление (формула Релея – Шредингера):*

$$e(\varepsilon) = e_0 + \mathcal{A}(\varepsilon)e_0 + o(\varepsilon), \quad (2.48)$$

$$\mathcal{A}(\varepsilon) = -\overline{A}_0^{-1}(A_1(\varepsilon) - \mu(\varepsilon)I), \quad (2.49)$$

где

$$\mu(\varepsilon) = \langle (A_1(\varepsilon)e_0, e_0), \quad \overline{A}_0 = A_0|_{T_{e_0}(M)},$$

$A_1(\varepsilon)$ — главная линейная часть в операторном пучке $R(\varepsilon) := A(\varepsilon) - A_0$ (A_1 — линейный оператор $\mathcal{E} \rightarrow L(E, F)$).

Доказательство существования и единственности возмущенного собственного вектора вытекает из теоремы о неявной функции для уравнения в банаховом пространстве [52].

Вывод соотношения (2.48) и асимптотических представлений более высокого порядка производится методом неопределенных коэффициентов.

Замечание 2.3. Из теоремы 2.6. и соотношения (2.47) получаем представление для возмущенного собственного значения

$$\alpha(\varepsilon) = \mu(\varepsilon) + o(\varepsilon), \quad \mu(\varepsilon) = \langle (A_1(\varepsilon)e_0, e_0). \quad (2.50)$$

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.7. Если $e_0 \in \sigma$ — простой собственный вектор A_0 , то при достаточно малых ε вблизи e_0 на σ дискриминантное множество $\text{Diskr}(W)$ квадратичного функционала W на σ определяется уравнением

$$\alpha(\varepsilon) = 0, \quad (2.51)$$

где $\alpha(\varepsilon)$ задается соотношениями (2.47), (2.50).

2.20.4 Вычисление асимптотик более высокого порядка

Рассмотрим уравнение

$$\nabla^1 W_\varepsilon(e) = A(\varepsilon)e - 2W_\varepsilon(e)e = A(\varepsilon)e - \langle Ae, e \rangle e = 0, \quad (2.52)$$

$$\begin{aligned} A(\varepsilon) &= A_0 + R(\varepsilon), \\ R(\varepsilon) &= R^{(1)}(\varepsilon) + R^{(2)}(\varepsilon, \varepsilon) + \dots = \sum_k R^{(k)}(\varepsilon), \\ R^{(k)}(\varepsilon) &:= R^{(k)}(\underbrace{\varepsilon, \dots, \varepsilon}_k), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e(\varepsilon) &= e^{(1)}(\varepsilon) + e^{(2)}(\varepsilon, \varepsilon) + \dots = \sum_k R^{(k)}(\varepsilon), \\
e^{(k)}(\varepsilon) &:= e^{(k)}(\underbrace{\varepsilon, \dots, \varepsilon}_k) = \mathcal{E}^{(k)}(\varepsilon)e_0, \quad e^{(0)} = e_0. \\
e(\varepsilon) &= e_0 + \mathcal{E}^{(1)}(\varepsilon)e_0 + \mathcal{E}^{(2)}(\varepsilon, \varepsilon)e_0 + \dots = (I + \mathcal{E}(\varepsilon))e_0.
\end{aligned}$$

Из (2.52) получаем

$$\sum_{k,l} R^{(k)}(\varepsilon)e^{(l)}(\varepsilon) - \left\langle \sum_{r,s,p,q} R^{(r)}(\varepsilon)e^{(s)}(\varepsilon), e^{(p)}(\varepsilon) \right\rangle e^{(q)}(\varepsilon) = 0.$$

Сравнив слагаемые с одинаковыми степенями, получим соотношения

$$A_0 e^{(1)}(\varepsilon) + R^{(1)}(\varepsilon)e_0 - \left\langle R^{(1)}(\varepsilon)e_0, e_0 \right\rangle e_0 = 0, \quad (2.53)$$

$$\begin{aligned}
A_0 e^{(2)}(\varepsilon) + R^{(2)}(\varepsilon)e_0 + R^{(1)}(\varepsilon)e^{(1)}(\varepsilon) - \left\langle R^{(2)}(\varepsilon)e_0, e_0 \right\rangle e_0 - \\
- 2 \left\langle R^{(1)}(\varepsilon)e^{(1)}(\varepsilon), e_0 \right\rangle e_0 - \left\langle R^{(1)}(\varepsilon)e_0, e_0 \right\rangle e^{(1)}(\varepsilon) - \\
- \left\langle A_0 e^{(1)}(\varepsilon), e^{(1)}(\varepsilon) \right\rangle e_0 = 0
\end{aligned} \quad (2.54)$$

и так далее.

Введем операторы

$$B^{(k)}(\varepsilon) := R^{(k)}(\varepsilon) - \mu^{(k)}(\varepsilon) I, \quad \mu^{(k)}(\varepsilon) := \left\langle R^{(k)}(\varepsilon)e_0, e_0 \right\rangle.$$

Тогда равенства (2.53)–(2.54) приобретут следующую компактную форму:

$$A_0 e^{(1)}(\varepsilon) + B^{(1)}(\varepsilon)e_0 = 0, \quad (2.55)$$

$$A_0 e^{(2)}(\varepsilon) + B^{(2)}(\varepsilon)e_0 - P B^{(1)}(\varepsilon)(\bar{A}_0)^{-1} B^{(1)}(\varepsilon)e_0 \quad (2.56)$$

и т.д. Здесь P — ортопроектор на касательное пространство к σ в точке e_0 ($Px := x - \langle x, e_0 \rangle e_0$).

Отсюда получаем аналоги классических формул Релея – Шредингера:

$$e^{(1)}(\varepsilon) = -(\bar{A}_0)^{-1} \left(R^{(1)}(\varepsilon) - \mu^{(1)}(\varepsilon) I \right) e_0 = -(\bar{A}_0)^{-1} B^{(1)}(\varepsilon)e_0, \quad (2.57)$$

$$e^{(2)}(\varepsilon) = -(\bar{A})_0^{-1} \left(B^{(2)}(\varepsilon) - P B^{(1)}(\varepsilon) (\bar{A}_0)^{-1} B^{(1)}(\varepsilon) \right) e_0 \quad (2.58)$$

и т.д.

Здесь учтено, что после подстановки выражения (2.57) в соотношение (2.54) получаются следующие «промежуточные» выражения:

$$\begin{aligned} & A_0 e^{(2)}(\varepsilon) + B^{(2)}(\varepsilon) e_0 - B^{(1)}(\varepsilon) (\bar{A}_0)^{-1} B^{(1)}(\varepsilon) e_0 + \\ & + 2 \left\langle B^{(1)}(\varepsilon) (\bar{A}_0)^{-1} B^{(1)}(\varepsilon) e_0, e_0 \right\rangle e_0 - \left\langle B^{(1)}(\varepsilon) e_0, (\bar{A}_0)^{-1} B^{(1)}(\varepsilon) e_0 \right\rangle e_0 = \\ & = A_0 e^{(2)}(\varepsilon) + B^{(2)}(\varepsilon) e_0 - B^{(1)}(\varepsilon) (\bar{A}_0)^{-1} B^{(1)}(\varepsilon) e_0 + \\ & + \left\langle B^{(1)}(\varepsilon) (\bar{A}_0)^{-1} B^{(1)}(\varepsilon) e_0, e_0 \right\rangle e_0. \end{aligned}$$

Таким образом, установлено следующее утверждение, уточняющее теорему 2.7.

Теорема 2.8. *Если $e_0 \in \sigma$ — простой собственный вектор A_0 , то при достаточно малых ε вблизи e_0 на σ дискриминантное множество $\text{Diskr}(W)$ квадратичного функционала W на σ определяется уравнением $\alpha(\varepsilon) = 0$, где*

$$\alpha(\varepsilon) = \alpha^{(1)}(\varepsilon) + \alpha^{(2)}(\varepsilon) + o(\|\varepsilon\|^2), \quad \alpha^{(1)}(\varepsilon) := \mu(\varepsilon) = \langle (A_1(\varepsilon) e_0, e_0) \rangle$$

(см. (2.47) и (2.50)), а $\alpha^{(2)}$ определяется соотношением

$$\alpha^{(2)}(\varepsilon) := \mu^{(2)}(\varepsilon) = \left\langle R^{(2)}(\varepsilon) e_0, e_0 \right\rangle$$

(см. (2.57), (2.58)).

2.20.5 Случай кратного собственного значения

Пусть теперь нуль — n -кратное собственное значение оператора $A(0)$, $N := \text{Ker}(A_0)$, $S^{n-1} := N \cap S^\infty$ — $(n-1)$ -мерная сфера в N , $E^{\infty-n} := N^\perp \cap E$, $F^{\infty-n} := N^\perp \cap F$. Рассмотрим разложение вектора $x = u + v$, где $u \in N$, $v \in E^{\infty-n}$, параметр $s \in S^{n-1}$, и каждой точке s поставим в соответствие пару пространств $\{E_s, F_s\}$, $E_s := E^{\infty-n} + \text{Span}(s)$, $F_s = F^{\infty-n} + \text{Span}(s)$. Легко увидеть, что $\text{Codim}_E E_s = \text{Codim}_F F_s = n-1$. Пусть $\sigma_s := S^\infty \cap E_s$ — трансверсальная к S^{n-1} сфера (в $\sigma \cap E_s$) в точке s ($\text{Codim}_E \sigma_s = n$). Рассмотрим далее квадратичный функционал (2.46) и его сужение $W_{s,\varepsilon} := W|_{\sigma_s}$. Очевидно, что для $e(s, \varepsilon) := \arg(W_{s,\varepsilon}) = s$ (здесь $\arg(W_{s,\varepsilon})$ — решение задачи $W(v, \varepsilon) \rightarrow \inf, v \in \sigma_s$) справедливо равенство

$$e(s, 0) = s.$$

По теореме 2.6. (см. (2.48)–(2.49)) имеем

$$e(s, \varepsilon) = (I + \mathcal{A}(s, \varepsilon))s + o(\varepsilon). \quad (2.59)$$

Операторный коэффициент $\mathcal{A}(s, \varepsilon)$ вычисляется на основе параметрических формул Релея – Шредингера.

Нетрудно увидеть, что $\mathcal{A}(s, \varepsilon)s$ – касательный вектор к σ_s в точке s .

Для непосредственного вывода формул Релея – Шредингера в рассматриваемом случае введем оператор

$$B(s, \varepsilon) := P_s \cdot A(\varepsilon)|_{E_s} : E_s \rightarrow F_s,$$

где $P_s : F \rightarrow F_s$ – ортогональный проектор:

$$P_s y = y - \sum_{j=1}^n \langle y, e_j \rangle e_j + \langle y, s \rangle s,$$

$e_1, e_2, \dots, e_n$ – ортонормированный базис в N .

На основе формул (2.48) – (2.49) получаем

$$\mathcal{A}(s, \varepsilon) = (B_{s,0})^{-1}(A_1(s, \varepsilon) - \mu(s, \varepsilon)I), \quad (2.60)$$

где

$$A_1(s, \cdot) := \frac{\partial B}{\partial \varepsilon}(s, 0), \quad \mu(s, \varepsilon) := \langle A_1(s, \varepsilon)s, s \rangle,$$

а из (2.48) следует (2.59).

Замечание 2.4. Для возмущенного собственного значения получаем (на основе формул (2.59), (2.60)) представление

$$\alpha(s, \varepsilon) = 2W_{s,\varepsilon}(e(s, \varepsilon), e(s, \varepsilon)) = \mu(s, \varepsilon) + o(\varepsilon), \quad (2.61)$$

$$\mu(s, \varepsilon) := \langle (A_1(s, \varepsilon)s, s) \rangle.$$

Замечание 2.5. Представление (2.61) можно рассматривать как результат сужения функционала $W_{s,\varepsilon}$ на квазиинвариантное подмногообразие (сфероид), т.е. представляет собой разновидность нелокальной конечномерной редукции гладкого функционала.

В итоге получено следующее утверждение:

Теорема 2.9. Пусть квадратичный функционал W задан формулой (2.46) и пусть $e(s, \varepsilon) := \arg(W_{s, \varepsilon})$, где $W_{s, \varepsilon} := W|_{\sigma_s}$. Тогда параболическое множество исходного функционала V_0 совпадает с образом дискриминантного множества $\text{Diskr}(\alpha)$ функции $\alpha(s, \varepsilon)$ (см. (2.61)), $s \in S^{n-1}$, полученным при вложении $s \longrightarrow e(s, \varepsilon)$ сферы $S^{(n-1)}$ в σ или, что эквивалентно, с $\text{Diskr}(W(\cdot, \varepsilon)|_{M_\varepsilon})$ — дискриминантным множеством семейства сужений $W(\cdot, \varepsilon)$ на подмногообразия M_ε (квазиинвариантные сфероиды) в σ .

2.20.6 О параметризации квазиинвариантного сфероида

Задача приближенной параметризации рассматриваемого здесь квазиинвариантного сфероида, лежащего в некоторой трубчатой окрестности исходной сферы S^{n-1} , может быть решена на основе некоторых аналогов утверждений из работ [81], [82]. Другой вариант решения задачи параметризации сфероида — через алгоритм Релея – Шредингера.

Заметим, что представление произвольного вектора $h \in \sigma$ в виде $u + v$, $u \in N, v \in E^{\infty-n}$, приводит к естественной параметризации трубчатой окрестности сферы S^{n-1} в σ :

$$h = e(s, v) := \sqrt{1 - |v|^2} s + v, \quad v \in E^{\infty-n}, \quad s \in S^{n-1}, \quad |v|_{\mathcal{H}} < 1. \quad (2.62)$$

В случае двухкратного вырождения вектор $u := \sqrt{1 - |v|^2} s$ можно записать в виде

$$u = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2,$$

где e_1, e_2 — базис N , $\xi_1 = \sqrt{1 - |v|^2} \cos(\varphi)$, $\xi_2 = \sqrt{1 - |v|^2} \sin(\varphi)$. Поправочные коэффициенты (2.60) получаются при этом гладко зависящими от углового параметра φ .

Из параметризации (2.62) получаем следующее представление для функционала $W_\varepsilon(h)$:

$$2W_\varepsilon(h) = \langle A_\varepsilon(u + v), u + v \rangle = \langle A_\varepsilon v, v \rangle + \langle R_\varepsilon u, u \rangle + 2 \langle R_\varepsilon u, v \rangle$$

($u = \sqrt{1 - |v|^2} s$). Следовательно

$$\begin{aligned}
2W_\varepsilon(h) &= \langle R_\varepsilon s, s \rangle + \langle A_\varepsilon v, v \rangle - \langle R_\varepsilon s, s \rangle |v|^2 + 2 \langle R_\varepsilon s, v \rangle \sqrt{1 - |v|^2} s = \\
&= \left\langle R^{(1)}(\varepsilon) s, s \right\rangle + o(\varepsilon).
\end{aligned}$$

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.10. *В случае параметризации окрестности подмногообразия $N \cap \sigma$ вида*

$$h = e(s, v) := \sqrt{1 - |v|^2} s + v, \quad v \in E^{\infty-n}, \quad s \in S^{n-1}, \quad |v|_{\mathcal{H}} < 1,$$

для собственного значения $\alpha(s, \varepsilon)$ имеет место представление

$$\alpha(s, \varepsilon) = \left\langle R^{(1)}(\varepsilon) s, s \right\rangle + o(\varepsilon).$$

Глава 3

Бифуркационный анализ вариационных задач в случае понижения симметрии параллелепипеда

При рассмотрении дифференциальных уравнений с большим числом параметров зачастую получить явный вид решения не является достаточным для исследователя. Картина предстает намного более полной и ясной, когда результат анализа этого уравнения дополнен соотношениями, напрямую показывающими множество значений параметров, при которых существуют вырожденные решения. График этих соотношений (дискриминантное множество) делит пространство управляющих параметров на ячейки, каждой из которых соответствует постоянный состав решений (т.е. неизменный по количеству и качеству при вариациях параметра вдоль ячейки).

Наше дальнейшее изложение опирается на схемы конечномерных редукций, представляющие собой аппарат исследования потенциальных физических систем с не единственностью состояний, к каковым относятся упругие конструкции в закритических равновесных состояниях, сегнето-электрические фазы кристаллов и т.п. [32], [50].

Вариационную версию редуцирующей схемы Ляпунова – Шмидта можно представить как нелинейный аналог ритцевской аппроксимации. Напомним, что классической ритцевской аппроксимацией функционала

V на банаховом пространстве E называется функция

$$W(\xi) := V \left(\sum_{j=1}^n \xi_j e_j \right), \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)^\top,$$

где $e_1, \dots, e_n$ — некоторый линейно независимый набор векторов в E (базис ритцевской аппроксимации). Экстремалам $\bar{\xi} = (\bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_n)^\top$ функции W соответствуют точки $\bar{x} = \sum_{j=1}^n \bar{\xi}_j e_j$, называемые ритцевскими аппроксимациями экстремалей V . Точность ритцевских аппроксимаций повышается за счет увеличения количества базисных элементов. Если, обобщая, рассмотреть «нелинейные» аппроксимации вида

$$W(\xi) = V \left(\sum_{j=1}^n \xi_j e_j + \Phi(\xi) \right),$$

где Φ — гладкое отображение из $N := \text{span}(e_1, \dots, e_n)$ в $N^\perp$ (ортogonalное дополнение к N в метрике пространства функций с суммируемым квадратом), то во многих прикладных задачах можно достигать любой аппроксимативной точности при фиксированном наборе базисных функций и, следовательно, априори ограниченном количестве степеней свободы аппроксимирующей системы.

Особую актуальность схемам конечномерных редукций придает в текущий момент то, что они позволяют разрабатывать *алгоритмы компьютерного сопровождения* решений вариационных задач, посредством которых можно получать наглядную информацию о существовании и бифуркациях экстремалей, об индексах Морса бифурцирующих экстремалей и о метаморфозах поверхностей уровней функционалов энергии.

3.1 Вычисление главной части ключевой функции в случае базиса ритцевской аппроксимации, состоящего из собственных функций

Пусть $f : E \longrightarrow F$ — гладкое фредгольмово отображение нулевого индекса банаховых пространств, такое что

$$\langle f(x), h \rangle \equiv \frac{\partial V}{\partial x}(x)h, \quad (3.1)$$

где V — гладкий функционал на E (потенциал отображения f), $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в некотором гильбертовом пространстве H , содержащем E и F как непрерывно и плотно вложенные подпространства. Предполагается также, что E непрерывно вложено в F . В этом случае будем говорить, что функционал V обладает градиентной реализацией в тройке пространств $\{E, F, H\}$ и обозначать $f = \text{grad } V = \nabla V$.

В описанных условиях множество решений уравнения

$$f(x) = 0 \quad (3.2)$$

совпадает с множеством критических точек функционала V . Действительно, из условия $\partial V / \partial x(x) = 0$ вытекает условие $f(x) \in E^\perp$, а $E^\perp = \{0\}$ ввиду плотности E в H .

Напомним, что точка a называется критической точкой (экстремалью) данного функционала $V(x)$, если

$$\frac{\partial V}{\partial x}(a)h = \langle f(a), h \rangle_H = 0, \quad \forall h \in E \setminus 0.$$

Положим, что мы имеем гладкое потенциальное фредгольмово уравнение с параметром

$$f(x, \lambda) = 0. \quad (3.3)$$

Пусть его потенциалом является функционал $V(x, \lambda)$, $x \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}^m$. Пусть $\mathcal{O}(0)$ — некоторая открытая окрестность нуля в E , $\mathcal{U}(0)$ — окрестность нуля в $\mathbb{R}^m$ и $f(0, \lambda) = 0 \quad \forall \lambda$. Пусть, наконец, выполнены следующие два условия (см. [32]): 1) на $\mathcal{U}(0)$ определен набор гладких нормированных в $\mathcal{H}$ функций $\{e_j(\lambda)\}_{j=1}^n$, $\lambda \in \mathcal{U}(0)$, из E (постоянных мод бифуркации) таких, что

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, \lambda)e_j(\lambda) = \alpha_j(\lambda)e_j(\lambda), \quad (3.4)$$

где $\{\alpha_j(\lambda)\}_{j=1}^n$ — гладкие спектральные функции; 2) 0 — невырожденная критическая точка сужения $V(x, 0)|_{L_0}$, где $L_\lambda := E \cap N_\lambda^\perp$, $N_\lambda^\perp$ — ортогональное дополнение в $\mathcal{H}$ к $N_\lambda = \text{Span}\{e_1(\lambda), \dots, e_n(\lambda)\}$.

Для любого $x \in \mathcal{O}(0)$ положим $\xi_j(\lambda) = \langle x, e_j(\lambda) \rangle$, где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в $\mathcal{H}$. Тогда

$$x = \sum_{j=1}^n \xi_j(\lambda)e_j(\lambda) + v(\lambda), \quad v(\lambda) \perp e_j(\lambda) \quad \forall j.$$

Аналогично

$$f(x, \lambda) = \sum_{j=1}^n f_j(x, \lambda) e_j(\lambda) + f_*(x, \lambda), \quad f_*(x, \lambda) \perp e_j(\lambda) \quad \forall j.$$

Пусть $L_\lambda^* = F \cap N_\lambda^\perp$. Тогда из условия 2) следует, что $f_*(\cdot, 0) : L_0 \rightarrow L_0^*$ — локальный диффеоморфизм (в некоторой окрестности $\mathcal{O}(0)$ точки $0 \in L_0$). Следовательно, найдется, по теореме о неявной функции, такая гладкая функция $u = \Phi(\xi, \lambda)$, $(\xi, \lambda) \in \mathcal{O}^n(0) \times \mathcal{U}(0)$, $\Phi(\xi, \lambda) \in L_\lambda$, где $\mathcal{O}^n(0)$ — некоторая окрестность нуля в $\mathbb{R}^n$, что

$$f_* \left(\sum_{j=1}^n \xi_j e_j(\lambda) + \Phi(\xi, \lambda), \lambda \right) = 0 \quad \forall (\xi, \lambda) \in \mathcal{O}^n(0) \times \mathcal{U}(0).$$

Функция $W(\xi, \lambda) = V \left(\sum_{j=1}^n \xi_j e_j(\lambda) + \Phi(\xi, \lambda), \lambda \right)$ является ключевой для функционала $V(x, \lambda)$, а ее градиент является ключевым отображением для уравнения $f(x, \lambda) = 0$.

Для исследования ключевой функции W часто достаточно ограничиться несколькими членами разложения W в ряд Тейлора. В локальных вариационных задачах это производится при помощи специальным образом подобранной ритцевской аппроксимации функционала $V(x)$, заданной выражением

$$W_R(\xi) = V \left(\sum_{j=1}^n \xi_j e_j \right), \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)^\top,$$

где $\{e_1, \dots, e_n\}$ — некоторый линейно независимый набор функций из E (базис аппроксимации).

Обоснование того, что отбрасывание «тейлоровского хвоста» не изменяет топологию бифуркационных диаграмм и структуру *bif*-раскладов, проводится на основе теорем о конечной определенности ростков отображений и их деформаций [4].

Рассмотрим тейлоровское разложение потенциала V до четвертого порядка:

$$V(x, \lambda) = \text{const} + \frac{1}{2} \langle A(\lambda)x, x \rangle_{\mathcal{H}} + V_\lambda^{(3)}(x) + V_\lambda^{(4)}(x) + o(\|x\|^4),$$

где $A(\lambda) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, \lambda)$, $V_\lambda^{(3)}$ и $V_\lambda^{(4)}$ — однородные формы третьего и четвертого порядков на E . Пусть на $\mathcal{H}$ задан набор инволюций $\{J_k\}_{k=1}^n$ таких, что

- 1) $J_k(E) \subset E$, $J_k(F) \subset F$, $k = 1, \dots, n$,
- 2) $J_k(e_k(\lambda)) = -e_k(\lambda)$, $J_k(e_j(\lambda)) = e_j(\lambda)$, $k \neq j$.

Пусть потенциал $V(\cdot, \lambda)$ инвариантен относительно J_k :

$$V(J_k(x), \lambda) = V(x, \lambda), \quad k = 1, \dots, n, \quad \forall x, \lambda. \quad (3.5)$$

Тогда ключевая функция $W(\xi, \lambda)$ четна по каждой переменной ξ_j и, следовательно, её тейлоровское разложение имеет следующий вид [75], [79]:

$$W(\xi, \lambda) = \text{const} + W_\lambda^{(2)}(\xi) + W_\lambda^{(4)}(\xi) + o(|\xi|^5),$$

где $W_\lambda^{(2)}$ и $W_\lambda^{(4)}$ — формы второго и четвертого порядков, четные по ξ_j . Из (3.5) следует, что

$$W(\xi, \lambda) = \text{const} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \alpha_j(\lambda) \xi_j^2 + W_0^{(4)}(\xi) + o(|\xi|^5) + O(|\lambda|)o(|\xi|^3).$$

Так как $\alpha_j(0) = 0$, то

$$W(\xi, 0) = \text{const} + W_0^{(4)}(\xi) + o(|\xi|^5), \quad \xi \in \mathbb{R}^n$$

($W_0^{(4)}(\xi)$ — форма четвертого порядка). Нетрудно проверить [75], [79], что

$$W_0^{(4)}(\xi) = \frac{1}{2} \langle AB(u), B(u) \rangle_{\mathcal{H}} + 3\mathcal{V}_0^{(3)}(u, u, B(u)) + V_0^{(4)}(u),$$

где $u = \sum_{j=1}^n \xi_j e_j$, $e_j = e_j(0)$, $A = A(0)$, $\mathcal{V}_0^{(3)}$ — симметричная 3-линейная форма, отвечающая $V_0^{(3)}$ ($V_0^{(3)}(u) = \mathcal{V}_0^{(3)}(u, u, u)$), B — квадратичное отображение $N_0 \rightarrow L_0^*$, полученное выделением квадратичной части отображения $u \rightarrow \Phi(\xi, 0)$. Так же заметим, что $B(u) = -A_*^{-1} \text{grad}_{\mathcal{H}} V_0^{(3)}(u)$ ($A_* = A|_{L_0}$). Для четного потенциала V имеем $V_0^{(3)} = 0$, $B(u) = 0$, и, следовательно, $W_0^{(4)}(\xi) = V_0^{(4)}(u)$. Таким образом, для W получаем следующее представление [75], [79]:

$$\text{const} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \alpha_j(\lambda) \xi_j^2 + W_R^{(4)}(\xi, 0) + O(|\lambda|)O(|\xi|^4) + o(|\xi|^5), \quad (3.6)$$

где $W_R^{(4)}(\xi, 0) = V_0^{(4)}(\sum_{j=1}^n \xi_j e_j)$. Пусть

$$V_0^{(4)}(x) = \mathcal{V}_0^{(4)}(x, x, x, x)$$

($\mathcal{V}_0^{(4)}(x, y, z, t)$ — симметричная 4-линейная форма). Тогда, с учетом симметрии, получаем соотношение

$$W_R^{(4)}(\xi) = \sum_{k=1}^n V_0^{(4)}(e_k) \xi_k^4 + 6 \sum_{i < j}^n \mathcal{V}_0^{(4)}(e_i, e_i, e_j, e_j) \xi_i^2 \xi_j^2. \quad (3.7)$$

3.2 Вычисление главной части ключевой функции в случае базиса ритцевской аппроксимации, состоящего из корневых функций

В некоторых задачах нет возможности построения базиса аппроксимации, состоящего из собственных элементов $e_j(\lambda)$ (соответствующие примеры имеются в четвертой главе). Вместо них можно использовать наборы корневых векторов, которые можно строить в виде возмущений собственных векторов, заданных при фиксированном значении $\lambda = 0$.

Сначала предположим, что набор корневых векторов известен.

Итак, пусть выполнены следующие два условия: 1) на $\mathcal{U}(0)$ определен набор гладких попарно ортогональных и нормированных в $\mathcal{H}$ функций $\{e_j(\lambda)\}_{j=1}^n$, $\lambda \in \mathcal{U}(0)$, из E (постоянных мод бифуркации) таких, что

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, \lambda) e_j(\lambda) = \sum_{k=1}^n \alpha_{j,k}(\lambda) e_k(\lambda), \quad (3.8)$$

где $\{\alpha_{j,k}(\lambda)\}_{j=1}^n$ — гладкие функции; 2) 0 — невырожденная критическая точка сужения $V(x, 0)|_{L_0}$, где $L_\lambda := E \cap N_\lambda^\perp$, $N_\lambda^\perp$ — ортогональное дополнение в $\mathcal{H}$ к $N_\lambda = \text{Span}\{e_1(\lambda), \dots, e_n(\lambda)\}$.

Для любого $x \in \mathcal{O}(0)$ положим $\xi_j(\lambda) = \langle x, e_j(\lambda) \rangle$, то есть

$$x = \sum_{j=1}^n \xi_j(\lambda) e_j(\lambda) + v(\lambda), \quad v(\lambda) \perp e_j(\lambda) \quad \forall j.$$

Аналогично

$$f(x, \lambda) = \sum_{j=1}^n f_j(x, \lambda) e_j(\lambda) + f_*(x, \lambda), \quad f_*(x, \lambda) \perp e_j(\lambda) \quad \forall j.$$

Пусть $L_\lambda^* = F \cap N_\lambda^\perp$. Тогда из условия 2) следует, что отображение $f_*(\cdot, 0) : L_0 \longrightarrow L_0^*$ — локальный диффеоморфизм (в некоторой окрестности $\mathcal{O}(0)$ точки $0 \in L_0$). Следовательно, по теореме о неявной функции найдется такая гладкая функция $u = \Phi(\xi, \lambda)$, $(\xi, \lambda) \in \mathcal{O}^n(0) \times \mathcal{U}(0)$, $\Phi(\xi, \lambda) \in L_\lambda$, где $\mathcal{O}^n(0)$ — некоторая окрестность нуля в $\mathbb{R}^n$, что

$$f_* \left(\sum_{j=1}^n \xi_j e_j(\lambda) + \Phi(\xi, \lambda), \lambda \right) = 0 \quad \forall (\xi, \lambda) \in \mathcal{O}^n(0) \times \mathcal{U}(0).$$

Функция $W(\xi, \lambda) = V \left(\sum_{j=1}^n \xi_j e_j(\lambda) + \Phi(\xi, \lambda), \lambda \right)$ является ключевой для функционала $V(x, \lambda)$, а ее градиент является ключевым отображением для уравнения $f(x, \lambda) = 0$.

Главная часть ключевой функции W определяется ритцевской аппроксимацией функционала $V(x)$

$$W_R(\xi) = V \left(\sum_{j=1}^n \xi_j e_j \right), \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)^\top.$$

Пусть функционал V четный. Вновь рассмотрим тейлоровское разложение потенциала V до четвертого порядка:

$$V(x, \lambda) = \text{const} + \frac{1}{2} \langle A(\lambda)x, x \rangle_{\mathcal{H}} + V_\lambda^{(4)}(x) + o(\|x\|^4),$$

где $A(\lambda) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, \lambda)$, $V_\lambda^{(4)}$ — однородная форма четвертого порядка на E .

Тогда ключевая функция $W(\xi, \lambda)$ четна, и её тейлоровское разложение имеет следующий вид:

$$W(\xi, \lambda) = \text{const} + W_\lambda^{(2)}(\xi) + W_\lambda^{(4)}(\xi) + o(|\xi|^5),$$

где $W_\lambda^{(2)}$ и $W_\lambda^{(4)}$ — формы второго и четвертого порядков, четные по ξ . Следовательно,

$$\begin{aligned} W(\xi, \lambda) = \text{const} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \alpha_j(\lambda) \xi_j^2 + \sum_{j,k=1}^n \beta_{j,k}(\lambda) \xi_j \xi_k + \\ + W_0^{(4)}(\xi) + o(|\xi|^5) + O(|\lambda|) o(|\xi|^3). \end{aligned}$$

Так как $\alpha_j(0) = \beta_{j,k}(0) = 0$, то

$$W(\xi, 0) = \text{const} + W_0^{(4)}(\xi) + o(|\xi|^5), \quad \xi \in \mathbb{R}^n$$

$(W_0^{(4)}(\xi) — \text{форма четвертого порядка})$. Нетрудно проверить, что

$$W_0^{(4)}(\xi) = \frac{1}{2} \langle AB(u), B(u) \rangle_{\mathcal{H}} + V_0^{(4)}(u),$$

где $u = \sum_{j=1}^n \xi_j e_j$, $e_j = e_j(0)$, $A = A(0)$. То есть, для четного потенциала V имеем $W_0^{(4)}(\xi) = V_0^{(4)}(u)$. Таким образом, для W получаем следующее представление [75], [79]:

$$\begin{aligned} & \text{const} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \alpha_j(\lambda) \xi_j^2 + \sum_{j,k=1}^n \beta_{j,k}(\lambda) \xi_j \xi_k + \\ & + W_R^{(4)}(\xi, 0) + O(|\lambda|)O(|\xi|^4) + o(|\xi|^5), \end{aligned} \quad (3.9)$$

где $W_R^{(4)}(\xi, 0) = V_0^{(4)}(\sum_{j=1}^n \xi_j e_j)$. Пусть

$$V_0^{(4)}(x) = \mathcal{V}_0^{(4)}(x, x, x, x)$$

$(\mathcal{V}_0^{(4)}(x, y, z, t) — \text{симметричная 4-линейная форма})$.

В итоге получаем соотношение [79]

$$W_R^{(4)}(\xi) = \sum_{k=1}^n V_0^{(4)}(e_k) \xi_k^4 + 6 \sum_{i < j}^n \mathcal{V}_0^{(4)}(e_i, e_i, e_j, e_j) \xi_i^2 \xi_j^2. \quad (3.10)$$

Несмотря на очевидную теоретическую значимость полученных выше формул для коэффициентов главной части ключевой функции, у них имеется один существенный недостаток. Он заключен в том, что поиск функций $e_j(\varepsilon)$ в прикладных задачах связан с преодолением существенных трудностей.

Замечание 3.1. *Условие ортонормированности системы корневых функций можно снять, так как ортогонализация корневых функций в конкретных примерах иногда приводит к лишним громоздким формулам.*

3.3 Построение базиса ритцевской аппроксимации, состоящего из корневых функций

Пусть λ — набор параметров, не влияющих на базис аппроксимации. При $\varepsilon = 0$ ведущие моды бифуркации определены и представляют собой набор $\{e_j\}_{j=1}^n$. Будем разыскивать набор $\{\tilde{e}_j\}_{j=1}^n$, где $\tilde{e}_j$ — «возмущенная» мода бифуркации:

$$\tilde{e}_k = e_k + \sum_j h_{k,j} \varepsilon_j + o(\varepsilon), \quad (3.11)$$

образующая базис в n -мерном корневом подпространстве оператора Гессе $\mathcal{H} = \mathcal{A} + \mathcal{B}(\varepsilon)$ в нуле, где e_k — невозмущенные моды бифуркации (элементы $\tilde{e}_k$ не являются, вообще говоря, собственными функциями оператора $\mathcal{H}$).

Основная техническая трудность в построении главной части ключевой функции состоит в вычислении коэффициентов $h_{k,j}$. Их можно определить на основе формулы ортогонального проектора на корневое подпространство возмущенного симметричного оператора, приведенной в монографии В.П. Маслова [58].

Итак, вместо собственных функций рассмотрим такие элементы $\tilde{e}_j(\varepsilon)$, $j = 1, 2, \dots, n$ для которых

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, \varepsilon) \tilde{e}_j(\varepsilon) = \sum_k \alpha_{jk}(\varepsilon) \tilde{e}_k(\varepsilon).$$

Функции $\tilde{e}_j(\varepsilon)$ будем называть корневыми.

Важным сопутствующим обстоятельством в предложенном здесь подходе является то, что входящие в эти соотношения функции $\alpha_{jk}(\varepsilon)$, $\tilde{e}_j(\varepsilon)$ будут гладко зависеть от ε .

В качестве искомых базисных элементов можно взять

$$\tilde{e}_k(\varepsilon) := \mathbf{P}(\varepsilon)(e_k),$$

где

$$\mathbf{P}(\varepsilon) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\ell} \mathcal{R}(\varepsilon, z) dz$$

— ортопроектор на n -мерное корневое подпространство, ℓ — окружность достаточно малого радиуса с центром в нуле (на комплексной плоскости), $\mathcal{R}(\lambda, z)$ — резольвента:

$$\mathcal{R}(\varepsilon, z) = (\mathcal{A} + \mathcal{B}(\varepsilon) - zI)^{-1}.$$

Под ε понимается вектор-функция, зависящая от тех параметров, которые влияют на базис аппроксимации. Приведем данную резольвенту к более удобному виду (воспользовавшись разложением в ряд Неймана оператора $I + \mathcal{B}(\varepsilon) (\mathcal{A} - zI)^{-1}$):

$$\begin{aligned} (\mathcal{A} + \mathcal{B}(\varepsilon) - zI)^{-1} &= (\mathcal{A} - zI)^{-1} [I + \mathcal{B}(\varepsilon) (\mathcal{A} - zI)^{-1}]^{-1} = \\ &= (\mathcal{A} - zI)^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k [\mathcal{B}(\varepsilon) (\mathcal{A} - zI)^{-1}]^k. \end{aligned}$$

В нашем случае достаточно обойтись лишь линейными по ε слагаемыми этого ряда. Таким образом,

$$\mathbf{P}(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\ell} (\mathcal{A} - zI)^{-1} dz - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\ell} (\mathcal{A} - zI)^{-1} \mathcal{B}(\varepsilon) (\mathcal{A} - zI)^{-1} dz.$$

Так как оператор $\mathcal{B}(\varepsilon)$ является гладким, то $\mathcal{B}(\varepsilon) = \sum_{j=1}^n B_j \varepsilon_j + o(\varepsilon)$. Обозначив первое слагаемое правой части последнего уравнения через P_0 , получим:

$$\mathbf{P} = P_0 - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\ell} (\mathcal{A} - zI)^{-1} \sum_{j=1}^n B_j \varepsilon_j (\varepsilon) (\mathcal{A} - zI)^{-1} dz + o(\varepsilon).$$

Сумму можно вынести за знак интеграла, и, обозначив

$$P_j := \frac{1}{2\pi i} \oint_{\ell} (\mathcal{A} - zI)^{-1} B_j (\mathcal{A} - zI)^{-1} dz, \quad (3.12)$$

получим конечный вид формулы для вычисления переменных мод бифуркаций:

$$\tilde{e}_k = \mathbf{P} e_k = e_k - \sum_j \varepsilon_j h_{k,j} + o(\varepsilon), \quad (3.13)$$

$$\mathbf{P} = P_0 - \sum_{j=1}^n P_j \varepsilon_j + o(\varepsilon),$$

где

$$h_{k,j} = P_j e_k. \quad (3.14)$$

Итак, справедливо следующее утверждение.

Теорема 3.1. *Возмущенные корневые векторы $\tilde{e}_k$, можно представить в виде (3.13), где $h_{k,j}$ определяются соотношениями (3.12)–(3.14).*

Теорема 3.2. *Пусть при $\varepsilon = 0$ ключевая функция представима в форме (3.9) и пусть корневые базисные векторы представимы в форме (3.11). Тогда главная часть ключевой функции имеет следующий вид*

$$W(\xi, \lambda, \varepsilon) = W_R^{(4)}(\xi) + \sum_{j,k} \nu_{jk}(\varepsilon) \xi_j \xi_k, \quad (3.15)$$

где $W_R^{(4)}(\xi)$ определено соотношением (3.10), $\nu_{jk}(\varepsilon) = \sum_{i=1}^m \langle \mathcal{A}(\lambda) h_{jk}, e_k \rangle \varepsilon_i$.

Глава 4

Прогибы упругих балок и пластин

4.1 Анализ некоторых конфигураций пространственного (кирхгофова) стержня

Рассмотрим подход к изучению форм упругого равновесия плоского стержня, основанный на рассмотрении уравнения равновесия пространственного (кирхгофова) стержня и на его редукции к плоскому (эйлерову) стержню с последующей редукцией Морса – Ботта (при нагрузках продольного сжатия, не превышающих второго критического значения) или редукцией Ляпунова – Шмидта (при нагрузках не выше третьего критического значения) [35].

4.1.1 Математическая модель пространственного стержня

Равновесные конфигурации прямолинейного и продольно сжатого кирхгофова стержня длины единица с жестким закреплением концов описывается краевой задачей (см. [32], [37], [65], [70])

$$\begin{cases} A\dot{\omega} + [\omega, A\omega] + \lambda[f^{-1}r_3, r_3] = 0, \\ f(0) = f(1) = I. \end{cases} \quad (4.1)$$

Здесь λ — параметр сжимающей нагрузки, $A = \text{diag}(A_1, A_2, A_3)$ — тензор упругости в поперечном сечении ($A_k > 0 \ \forall k$), $\omega(s)$ — угловая скорость движения нормального сечения стержня в зависимости от параметра длины s средней линии стержня, записанная в координатах тройки ортов $f_1(s), f_2(s), f_3(s)$, направленных по осям инерции нормального сечения, $r_3 = f_3(0)$. Орт $f_3(s)$ является касательным вектором к средней

линии стержня, $f(s)$ — матричная функция, столбцами которой являются векторы $f_1(s)$, $f_2(s)$ и $f_3(s)$, ($f_k(s) = f(s)r_k$).

Уравнение (4.1) является уравнением Эйлера – Лагранжа экстремалей функционала полной энергии

$$V(f, \lambda) = \frac{1}{2} \langle A\omega, \omega \rangle + \lambda \langle r_3, fr_3 \rangle \quad (4.2)$$

(здесь $\langle \phi, \psi \rangle = \int_0^1 (\phi(s), \psi(s)) ds$).

Уравнение (4.1) описывает также и движение в поле тяготения твердого тела вокруг неподвижной точки (после замены параметра длины s на параметр времени t) и называется уравнением Эйлера – Пуассона динамики твердого тела. Этому уравнению также соответствует потенциал в виде функционала действия (4.2), который называется функционалом Эйлера – Пуассона.

Точную информацию о функционале (4.2) на энергетическом многообразии

$$\Lambda := \{f(t) \in C^2([0, 1], SO(3)) : f(0) = f(1) = I\}$$

можно получить, рассмотрев редукцию Морса – Ботта со значениями в двумерной сфере. Эту редукцию можно разложить в композицию двух редукций: бесконечномерной — в многообразие петель на двумерной сфере и конечномерной — из многообразия петель на сфере к функции на двумерной сфере.

Итак, задача (4.1) является уравнением Эйлера – Лагранжа экстремалей функционала полной энергии (4.2).

Вектор $\omega = \omega_1 r_1 + \omega_2 r_2 + \omega_3 r_3$ канонически отождествляется [2] с матрицей

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.3)$$

для которой имеет место представление $\Omega = f^{-1}(s) \frac{df}{ds}(s)$.

Нам понадобится понятие КИ-подмногообразия [81]. Напомним его определение: *гладкое с пустым краем подмногообразие $K \subset E$ называется квазиинвариантным относительно функционала V , если существует такая гладкая ретракция $p : O(K) \longrightarrow K$, где $O(K)$ — окрестность*

K в E , что каждая точка $a \in K$ является критической точкой для сужения $V|_{p^{-1}(a)}$. Если K — конечномерное КИ-подмногообразие, то найдется такая окрестность $\tilde{O}(K)$, что тройка $\{\tilde{O}, K, p\}$ является гладким локально тривиальным расслоением с базой K и проекцией p . Таким образом, подмногообразие K является квазиинвариантным, если некоторая окрестность $O(K)$ гладко расслаивается над K и каждая точка $a \in K$ является критической точкой для сужения $V|_{p^{-1}(a)}$, где p — проекция расслоения. Если каждая точка $a \in K$ является морсовской критической точкой для сужения $V|_{p^{-1}(a)}$, то K называется регулярным (морсовским) квазиинвариантным подмногообразием. Для всех точек связного морсовского квазиинвариантного подмногообразия K индекс Морса $V|_{p^{-1}(a)}$ будет постоянным, и это постоянное значение называется индексом Морса квазиинвариантного подмногообразия K (обозначаемым $Ind(V, K)$). Заметим, что каждое инвариантное относительно V подмногообразие $K \subset E$ является квазиинвариантным (подмногообразие K называется инвариантным, если $grad V(a) \in T_a(K)$ для $\forall a \in K$).

При условии фредгольмовости индекса ноль функционала V каждое его компактное морсовское КИ-подмногообразие является структурно устойчивым: при гладком параметрическом возмущении функционала вблизи невозмущенного квазиинвариантного подмногообразия имеется диффеоморфное ему морсовское квазиинвариантное подмногообразие для возмущенного функционала V_λ (при всех достаточно малых λ). Значение индекса Морса при этом также сохраняется.

4.1.2 Редукция к эйлерову стержню

Пусть $\mathcal{M}$ — банахова группа Ли C^2 -петель на $SO(3)$ в единице:

$$\mathcal{M} = \{f \in C^2([0, 1], SO(3)) : f(0) = f(1) = I\}.$$

Отображение $p : f(s) \mapsto \tau(s) := f(s)r_3$ задает гладкую субмерсию из $\mathcal{M}$ на гладкое банахово многообразие $\tilde{\mathcal{M}}$ петель класса C^2 на двумерной сфере S^2 :

$$\tilde{\mathcal{M}} = \{\tau \in C^2([0, 1], S^2) : \tau(0) = \tau(1) = r_3\}.$$

Прообраз $p^{-1}(\tau)$ любой петли $\tau \in \tilde{\mathcal{M}}$ является орбитой правого действия

$$G \times \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}, \quad (g(s), f(s)) \mapsto f(s)g(s)$$

банаховой группы Ли $G = \{g : g(s) = \exp(\varphi(s)R_3)\}$. Через R_3 обозначается представление вида (4.3) для вектора r_3 . Функция $\varphi(s)$ принадлежит классу C^2 , и для нее выполняется условие

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(1) = 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z}. \quad (4.4)$$

Следовательно, $p^{-1}(\tau)$ состоит из счетного набора компонент связности $\mathcal{N}_k(\tau)$, определяемых выбором k в (4.4).

В случае $A_1 = A_2$ (симметричного стержня) на компоненте $\mathcal{N}_0(\tau)$ имеет место представление

$$V(fg, \lambda) = \int_0^1 \left(A_1 \frac{|\dot{\tau}|^2}{2} + A_3 \frac{(\omega_3 + \dot{\varphi})^2}{2} \right) ds + \lambda \langle \tau, r_3 \rangle, \quad (4.5)$$

где $g(s) = \exp(\varphi(s)R_3)$, ω_3 – третья компонента угловой скорости, $|\dot{\tau}(s)|$ – кривизна средней линии стержня. Доказательство того факта следует из соотношения

$$|\dot{\tau}(s)|^2 = \omega_1^2(s) + \omega_2^2(s),$$

вытекающего из равенств

$$\tau(s) = f(s)r_3, \quad |\dot{f}(s)r_3| = |f^{-1}(s)\dot{f}(s)r_3| = |\Omega r_3| = |[\omega, r_3]|,$$

и соотношения

$$(fg)^{-1} \frac{d}{ds} (fg) = g^{-1} f^{-1} (\dot{f}g + f\dot{g}) = g^{-1} (\Omega + \dot{\varphi} R_3) g.$$

Из представления (4.5) получаем, что $V|_{p^{-1}(\tau)}$ имеет ровно по одной точке минимума на каждой компоненте $\mathcal{N}_k(\tau)$. Причем $f \in \mathcal{N}_k(\tau)$ является точкой минимума $V|_{p^{-1}(\tau)}$ тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$\int_0^1 \omega_3^2 ds = c_k^2, \quad (4.6)$$

где

$$c_k = 2\pi k + \int_0^1 \omega_3 ds.$$

Интеграл $\int_0^1 \omega_3 ds$ является инвариантом правого действия G на $\mathcal{M}$.

Нетрудно установить, что ограничение $V|_{p^{-1}(\tau)}$ является геодезически выпуклым в бесконечномерной римановой метрике, в которой расстояние между $f(s)$ и $f(s)g(s)$, $g(s) = \exp(\varphi(s)R_3)$, измеряется интегралом $\int_0^1 \varphi^2(s)ds$. Следовательно, имеет место следующее утверждение.

Теорема 4.1. (см. [32]) *Пусть*

$$\mathcal{O} = \left\{ f \in \mathcal{M} : \left| \int_0^1 \omega_3 ds \right| < \pi \right\}.$$

Тогда функционал

$$\tilde{V}(\tau, \lambda) := \inf_{f: f \in \mathcal{O} \cap \pi^{-1}(\tau)} V(f, \lambda), \quad \tau \in p(\mathcal{O}),$$

является гладким, и для него имеет место представление

$$\int_0^1 \left(A_1 \frac{|\dot{\tau}|^2}{2} + \lambda(\tau, r_3) \right) ds + \frac{A_3}{2} \left(\int_0^1 \omega_3 ds + 2\pi k \right)^2. \quad (4.7)$$

Данная теорема означает возможность редукции (бесконечномерной), позволяющей сводить изучение поведения V на области $\mathcal{O}$ к изучению $\tilde{V}$ на области $p(\mathcal{O}) \subset \tilde{\mathcal{M}}$. Из геодезической выпуклости V на $p^{-1}(\tau)$ следует, что критические точки V на $\mathcal{O}$ взаимно однозначно соответствуют критическим точкам V на $p(\mathcal{O})$. При этом невырожденные критические точки переходят в невырожденные и только невырожденные с сохранением значений индекса Морса, а соответствующие друг другу вырожденные критические точки имеют изоморфные локальные кольца особенностей.

Если $\lambda < 4\pi^2$, то дальнейший анализ функционала (4.7) можно осуществить через конечномерную редукцию Морса – Ботта к ключевой функции W

$$W(\xi, \lambda) := \inf_{\tau: \tau(1/2) = \xi} \tilde{V}(\tau, \lambda), \quad \xi \in S^2. \quad (4.8)$$

Ключевую функцию W удобно вычислять, перейдя к промежуточной вариационной задаче для эйлерова функционала энергии, соответствующего плоскому эйлерову стержню [54],

$$\int_0^1 \left(\frac{\dot{\varphi}^2}{2} + \lambda \cos(\varphi) \right) dt, \quad \varphi = \varphi(t), \quad t \in [0, 1], \quad \varphi(0) = \varphi(1) = 0.$$

Лемма 4.1. *Подмногообразие $\mathfrak{M}$ нетель в единице (группы $SO(3)$) вида*

$$f(t) := \exp(\varphi(t)R_1), \quad \varphi(0) = \varphi(1) = 0,$$

$$R_1 := \mathcal{E}_{2,3} := e_2 \wedge e_3,$$

квазиинвариантно относительно функционала V .

Доказательство леммы основано на следующих ниже замечаниях. Во-первых, заметим, что общий касательный вектор η к подмногообразию $\mathfrak{M}$ в точке f допускает, как нетрудно проверить, следующее представление (после «снесения в единицу»):

$$\eta(t) = h(t)R_2. \quad (4.9)$$

Так как

$$\exp(\varphi R_1) = \cos(\varphi)I + \sin(\varphi)R_1,$$

то

$$\tau(t) := f^{-1}(t)e_3 = \exp(-\varphi(t)R_1)e_3 = \cos(\varphi)e_3 - \sin(\varphi)e_2.$$

Из соотношений

$$\begin{aligned} \omega &:= f^{-1}\dot{f} = \dot{\varphi} e_1, \\ \dot{\omega} &= \ddot{\varphi} e_1, \quad A\dot{\omega} = A_2\ddot{\varphi} e_1, \end{aligned}$$

получаем

$$\mathcal{F}(f) := A\dot{\omega} + [\omega, A\omega] - \lambda [e_3, f^{-1}e_3] = (A_1\ddot{\varphi} + \lambda \sin(\varphi)) e_1$$

(здесь $\mathcal{F} = \text{grad } V$). Из последнего соотношения вытекает квазиинвариантность $\mathfrak{M}$ относительно V (см. (4.9)).

Заметим, что отображение $\mathcal{F}$ здесь действует (фредгольмово) из многообразия $\mathcal{M} = \{f \in C^2([0, 1], SO(3)) : f(0) = f(1) = I\}$ в пространство $\mathcal{M}_0 = \{f \in C^0([0, 1], \mathcal{SO}(3))\}$.

Если $\lambda < 4\pi^2$, то функция (4.11) является гладкой на $S^2 \setminus \{-r_3\}$. При этом её критические точки взаимно однозначно соответствуют критическим точкам $\tilde{V}$ на $p(\mathcal{O})$ с сохранением значений индексов Морса и типов локальных колец особенностей.

Функцию (4.11) допускает представление в явном виде [32].

4.1.3 Применение редуцирующей схемы Морса – Ботта

В общем случае переход к конечномерной задаче выглядит (для абстрактной вариационной задачи $V(x) \longrightarrow extr$) следующим образом: рассматривается система редуцирующих функционалов $p_i : E \longrightarrow \mathbb{R}$ (с линейно независимыми градиентами в каждой точке), посредством которой совершается переход к ключевой функции

$$W(\xi_1, \dots, \xi_n) = \inf_{x: p_i(x) = \xi_i} V(x) \quad (4.10)$$

(при некоторых условиях технического характера [32]). Система $\mathfrak{P}$ называется также *системой ключевых параметров* для функционала V .

Все топологические и аналитические понятия, так или иначе характеризующие тип стационарной точки (индекс Морса, кратность, локальное кольцо особенности, версальная деформация, бифуркационная диаграмма и т.п. для исходного функционала, наследуются ключевой функцией.

Анализ функционала энергии в случае $\lambda < 4\pi^2$ можно осуществить (при нагрузке продольного сжатия, не превышающей второго критического значения) через конечномерную редукцию Морса – Ботта к ключевой функции W

$$W(\xi, \lambda) := \inf_{\tau: \tau(1/2) = \xi} \tilde{V}(\tau, \lambda), \quad \xi \in S^2. \quad (4.11)$$

Функция (4.11) является гладкой на $S^2 \setminus \{-r_3\}$. Её критические точки взаимно однозначно соответствуют критическим точкам $\tilde{V}$ на $p(\mathcal{O})$, с сохранением значений индексов Морса и типов локальных колец особенностей.

Функция (4.11) допускает представление в явном виде. Действительно, маргинальное отображение $\xi \longmapsto \tau_\xi$ допускает представление в виде

$$\tau_\xi(s) = e^{\psi(s)R} = (\cos \psi(s))r_3 + (\sin \psi(s))r, \quad r \perp r_3,$$

где $\psi(s)$ получено склейкой решений $\psi_1(s)$ и $\psi_2(s)$ уравнения

$$\ddot{\psi} + \lambda \sin \psi = 0, \quad (4.12)$$

отвечающих краевым условиям

$$\psi_1(0) = 0, \quad \psi_1(1/2) = \eta, \quad \psi_2(1/2) = \eta, \quad \psi_2(1) = 0, \quad \eta = \arccos \langle \xi, r_3 \rangle.$$

Произведя в уравнении равновесия стандартную подстановку [70]

$$\psi = 2 \arcsin(k \sin u), \quad (4.13)$$

где k — константа, $0 < k < 1$, получим, что u является решением уравнения

$$\dot{u} = \lambda^{1/2}(1 - k^2 \sin^2 u)^{1/2}.$$

Следовательно,

$$u(s) = am(\sqrt{\lambda}s; k), \quad (4.14)$$

где $am(\sqrt{\lambda}s; k)$ — так называемая амплитуда, полученная обращением эллиптического интеграла первого рода (в нормальной тригонометрической форме Лежандра)

$$\sqrt{\lambda}s = F(u; k) := \int_0^u \frac{dy}{(1 - k^2 \sin^2 y)^{1/2}}.$$

Из (4.13) и (4.14) получаем явную формулу решения

$$\psi_1(s) = 2 \arcsin \left(k \operatorname{sn}(\sqrt{\lambda}s; k) \right),$$

где

$$\operatorname{sn}(\tau; k) := \sin am(\tau; k)$$

— эллиптический синус. Для производной функции ψ_1 получаем представление

$$\dot{\psi}_1(s) = 2\sqrt{\lambda} \operatorname{cn}(\sqrt{\lambda}s; k),$$

где $\operatorname{cn}(\tau; k) := \cos am(\tau; k)$ — эллиптический косинус.

Соответственно, для лагранжиана

$$L = \frac{\dot{\psi}^2}{2} - \lambda(\cos \psi - 1)$$

на решении $\psi_1(s)$ имеем представление

$$L = 2\lambda k^2(\operatorname{cn}^2(\sqrt{\lambda}s; k) - \operatorname{sn}^2(\sqrt{\lambda}s; k)) = 2\lambda k^2(2\operatorname{cn}^2(\sqrt{\lambda}s; k) - 1).$$

Решение ψ_2 уравнения (4.13) получается продолжением $\psi_1(s)$ с интервала $[0, 1/2]$ на интервал $[1/2, 1]$ по симметрии: $\psi_2(s) = \psi_1(1 - s)$. Следовательно,

$$\int_0^1 L ds = 2 \int_0^{1/2} L ds,$$

и для ключевой функции (4.11) получаем глобальное представление

$$\widetilde{W}(k, \lambda) = 4\lambda k^2 \left(2 \int_0^{1/2} cn^2(\sqrt{\lambda}s; k; ds - \frac{1}{2} \right)$$

(ключевым параметром здесь служит эллиптический параметр k).

На рисунках приведены приближенные изображения (в среде Maple) графиков ключевой функции $\widetilde{W}(k, \lambda)$, решений уравнения и прогибов — при докритическом и закритическом ($\lambda = 4$) значениях параметра.

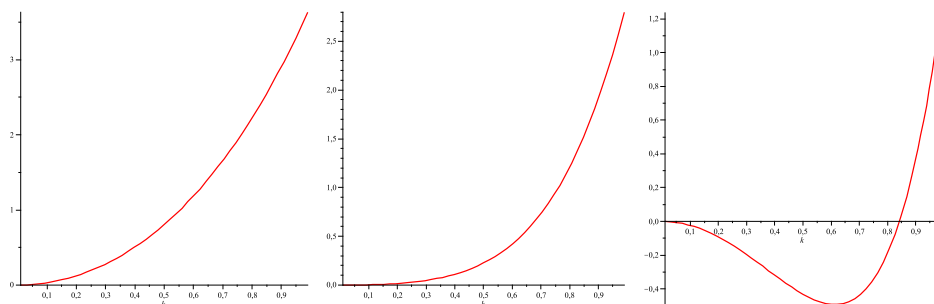


Рис. 21

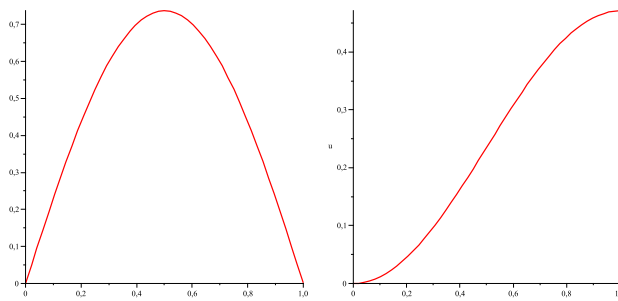


Рис. 22

При наличии деформаций стержня в не нагруженном состоянии уравнение равновесия перестает, вообще говоря, быть интегрируемым (даже для симметричного стержня). Это приводит к необходимости использования метода Ляпунова – Шмидта, при построении приближенных изображений конфигураций стержня. Этот метод требует меньше вычислительных затрат.

4.1.4 Случай искривленного стержня

Случай задачи о конфигурациях искривленного стержня описывается уравнением

$$-A\dot{\omega} + [A\omega, \omega] + \lambda[r_3, f^{-1}r_3] + q[r_3, f^{-1}r_2] = 0, \quad (4.15)$$

при краевых условиях

$$f(0) = f(1) = I,$$

где $q = q(s)$ — непрерывная скалярная функция, присутствие которой в уравнении означает наличие начального (до воздействия нагрузки) искривления стержня в плоскости векторов r_2, r_3 .

Уравнение (4.15) определяет экстремали функционала (полной энергии)

$$V(f, \lambda) := \frac{1}{2} (\langle A\omega, \omega \rangle + \lambda \langle r_3, f r_3 \rangle + \langle q r_2, f r_3 \rangle). \quad (4.16)$$

Повторяя, с некоторыми изменениями, ранее приведенное рассуждение (для случая $q = 0$) на основе замены $f(s) = e^{\psi(s)R_1}$ (R_1 — матрица, соответствующая вектору r_1), можно установить, что анализ функционала (4.16) сводится (не локально) к анализу функционала

$$V := \int_0^1 \left(\frac{\dot{\psi}^2}{2} + \lambda(\cos \psi - 1) + q \sin \psi \right) ds, \quad (4.17)$$

экстремали которого определяются краевой задачей

$$f(\psi) = \frac{d^2\psi}{ds^2} + \lambda \sin \psi = q \cos \psi, \quad \psi(0) = \psi(1) = 0. \quad (4.18)$$

Организация вычислений. С целью упрощения вычислений, заменим это уравнение 4.18 на уравнение

$$f(\psi) = \frac{d^2\psi}{ds^2} + \lambda \sin \psi = q, \quad q = q_1 e_1 + q_2 e_2, \quad (4.19)$$

где

$$e_1 = \sqrt{2} \sin(\pi s), \quad e_2 = \sqrt{2} \sin(2\pi s)$$

— первая и вторая моды прогиба, отвечающие первым двум критическим нагрузкам π^2 и $4\pi^2$. Далее будем использовать тройку $E \subset F \subset H$ непрерывно вложенных пространств, в которой

$$\begin{aligned} E &= \{x \in C^2([0, 1], \mathbb{R}) : x(0) = x(1) = 0\}, \\ F &= C^2([0, 1], \mathbb{R}), \quad H = L_2([0, 1], \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Первым естественным шагом в нелокальном анализе прогибов, отвечающим, в частности, на вопрос о зависимости количества и характера решений от значений параметров, будет исследование каустики функционала V (множества значений параметров, при которых существуют вырожденные критические точки функционала). Ниже дано описание методики приближенного изображения плоских сечений каустики и примеры вычислений.

При $\lambda < (n+1)^2\pi^2$ примером глобально редуцирующей системы функционалов (ключевых параметров) может быть совокупность коэффициентов Фурье $p_j(x) = \langle e_j, x \rangle$, $j = 1, \dots, n$ (схема Ляпунова – Шмидта) [32]. В операторном виде схема Ляпунова – Шмидта, если представить левую часть исходного уравнения как

$$f(x) = q,$$

сводится (при $n = 2$) к системе

$$\left. \begin{aligned} A_1(u) + \lambda P^2(\sin(u+v)) &= q_1 e_1 + q_2 e_2, \\ A_2(v) + \lambda P^{\infty-2}(\sin(u+v)) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (4.20)$$

где P^2 , $P^{\infty-2}$ — пара ортопроекторов (в метрике H) на E^2 и $E^{\infty-2}$, соответственно, а $A_1 = A|_{E^2}$, $A_2 = A|_{E^{\infty-2}}$ — соответствующие сужения оператора A . Для второго уравнения последней системы имеет место однозначная разрешимость по v при каждом $u \in E^2$. После построения представления (приближенного) для решения этого уравнения (решения второго уравнения системы (4.20)) в форме отображения $v = \Phi(u)$ получаем ключевую функцию в виде $W(u) = V(u + \Phi(u))$.

Вычисление приближенного аналитического представления для отображения $v = \Phi(u)$ возможно на основе принципа сжимающих отображений.

Запишем вместо второго уравнения системы (4.20) эквивалентное ему уравнение

$$g(y, v, \lambda) := y + \lambda P^{\infty-2}(\sin(\mathfrak{G}(y) + v)) = 0, \quad (4.21)$$

которое будем рассматривать в подпространстве $\mathfrak{L} := N^\perp$ пространства H . Здесь $\mathfrak{G} := (A_2)^{-1}$ — оператор Грина для краевой задачи $\ddot{x} = q$, $x(0) = x(1) = 0$, суженный на подпространство $\mathfrak{L}$.

Теорема 4.2. При $\lambda < 9\pi^2$ отображение $g(\cdot, v, \lambda) : \mathfrak{L} \longrightarrow \mathfrak{L}$ является сжимающим (с константой сжатия, не зависящей от ξ, u).

Доказательство с очевидностью вытекает из следующих известных неравенств:

$$|\sin(a) - \sin(b)| \leq |a - b|,$$

$$\int_0^1 \ddot{x}^2 ds \geq 81\pi^4 \int_0^1 x^2 ds \quad \forall x \in \mathfrak{L}.$$

Как и в случае ритцевской аппроксимации ключевая функция и ее приближения линейно зависят от параметров q_1, q_2 . Следовательно, эти параметры не входят в уравнение параболического множества $\mathfrak{P}$ — множества точек, в которых вырождается второй дифференциал.

Построенное таким образом параболическое множество для приближенной ключевой функции (при некотором m) преобразуется затем в плоскость параметров q_1, q_2 градиентным отображением, что в итоге и дает приближенное изображение каустики.

Сходимость итерационного процесса, основанного на формуле (4.21), является C^r —равномерной по параметрам для любого заранее заданного $r > 0$ (то есть сходимость осуществляется вместе с производными до порядка r). Если выбрать область определения, на которой функционал V трансверсален всем своим особенностям, то C^r -равномерная сходимость обеспечит «топологическую стабилизацию» приближенных изображений каустики.

4.1.5 Примеры приближенного построения каустик и решений

Ниже приведены приближенные изображения каустик и решений, полученные посредством применения итерационного процесса ко второму уравнению системы (4.20) (на основе метода сжимающих отображений).

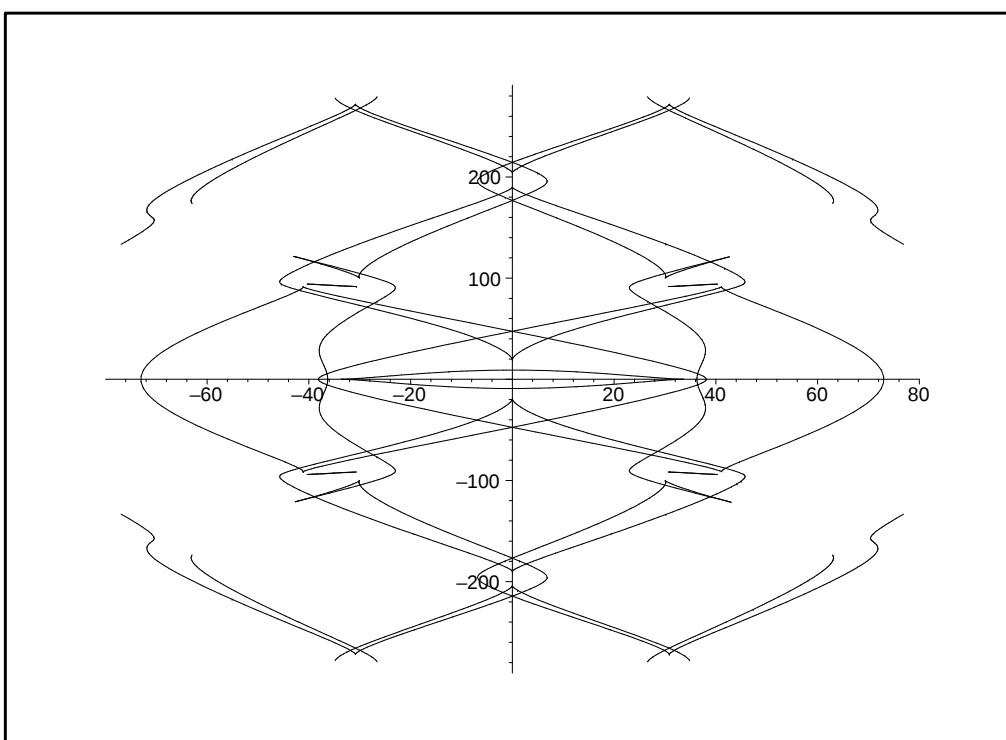
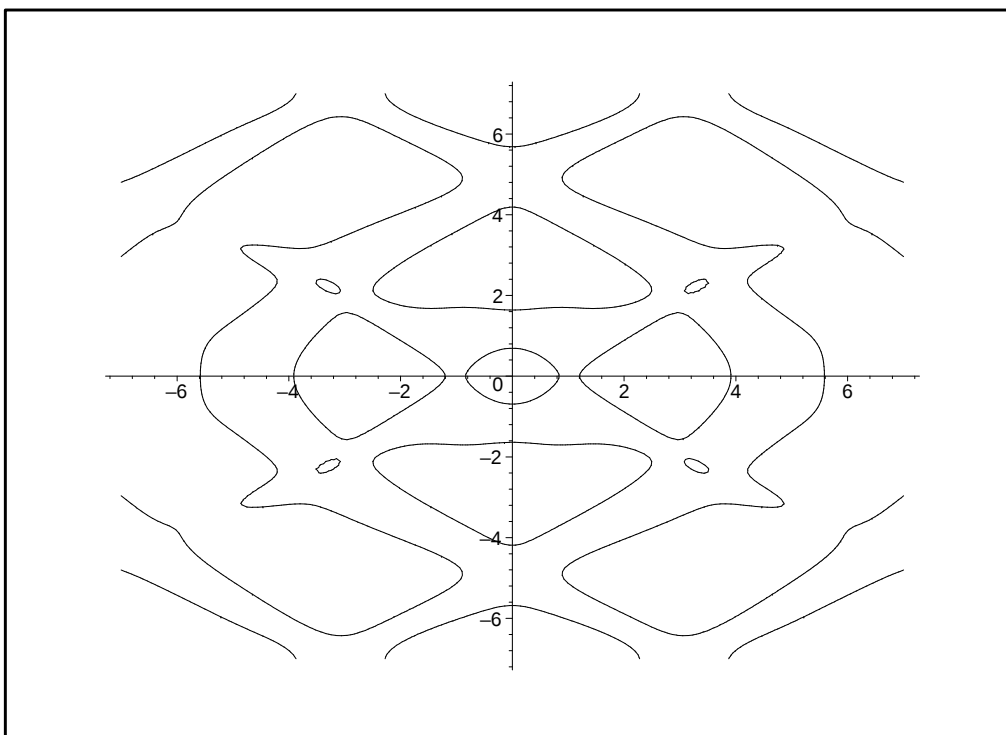


Рис. 23 Фрагменты параболического множества и каустики $\tilde{W}_2(\xi_1, \xi_2)$ при $\lambda = 4\pi^2 + 20$

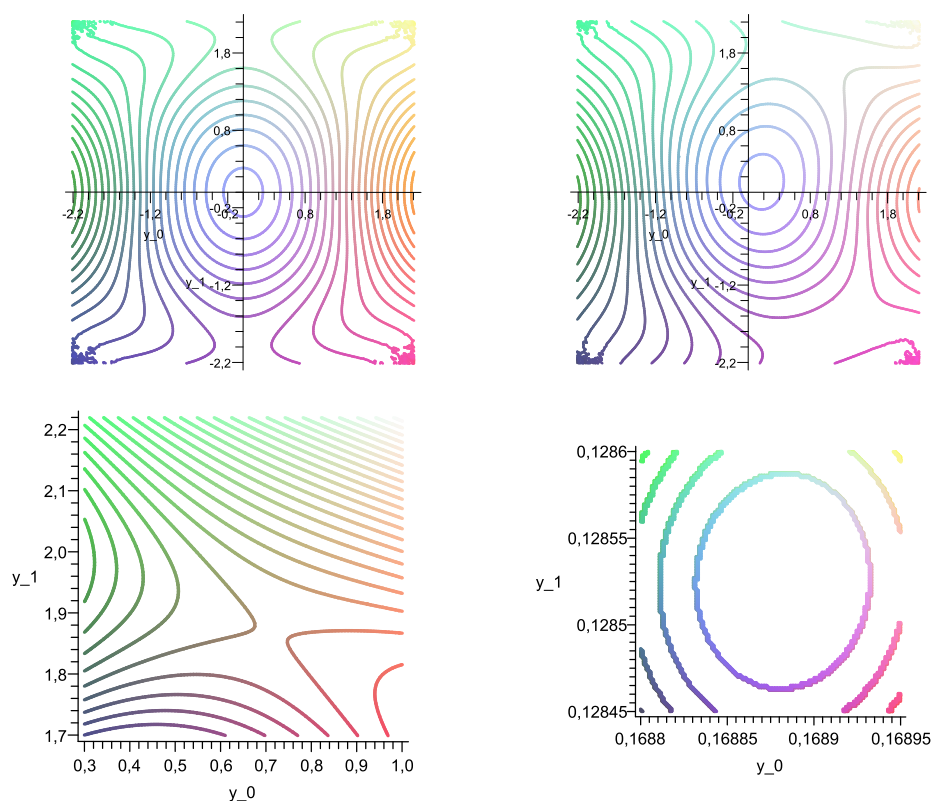


Рис. 24. Линии уровня (в разных масштабах) ключевой функции для соответствующих ячеек регулярности (компонент связности дополнения к каустике)

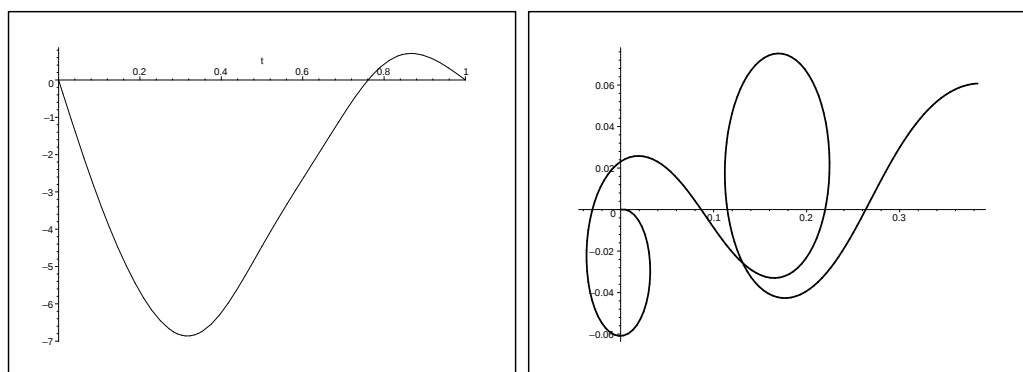


Рис. 25. Изображения неустойчивого решения (индекса Морса единица) и соответствующей ему конфигурации стержня (рисунок получен А.Ю. Борзаковым)

Изложенная здесь исследовательская схема допускает применение в аналогичной задаче для несимметричного стержня.

4.2 Двухмодовые прогибы упругих балок на упругом основании

В данной главе представлены результаты анализа равновесных конфигураций упругой балки на упругом основании в условиях двухмодового вырождения. Решение этой задачи в случае однородной балки ранее было дано Б.М. Даринским и Ю.И. Сапроновым [26], [32].

Уравнение упругого равновесия ниже записано через функцию прогиба средней линии балки. Это уравнение (и краевые условия) можно без особого труда вывести из уравнения Эйлера, если заметить, что координаты x, y произвольной точки средней линии балки связаны с углом φ (между касательным вектором и осью балки следующими соотношениями):

$$\dot{x}(s) = \cos(\varphi(s)), \quad \dot{y}(s) = \sin(\varphi(s)).$$

Переход к случаю неоднородной балки потребовал перестройки в исследовательской схеме Б.М. Даринского и Ю.И. Сапронова, в основе которой лежало условие постоянства пары собственных функций e_1, e_2 второго дифференциала (в нуле) функционала энергии. В случае неоднородной балки это условие нарушается и, более того, оно не допускает прямого обобщения, например, в виде условия существования непрерывного семейства собственных функций. В предлагаемой схеме условие постоянных собственных функций заменено условием существования пары гладких векторных полей $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2$, линейная оболочка которых инвариантна относительно второго дифференциала в нуле. Наличие такой пары достаточно для построения главной части ключевой функции и, как следствие, для проведения анализа ветвления равновесных конфигураций балки.

В построении требуемой пары векторных полей ведущую роль сыграла взятая из монографии В.П. Маслова [58] формула ортогонального проектора (на линейную оболочку $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2$).

Рассмотрение случая слабо неоднородной балки приводит к «понижению» симметрии ключевой функции и увеличению на единицу размерности ее базы деформации (появляется дополнительное квадратичное слагаемое в главной части ключевой функции). Анализ бифуркационных диаграмм и бифурцирующих критических точек в этой ситуации несколько усложняется, но выявляет новые бифуркационные эффекты.

4.2.1 Случай однородной балки

Колебания и волновые движения упругой балки на упругом основании изучали Ю.А. Митропольский, Б.И. Мосеенков [61], J.M.T. Thompson, Н.В. Stewart [96], Б.С. Бардин, С.Д. Фурта [6] и др. Простейшая нелинейная (промасштабированная) модель движений однородной балки описывается уравнением

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \kappa \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \alpha w + w^3 = 0,$$

где w — прогиб балки (поле смещений точек средней линии упругой балки, расположенной вдоль оси x).

Итак, известно, что первый шаг в изучении такой задачи — отыскание равновесных (стационарных) состояний, определяемых уравнением

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + \kappa \frac{d^2 w}{dx^2} + \alpha w + w^3 = 0. \quad (4.22)$$

Если рассмотреть стандартные краевые условия

$$w(0) = w(1) = w''(0) = w''(1) = 0, \quad (4.23)$$

то полученная граничная задача может допускать 2-мерные вырождения, порождающие 2-модовые бифуркации с интересными геометрическими и физическими эффектами. Решение этой задачи проводится на основе конечномерной редукции [50] к описанию экстремалей 2-параметрического семейства полиномов от двух переменных. В случае слабо неоднородной балки также допускается аналогичное сведение, но при этом в полиноме появляется дополнительное слагаемое, создающее более сложную картину бифуркационного поведения решений.

Уравнение (4.22) является уравнением Эйлера для экстремалей функционала

$$V = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} \left(\left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 - \kappa \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 + \alpha w^2 \right) + \frac{w^4}{4} \right) dx. \quad (4.24)$$

Двумерное вырождение нулевой экстремали происходит при

$$\kappa = \kappa_1 := (p^2 + q^2)\pi^2, \quad \alpha = \alpha_1 := p^2 q^2 \pi^4, \quad p, q \in \mathbb{N},$$

со стандартным базисом (модами бифуркации) ядра второго дифференциала

$$e_1 = \sqrt{2} \sin(p \pi x), \quad e_2 = \sqrt{2} \sin(q \pi x).$$

Ниже предполагается, что $p = 1$, $q = 2$ и, соответственно, $\kappa_1 = 5\pi^2$, $\alpha_1 = 4\pi^4$ (эти значения являются наименьшими из тех, при которых происходит 2-мерное вырождение; в остальных случаях анализ аналогичен). Ниже $\delta_1 := \kappa - \kappa_1$, $\delta_2 := \alpha - \alpha_1$ — закритические приращения.

При сделанных предположениях анализ возможных бифуркационных эффектов осуществляется посредством редукции Ляпунова – Шмидта [32] к (ключевой) функции (двух переменных)

$$W(\xi, \delta) = \inf_{w: \langle w, e_1 \rangle = \xi_1, \langle w, e_2 \rangle = \xi_2} V(w, \alpha_1 + \delta_1, \kappa_1 + \delta_2), \quad (4.25)$$

$$\xi = (\xi_1, \xi_2), \quad \delta = (\delta_1, \delta_2).$$

Функционал (4.24) инвариантен относительно инволюций J_1, J_2 :

$$J_2(p)(x) := p(1 - x), \quad J_1 := -J_2.$$

Следовательно, функция (4.25) обладает симметрией прямоугольного параллелограмма:

$$W(-\xi_1, \xi_2, \delta_1, \delta_2) = W(\xi_1, -\xi_2, \delta_1, \delta_2) = W(\xi_1, \xi_2, \delta_1, \delta_2),$$

из которой вытекает [32] справедливость асимптотического представления

$$W(\xi, \delta) = U(\xi, \delta) + o(|\xi|^4) + O(|\xi|^4)O(\delta),$$

где $U(\xi, \delta) = V(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2, \delta)$ — линейная ритцевская аппроксимация функционала V по модам e_1, e_2 . Таким образом, для ключевой функции имеет место асимптотическое представление

$$W_0(\xi, \delta) = \frac{\lambda_1}{2} \xi_1^2 + \frac{\lambda_2}{2} \xi_2^2 + \frac{1}{4} (A \xi_1^4 + 2B \xi_1^2 \xi_2^2 + C \xi_2^4) + \quad (4.26)$$

$$+ o(|\xi|^4) + O(|\xi|^4)O(\delta),$$

$$\lambda_1 = \delta_1 - \pi^2 \delta_2, \quad \lambda_2 = \delta_1 - 4\pi^2 \delta_2,$$

$$A = \int_0^1 e_1^4 dx = \frac{3}{2}, \quad B = \int_0^1 e_1^2 e_2^2 dx = 3, \quad C = \int_0^1 e_2^4 dx = \frac{3}{2}.$$

Сократив на множитель $3/2$, получим функцию (4.26) с нормализованной главной частью:

$$\widetilde{W}_0(\xi, \delta) = \widetilde{U}(\xi, \delta) + o(|\xi|^4) + O(|\xi|^4)O(\delta),$$

где

$$\widetilde{U}(\xi, \delta) = \frac{\tilde{\lambda}_1}{2}\xi_1^2 + \frac{\tilde{\lambda}_2}{2}\xi_2^2 + \frac{1}{4}(\xi_1^4 + 4\xi_1^2\xi_2^2 + \xi_2^4).$$

«Геометрический сюжет» бифуркации критических точек и первые асимптотики ветвей бифурцирующих точек (по закритическим приращением управляющих параметров) для функции $\widetilde{W}_0(\xi, \delta)$ полностью определяются ее главной частью $\widetilde{U}(\xi, \delta)$, которая представляет собой «возмущенную двумерную сборку» (с коэффициентом двойного отношения $a = 2$), четную по каждой переменной.

Критические точки определяются системой уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \widetilde{U}}{\partial \xi_1} &= \tilde{\lambda}_1 \xi_1 + \xi_1^3 + 2\xi_1 \xi_2^2 = 0, \\ \frac{\partial \widetilde{U}}{\partial \xi_2} &= \tilde{\lambda}_2 \xi_2 + 2\xi_1^2 \xi_2 + \xi_2^3 = 0, \end{aligned} \right\}$$

все решения которой делятся на три типа:

- 1) нулевое решение $\xi_1 = \xi_2 = 0$,
- 2) 1-модовые решения $\xi_1 = \pm \sqrt{-\tilde{\lambda}_1}$ ($\lambda_1 < 0$), $\xi_2 = 0$ и $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = \pm \sqrt{-\tilde{\lambda}_2}$ ($\lambda_2 < 0$),
- 3) 2-модовые решения $\xi_1 = \pm \sqrt{\frac{\tilde{\lambda}_1 - 2\tilde{\lambda}_2}{3}}$, $\xi_2 = \pm \sqrt{\frac{\tilde{\lambda}_2 - 2\tilde{\lambda}_1}{3}}$, ($\tilde{\lambda}_1 - 2\tilde{\lambda}_2 > 0$, $\tilde{\lambda}_2 - 2\tilde{\lambda}_1 > 0$).

Пусть $\theta_1 = \tilde{\lambda}_1 - 2\tilde{\lambda}_2$, $\theta_2 = \tilde{\lambda}_2 - 2\tilde{\lambda}_1$. Так как матрица Гессе функции $\widetilde{U}$ представима в виде

$$\begin{pmatrix} \tilde{\lambda}_1 + 3\xi_1^2 + 2\xi_2^2 & 4\xi_1\xi_2 \\ 4\xi_1\xi_2 & \tilde{\lambda}_2 + 2\xi_1^2 + 3\xi_2^2 \end{pmatrix},$$

то, как нетрудно проверить, при $\theta_1 > 0$ и $\theta_2 > 0$ существуют четыре 2-модовые критические точки индекса 1. Все 1-модовые точки при этом являются точками локальных минимумов, а нуль — критической точкой индекса 2. Рождение 1-модовых критических точек происходит при переходах параметров $\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2$ в области отрицательных значений.

Каустика (бифуркационная диаграмма функций [4]) $\Sigma_{\tilde{U}}$ функции $\tilde{U}$ разбивает плоскость управляющих параметров на шесть зон

$$\begin{aligned}\omega_0 &= \{\tilde{\lambda}_1 > 0, \tilde{\lambda}_2 > 0\}, \\ \omega_1 &= \{\tilde{\lambda}_1 < 0, \tilde{\lambda}_2 > 0\}, \\ \omega_2 &= \{\tilde{\lambda}_1 > 0, \tilde{\lambda}_2 < 0\}, \\ \omega_3 &= \{\tilde{\lambda}_1 < 0, \tilde{\lambda}_2 < 0, \theta_1 < 0, \theta_2 > 0\}, \\ \omega_4 &= \{\tilde{\lambda}_1 < 0, \tilde{\lambda}_2 < 0, \theta_1 > 0, \theta_2 < 0\}, \\ \omega_5 &= \{\tilde{\lambda}_1 < 0, \tilde{\lambda}_2 < 0, \theta_1 > 0, \theta_2 > 0\}.\end{aligned}$$

Каждой зоне соответствует свой расклад (*bif*-расклад) бифурцирующих критических точек: параметрам из зоны ω_0 отвечает случай единственной критической точки (точка минимума в нуле), для ω_1, ω_2 — пара симметрично расположенных (относительно нуля) 1-модовых точек минимума и седло в нуле, для ω_3, ω_4 — пара симметрично расположенных 1-модовых точек минимума, пара 1-модовых седел и точка локального максимума в нуле, для ω_5 — четверка симметрично расположенных 1-модовых точек минимума, четверка 2-модовых седел и точка локального максимума в нуле.

При обходе плоскости управляющих параметров против часовой стрелки вокруг нуля, начиная с зоны ω_0 , соответствующие метаморфозы линий уровней и распределений критических точек изображены на следующей диаграмме:

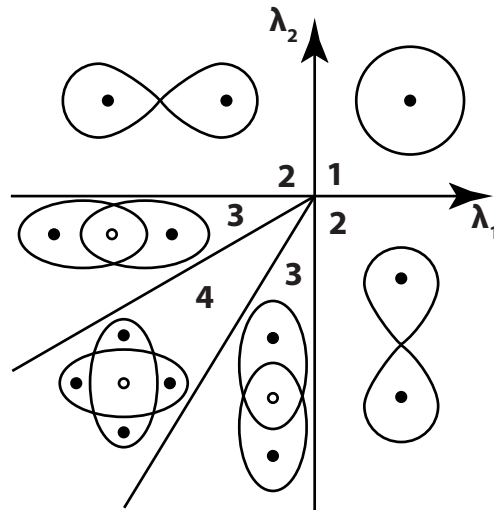


Рис. 26

В этом случае появляются те и только те расклады бифурцирующих критических точек (*bif*-расклады), которым соответствуют следующие целочисленные векторы: $(1, 0, 0)$, $(2, 1, 0)$, $(2, 2, 1)$, $(4, 4, 1)$.

4.2.2 Случай пары упруго связанных балок

Простейшая нелинейная (промасштабированная) модель равновесных состояний пары упруго связанных балок определяется системой уравнений

$$\begin{aligned}\frac{d^4 w_1}{dx^4} + \kappa_1 \frac{d^2 w_1}{dx^2} + \alpha_1 w_1 + w_1^3 + a w_1 w_2^2 &= 0, \\ \frac{d^4 w_2}{dx^4} + \kappa_2 \frac{d^2 w_2}{dx^2} + a w_1^2 w_2 + \alpha_2 w_2 + w_2^3 &= 0.\end{aligned}\quad (4.27)$$

Если рассмотреть (стандартные) краевые условия

$$\begin{aligned}w_1(0) = w_1(1) = w_1''(0) = w_1''(1) &= 0, \\ w_2(0) = w_2(1) = w_2''(0) = w_2''(1) &= 0,\end{aligned}\quad (4.28)$$

то полученная граничная задача допускает 3-мерные и 4-мерные вырождения, порождающие 3-модовые и 4-модовые бифуркации.

Уравнение (4.27) является уравнением Эйлера для экстремалей функционала

$$\begin{aligned}V = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} \left(\left(\frac{d^2 w_1}{dx^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2 w_2}{dx^2} \right)^2 - \kappa_1 \left(\frac{dw_1}{dx} \right)^2 - \kappa_2 \left(\frac{dw_2}{dx} \right)^2 \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (\alpha_1 w_1^2 + \alpha_2 w_2^2) + \frac{w_1^4 + a w_1^2 w_2^2 + w_2^4}{4} \right) dx.\end{aligned}\quad (4.29)$$

Четырехмерное вырождение нулевой экстремали происходит при

$$\begin{aligned}\kappa_1 &:= (p_1^2 + q_1^2) \pi^2, & \alpha_1 &:= p_1^2 q_1^2 \pi^4, & p_1, q_1 &\in \mathbb{N}, \\ \kappa_2 &:= (p_2^2 + q_2^2) \pi^2, & \alpha_2 &:= p_2^2 q_2^2 \pi^4, & p_2, q_2 &\in \mathbb{N},\end{aligned}$$

со стандартным базисом (модами бифуркации) ядра второго дифференциала

$$\begin{aligned}e_1 &= \left(\sqrt{2} \sin(p_1 \pi x), 0 \right), & e_2 &= \left(\sqrt{2} \sin(q_1 \pi x), 0 \right), \\ e_3 &= \left(0, \sqrt{2} \sin(p_2 \pi x) \right), & e_4 &= \left(0, \sqrt{2} \sin(q_2 \pi x) \right).\end{aligned}$$

При сделанных предположениях анализ возможных бифуркационных эффектов осуществляется посредством редукции Ляпунова – Шмидта к (ключевой) функции (четырех переменных), обладающей симметрией прямоугольного параллелепипеда.

«Геометрический сюжет» бифуркации критических точек и первые асимптотики ветвей бифурцирующих точек (по закритическим приращением управляющих параметров) для функции $\widetilde{W}_0(\xi, \delta)$ определяются ее главной частью $\widetilde{U}(\xi, \delta)$, которая представляет собой возмущенную четырехмерную сборку.

Таким образом, решение этой задачи можно осуществить на основе конечномерной редукции к задаче об экстремалиях параметрического семейства полиномов от трех и четырех переменных. В случае слабой неоднородности балок главная часть ключевой функции содержит дополнительные слагаемые, создающие более сложную картину бифуркационного поведения критических точек.

4.2.3 Случай слабо неоднородной балки

Упругие равновесия слабо неоднородной балки описываются уравнением

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(q \frac{d^2 w}{dx^2} \right) + \kappa \frac{d^2 w}{dx^2} + \alpha w + w^3 = 0, \quad q(x) = 1 + \varepsilon \gamma(x), \quad (4.30)$$

где ε — малый параметр, γ — гладкая функция. Уравнение (4.30) (также рассматриваемое на отрезке $[0, 1]$ числовой оси при краевых условиях (4.23)) определяет экстремали функционала

$$V = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} \left(q \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 - \kappa \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 + \alpha w^2 \right) + \frac{w^4}{4} \right) dx. \quad (4.31)$$

Так как в «неоднородном случае» появляется третий управляющий параметр, то дискриминантное множество будет двумерной поверхностью в трехмерном пространстве (параметры δ_1, δ_2 (закритические приращения к параметрам κ и α) вместе с параметром ε образуют трехмерное пространство параметров $\mathbb{R}^3$).

Теорема 4.3. В краевой задаче (4.30), (4.23) дополнение к дискриминантному множеству (подмножество $\mathbb{R}^3 \setminus \Sigma(f)$), рассмотренное в достаточно малой окрестности нуля, состоит из четырех связанных открытых подмножеств $\Omega_1, \Omega_3, \Omega_5$ и Ω_9 (ячеек регулярности), которым соответствуют следующие *bif*-расклады: $(1, 0, 0)$, $(2, 1, 0)$, $(2, 2, 1)$, $(4, 4, 1)$.

Доказательство этой теоремы, основанное на применении модифицированной схемы Ляпунова – Шмидта, будет дано в следующих разделах.

Наличие «весового» множителя q не позволяет применять исследовательскую схему работы [26], так как из-за него не выполняется условие постоянства мод бифуркации. На нем основан вычислительный алгоритм [26]. Тем не менее, бифуркационный анализ решений краевой задачи (4.30), (4.23) также можно осуществить посредством редукции Ляпунова – Шмидта к ключевой функции более общего вида

$$\widetilde{W}(\xi, \delta) = \inf_{w: \langle w, \tilde{e}_1 \rangle = \xi_1, \langle w, \tilde{e}_2 \rangle = \xi_2} V(w, \alpha_1 + \delta_1, \kappa_1 + \delta_2), \quad (4.32)$$

где $\{\tilde{e}_k\}$ — «возмущенные» моды бифуркации:

$$\tilde{e}_k = e_k + \varepsilon h_k + o(\varepsilon),$$

образующие базис в 2-мерном корневом подпространстве оператора Гессе $\mathcal{H} = \mathcal{A} + \varepsilon \mathcal{B}$ в нуле (соответствующего функционалу (4.31)), где

$$\mathcal{A}w := \frac{d^4 w}{dx^4} + \kappa \frac{d^2 w}{dx^2} + \alpha w, \quad \mathcal{B}w := \frac{d^2}{dx^2} \left(\gamma \frac{d^2 w}{dx^2} \right),$$

$$e_k = \sqrt{2} \sin(k\pi x)$$

(элементы $\tilde{e}_k$ не являются, вообще говоря, собственными функциями оператора $\mathcal{H}$).

Основная техническая трудность в построении главной части ключевой функции (4.32) состоит в вычислении коэффициентов h_k . Их можно определить на основе теоремы 3.1.

Итак, вместо собственных функций рассматриваем такие элементы $\tilde{e}_j(\lambda)$, $j = 1, 2$, для которых

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, \lambda) \tilde{e}_j(\lambda) = \sum_k \alpha_{jk}(\lambda) \tilde{e}_k(\lambda).$$

Функции $\tilde{e}_j(\lambda)$ будем называть корневыми.

Важным сопутствующим обстоятельством в предложенном здесь подходе является то, что входящие в эти соотношения функции $\alpha_{jk}(\lambda)$, $\tilde{e}_j(\lambda)$ будут гладко зависеть от λ . В качестве искомых базисных элементов можно взять

$$\tilde{e}_k(\lambda) := \mathbf{P}(\lambda)(e_k),$$

где

$$\mathbf{P}(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\ell} \mathcal{R}(\lambda, z) dz$$

ортопроектор на двумерное корневое подпространство, ℓ — окружность достаточно малого радиуса с центром в нуле (на комплексной плоскости), $\mathcal{R}(\lambda, z)$ — резольвента:

$$\mathcal{R}(\lambda, z) = (\mathcal{A} + \varepsilon \mathcal{B} - zI)^{-1}.$$

Таким образом,

$$\tilde{e}_k = e_k + \varepsilon h_k + o(\varepsilon), \quad (4.33)$$

где

$$h_k = \mathcal{M} e_k, \quad (4.34)$$

$$\mathcal{M} := \frac{1}{2\pi i} \oint_{\ell} (\mathcal{A} - zI)^{-1} \mathcal{B} (\mathcal{A} - zI)^{-1} dz. \quad (4.35)$$

4.2.4 Вычисление интегральных коэффициентов

Из предыдущих рассуждений следует, что для получения корневых векторов $\tilde{e}_k$ необходимо вычислить интеграл

$$\mathcal{M} e_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} (\mathcal{A} - zI)^{-1} \mathcal{B} (\mathcal{A} - zI)^{-1} e_k dz, \quad (4.36)$$

с учетом краевых условий (4.23) (здесь ℓ контур $|z| = 1$).

Собственное число $z = 0$ двукратно. Ему отвечают собственные элементы $e_k = \sqrt{2} \sin(k\pi x)$, $k = 1, 2$.

Заметим, что если e_k — собственный вектор, отвечающий собственному числу z_k : $\mathcal{A} e_k = z_k e_k$, то

$$(\mathcal{A} - zI)^{-1} (\mathcal{A} - z_k I) e_k = 0,$$

или

$$(\mathcal{A} - zI)^{-1} (\mathcal{A} - zI + zI - z_k I) e_k = e_k - (z_k - z)(\mathcal{A} - zI)^{-1} e_k = 0.$$

Отсюда получаем

$$(\mathcal{A} - zI)^{-1}e_k = \frac{e_k}{z_k - z}.$$

Таким образом, формулу (4.36) можно записать в виде:

$$\mathcal{M}e_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{(\mathcal{A} - zI)^{-1}\mathcal{B}e_k}{z_k - z} dz. \quad (4.37)$$

Очевидно, что оператор $\mathcal{A}$ с заданной областью определения и краевыми условиями является симметричным, а собственные функции, в силу следствия из теоремы 1 ([63], с. 91), образуют полную систему в $L^2[0, 1]$.

Рассмотрим функцию $g(x) = \mathcal{B}e_k$, $g(x) \in L^2[0, 1]$, и разложим ее в ряд по собственным функциям оператора $\mathcal{A}$:

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n(x), \quad (4.38)$$

где

$$c_n = \int_0^1 g(s) e_n(s) ds = \int_0^1 e_n(s) (\gamma(s) e_k''(s))'' ds. \quad (4.39)$$

Интегрируя по частям, преобразуем интеграл (4.39) к виду

$$c_n = -(n\pi)^2 \int_0^1 e_n(s) \gamma(s) e_k''(s) ds = (nk\pi^2)^2 \int_0^1 \gamma(s) e_n(s) e_k(s) ds.$$

Пользуясь формулой (4.38) в интеграле (4.37), при $\kappa = 5\pi^2$, $\alpha = 4\pi^4$ получаем следующие разложения:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}e_k(x) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{(\mathcal{A} - zI)^{-1}}{z} \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n(x) dz = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{e_n(x) dz}{z(z_n - z)} = \\ &= \sum_{n=3}^{\infty} c_n e_n(x) \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{1}{z_n} \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z_n - z} \right) dz = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{c_n e_n(x)}{z_n}. \end{aligned}$$

Здесь были учтено, что $z_1 = z_2 = 0$ и

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^2} = 0.$$

Таким образом, на основе (4.36) получаем для возмущенных собственных функций (в случае слабой неоднородности):

$$\left. \begin{aligned} & \mathcal{M}e_1 = \\ & = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{2\sqrt{2} n^2}{(n^2-4)(n^2-1)} \left(\int_0^1 \gamma(s) \sin(n\pi s) \sin(\pi s) ds \right) \sin(n\pi x), \\ & \mathcal{M}e_2 = \\ & = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{8\sqrt{2} n^2}{(n^2-4)(n^2-1)} \left(\int_0^1 \gamma(s) \sin(n\pi s) \sin(2\pi s) ds \right) \sin(n\pi x). \end{aligned} \right\} \quad (4.40)$$

Итак, справедливо следующее утверждение.

Теорема 4.4. *Возмущенные корневые векторы $\tilde{e}_k$, $k = 1, 2$ можно представить в виде (4.33), где h_k определяются соотношениями (4.34), (4.40).*

Замечание 4.1. *Последняя теорема дает возможность компьютерного анализа влияния характера неоднородности балки на формы ее закритического прогиба. Результаты компьютерного эксперимента, проведенного на основе этой теоремы, представлены на рисунках в заключительной части главы.*

Теперь, когда известны первые асимптотики корневых векторов $\tilde{e}_1$, $\tilde{e}_2$, можно построить главную часть ключевой функции (с точностью до линейной замены координат).

$$\begin{aligned} W_q(\xi, \nu) = & \frac{1}{2} (\nu_1 \xi_1^2 + \nu_2 \xi_2^2 + 2 \nu_3 \xi_1 \xi_2) + \frac{1}{4} (A \xi_1^4 + 2B \xi_1^2 \xi_2^2 + C \xi_2^4) + \\ & + o(|\xi|^4) + O(|\xi|^4)O(\nu, \varepsilon) + o(\nu, \varepsilon), \end{aligned}$$

где

$$\nu_1 = \int_0^1 \left(q \left(\frac{d^2 \tilde{e}_1}{dx^2} \right)^2 - (\kappa_1 + \delta_1) \left(\frac{d \tilde{e}_1}{dx} \right)^2 + (\alpha_1 + \delta_2) \tilde{e}_1^2 \right) dx, \quad (4.41)$$

$$\nu_2 = \int_0^1 \left(q \left(\frac{d^2 \tilde{e}_2}{dx^2} \right)^2 - (\kappa_1 + \delta_1) \left(\frac{d\tilde{e}_2}{dx} \right)^2 + (\alpha_1 + \delta_2) \tilde{e}_2^2 \right) dx, \quad (4.42)$$

$$\nu_3 = \varepsilon \int_0^1 \left(\gamma \frac{d^2 \tilde{e}_1}{dx^2} \cdot \frac{d^2 \tilde{e}_2}{dx^2} \right) dx, \quad (4.43)$$

$$A = C = \int_0^1 e_1^4 dx = \frac{3}{2}, \quad B = \int_0^1 e_1^2 e_2^2 dx = 3.$$

После сокращения на множитель $\frac{3}{2}$ получаем искомое представление ключевой функции. Таким образом, справедлива следующая

Теорема 4.5. *Существует система ключевых координат, в которой для ключевой функции имеет место представление*

$$\begin{aligned} \widetilde{W}_q(\xi, \nu) = & \frac{1}{2} (\tilde{\nu}_1 \xi_1^2 + \tilde{\nu}_2 \xi_2^2 + 2 \tilde{\nu}_3 \xi_1 \xi_2) + \frac{1}{4} (\xi_1^4 + 4 \xi_1^2 \xi_2^2 + \xi_2^4) + \\ & + o(|\xi|^4) + O(|\xi|^4) O(\tilde{\nu}, \varepsilon) + o(\tilde{\nu}, \varepsilon). \end{aligned}$$

При этом $\tilde{\nu}_j$ определены соотношениями (4.34), (4.35), (4.40), (4.41)–(4.43).

По сравнению с функцией W_0 , определенной равенством (4.26), здесь появилось дополнительное слагаемое $\tilde{\nu}_3 \xi_1 \xi_2$, разрушающее симметрию прямоугольного параллелограмма.

Замечание 4.2. *Гладкий локальный топологический тип каустики (в нуле) и расклады бифурцирующих экстремалей функционала энергии V совпадают с гладким локальным топологическим типом каустики и раскладами бифурцирующих экстремалей ключевой функции W (см. главу 1). Из теорем Дж. Мазера о конечной определенности ростков гладкой функции следует, что локальный топологический тип каустики и набор *bif*-раскладов ключевой функции W полностью определяется ее главной частью U . Поэтому для завершения доказательства теоремы теоремы 4.3 осталось изучить каустику и расклады критических точек функции U .*

Замечание 4.3. Бифуркационный анализ дифференциальных уравнений четвертого порядка при периодических краевых условиях был осуществлен В.Г. Задорожним и его учениками на основе методов теории усреднений [38].

4.2.5 Исследование каустики главной части ключевой функции

Рассмотрим систему уравнений, определяющую критические точки:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \xi_1} &= \tilde{\nu}_1 \xi_1 + \xi_1^3 + 2\xi_1 \xi_2^2 + \tilde{\nu}_3 \xi_2 = 0, \\ \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \xi_2} &= \tilde{\nu}_2 \xi_2 + 2\xi_1^2 \xi_2 + \xi_2^3 + \tilde{\nu}_3 \xi_1 = 0, \\ \det H &= \begin{vmatrix} \tilde{\nu}_1 + 3\xi_1^2 + 2\xi_2^2 & 4\xi_1 \xi_2 + \tilde{\nu}_3 \\ 4\xi_1 \xi_2 + \tilde{\nu}_3 & \tilde{\nu}_2 + 2\xi_1^2 + 3\xi_2^2 \end{vmatrix} = 0. \end{aligned} \right\}$$

(здесь H — матрица Гессе).

Решая данную систему относительно $\tilde{\nu}_1, \tilde{\nu}_2, \tilde{\nu}_3$ и перейдя к полярным координатам $\xi_1 = \rho \sin \varphi$, $\xi_2 = \rho \cos \varphi$, получим

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\nu}_1 &= -\rho^2 \frac{(3 + \cos^3(2\varphi))}{2 + \sin^2(2\varphi)}, \\ \tilde{\nu}_2 &= -\rho^2 \frac{(3 - \cos^3(2\varphi))}{2 + \sin^2(2\varphi)}, \\ \tilde{\nu}_3 &= -3\rho^2 \frac{\sin^3(2\varphi)}{4 + 2\sin^2(2\varphi)}. \end{aligned} \right\}$$

На основе этой системы соотношений получено (в компьютерной среде Maple) следующее изображение каустики.

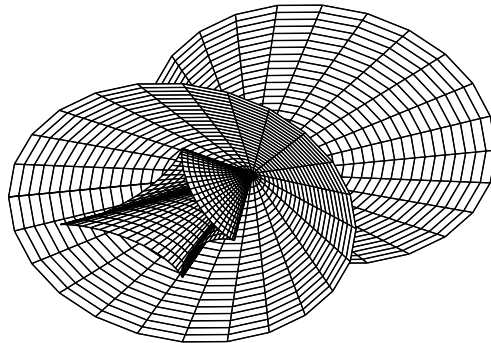
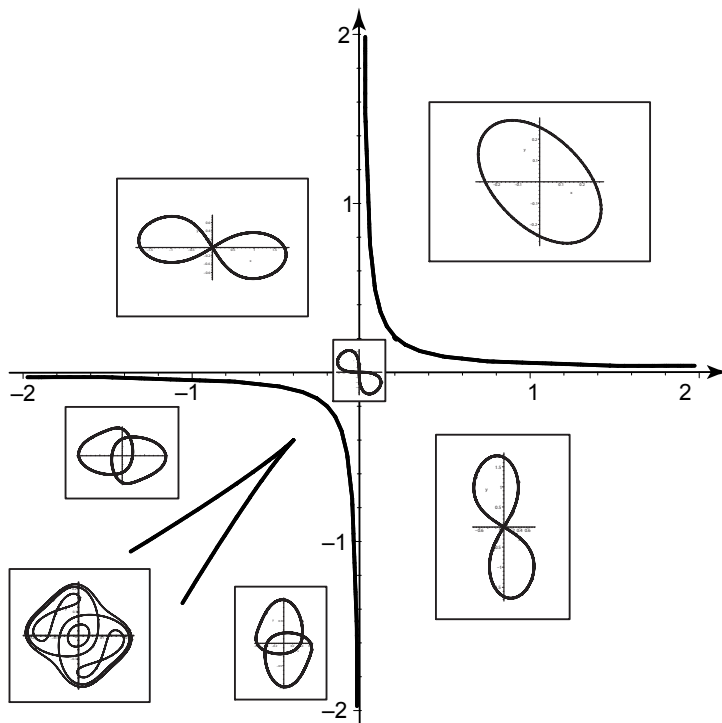
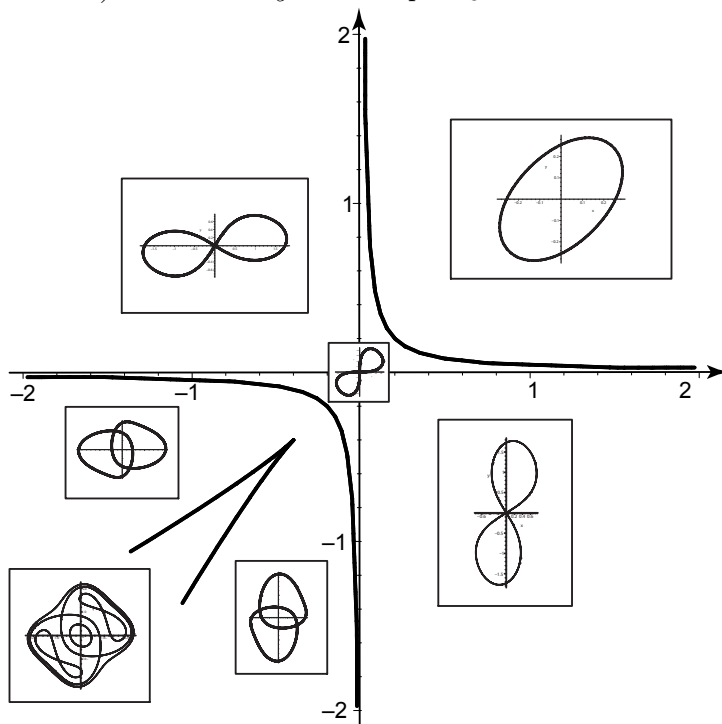


Рис. 27

Если зафиксировать $\tilde{\nu}_3 = \text{const} \neq 0$, то получим двумерное сечение каустики, посредством которого удобно иллюстрировать появление метаморфоз линий уровней (в зависимости от изменения управляющих параметров).



а) сечение каустики при $\tilde{\nu}_3 = \text{const} > 0$



б) сечение каустики при $\tilde{\nu}_3 = \text{const} < 0$

Рис. 28

На рис. 29 изображены линии уровня главной части ключевой функции (при «типичных» значениях параметров $\tilde{\nu}_1, \tilde{\nu}_2, \tilde{\nu}_3$ и функции $\gamma = 0,01 \cdot \sin(2\pi x)$): сепаратрисные линии уровня ключевой функции и прогибы (рис. 30), соответствующие точкам минимума.

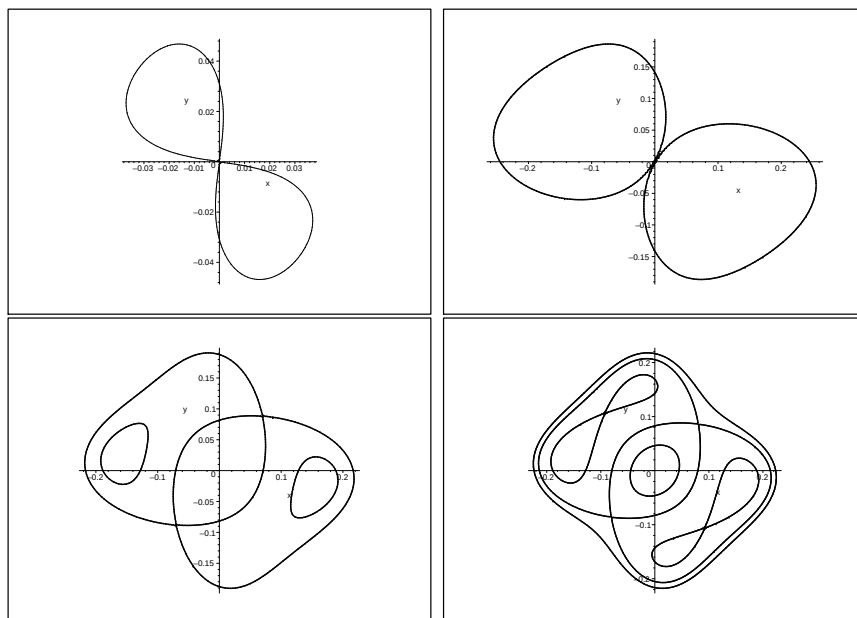


Рис. 29

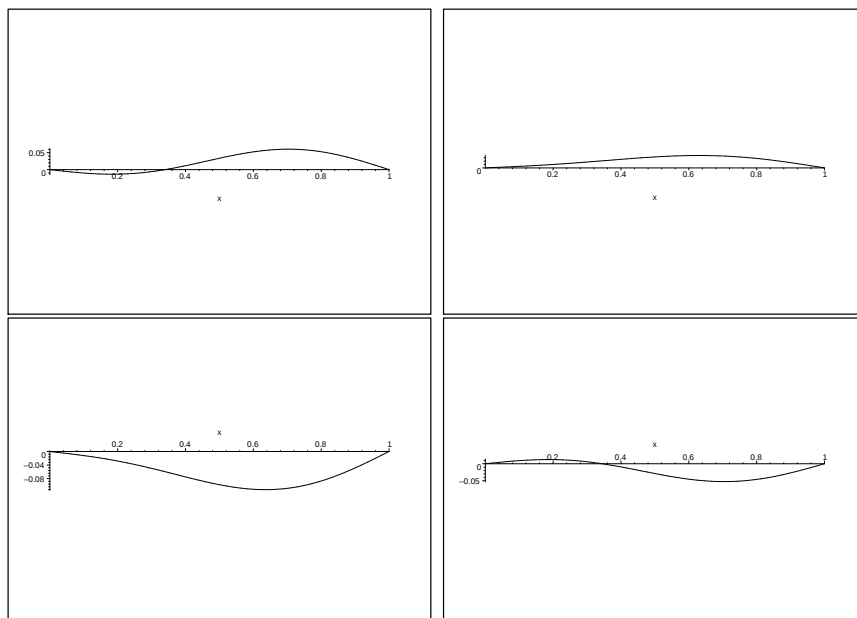


Рис. 30

4.3 Двухмодовые прогибы слабо неоднородной упругой пластины Кáрмана

В данном параграфе дан бифуркационный анализ слабо неоднородной упругой пластины. Основная трудность при появлении слабой неоднородности заключена в потере симметрии прямоугольного параллелограмма, что требует вычисления возмущенных мод бифуркаций и построении дискриминантного множества ключевой функции. В пункте 4.3.2 будет дано точное описание соответствующих конструкций.

4.3.1 Однородная упругая пластина

Равновесное состояние упругой прямоугольной пластины, продольно сжатой и шарнирно закрепленной на крае, описывается уравнениями Кáрмана (промасштабированными) [21]

$$\Delta^2 w - [w, \varphi] + \lambda w_{xx} = \Delta^2 \varphi + \frac{1}{2}[w, w] = 0, \quad x, y \in \Omega_a, \quad (4.44)$$

при краевых условиях

$$w = \Delta w = \varphi = \Delta \varphi = 0|_{\Omega_a}, \quad \Omega_a = [0, a] \times [0, 1]. \quad (4.45)$$

Через w и φ в этих уравнениях обозначены функции прогиба и натяжения пластины длины a и ширины единица, Δ – гармонический оператор Лапласа, $[w, \varphi] := w_{xx}\varphi_{yy} + w_{yy}\varphi_{xx} - 2w_{xy}\varphi_{xy}$, λ – параметр нагрузки.

Локальный бифуркационный анализ равновесий пластины Кáрмана успешно осуществляется благодаря тому, что имеет место представление

$$W(\xi, \lambda, a) = \frac{1}{2} (\alpha_1(\lambda, a)\xi_1^2 + \alpha_2(\lambda, a)\xi_2^2) + \sum_{i,j=1}^2 h_{i,j}\xi_i^2\xi_j^2 + \dots,$$

где α_1, α_2 – собственные значения оператора $\Delta^2 + \lambda \frac{\partial^2}{\partial x^2}$, отвечающие собственным векторам e_1, e_2 (см. [79]),

$$h_{j,j} = \frac{1}{8} |\Delta^{-1}[e_j, e_j]|^2,$$

$$h_{1,2} = h_{2,1} = \frac{1}{8} (\langle \Delta^{-1}[e_1, e_1], \Delta^{-1}[e_2, e_2] \rangle + 2|\Delta^{-1}[e_1, e_2]|^2).$$

Из результатов вычислений, опубликованных в [91], следует, что для нескольких начальных мод прогиба выполняется неравенство

$$\sqrt{h_{1,1}h_{2,2}} < h_{1,2} < 3\sqrt{h_{1,1}h_{2,2}}, \quad (4.46)$$

благодаря которому можно осуществить полный локальный анализ бифуркации равновесий (в случае однородности).

Замечание 4.4. Неравенство (4.46) означает, в частности, положительную определенность формы

$$\sum_{i,j=1}^2 h_{i,j} \xi_i \xi_j$$

в положительной четверти плоскости $\mathbb{R}^2$. Вопрос о знакоопределенности этой формы для произвольной пары мод до сих пор открыт.

4.3.2 Неоднородная упругая пластина

Для описания равновесных состояний упругой прямоугольной слабо неоднородной пластины q при старшей производной появляется дополнительный параметр неоднородности, и уравнение принимает вид

$$\Delta(q\Delta w) - [w, \varphi] + \lambda w_{xx} = \Delta^2 \varphi + \frac{1}{2}[w, w] = 0, \quad x, y \in \Omega_a, \quad (4.47)$$

при краевых условиях (4.45).

q — коэффициент, отвечающий за неоднородность материала, из которого сделана пластина, $q = 1 + \varepsilon \gamma$, ε — малый параметр, $\gamma(x, y)$ — достаточно гладкая функция неоднородности, $[w, \varphi] := w_{xx}\varphi_{yy} + w_{yy}\varphi_{xx} - 2w_{xy}\varphi_{xy}$.

При этом краевая задача (4.47), (4.45) по-прежнему имеет вариационный характер и соответствующим функционалом действия будет

$$V(w, \varphi, \lambda) = \frac{1}{2}(q|\Delta|^2 - \lambda|w_x|^2 - |\Delta\varphi|^2 - \langle [w, w], \varphi \rangle)$$

на пространстве $H^4 \times H^4$. Здесь

$$|\varphi|^2 = \langle \varphi, \varphi \rangle := \int_{\Omega_a} \varphi^2(x, y) dx dy.$$

Исследование функционала V можно провести через редукцию к функционалу $\tilde{V}$:

$$\tilde{V} = \sup_{\varphi: \varphi \in H^4} V(w, \varphi, \lambda).$$

Маргинальное отображение $H^4 \rightarrow H^4 \times H^4$, отвечающее данной редукции, задается соотношением $w \mapsto (w, -\frac{1}{2}\Delta^{-1}[w, w])$. Следовательно, имеет место представление

$$\tilde{V}(w, \lambda, q) = \frac{1}{2}(q|\Delta w|^2 - \lambda|w_{xx}|^2) + \frac{1}{8}|\Delta^{-1}[w, w]|^2.$$

Через Δ^{-1} обозначен оператор Грина $\psi \rightarrow \varphi$, где φ — решение задачи Пуассона:

$$\Delta\varphi = \psi, \quad \varphi|_{\partial\Omega_a} = 0.$$

В [20] установлено, что оператор Δ действует как изоморфизм из пространства функций гёльдеровского класса $C^{2+\alpha}(\Omega_a)$, удовлетворяющих нулевому условию Дирихле на пространство функций гёльдеровского класса $C^{0+\alpha}(\Omega_a)$, удовлетворяющих условию согласования $\psi(0, 0) = \psi(a, 0) = \psi(0, 1) = \psi(a, 1) = 0$.

Обозначим теперь через E банахово пространство $\{w \in H^4 : \Delta^2 w \in F\}$ с нормой $\|w\|_E = \|\Delta^2 w\|_{C^{0+\alpha}(\Omega_a)}$ (см. [32], [79]).

Теорема 4.6. *Для обобщенных уравнений Кармана (4.47) при краевых условиях (4.45) подмножество $\mathbb{R}^3 \setminus \Sigma(f)$ ($\Sigma(f)$ — дискриминантное множество) в достаточно малой окрестности нуля состоит из четырех связных открытых подмножеств $\Omega_1, \Omega_3, \Omega_5, \Omega_9$ (ячеек регулярности), которым соответствуют следующие bif-расклады: $(1, 0, 0)$, $(2, 1, 0)$, $(2, 2, 1)$, $(4, 4, 1)$.*

Доказательство этой теоремы также проводится на основе модифицированной схемы Ляпунова – Шмидта. Рассуждения полностью аналогичны тем, которые проведены в случае балки.

Посредством модифицированного алгоритма редукции Ляпунова – Шмидта, решение данной задачи сводится к анализу ключевой функции

$$W(\xi, \lambda, a, q) := \inf_{v: v \in O_*} V(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + v, \lambda, q), \quad \xi \in O^2,$$

при закритических значениях параметров. Здесь O^2 и O_* — достаточно малые окрестности нулей соответственно в $\mathbb{R}^2$ и

$$E_* = \{v \in E : \langle v, e_1 \rangle = \langle v, e_2 \rangle = 0\}.$$

При этом W допускает представление

$$W = \frac{1}{2}(\alpha_1(\lambda, \varepsilon, a)\xi_1^2 + \alpha_2(\lambda, \varepsilon, a)\xi_2^2 + \alpha_3(\varepsilon, a)\xi_1\xi_2) + \sum_{i,j=1,2}^2 \delta_{ij}\xi_i^2\xi_j^2 + \dots,$$

где

$$\begin{aligned}\delta_{j,j} &= |\Delta^{-1}[\tilde{e}_j, \tilde{e}_j]|^2, \\ \delta_{1,2} = \delta_{2,1} &= \frac{1}{8}(\langle \Delta^{-1}[\tilde{e}_1, \tilde{e}_1], \Delta^{-1}[\tilde{e}_2, \tilde{e}_2] \rangle + 2|\Delta^{-1}[\tilde{e}_1, \tilde{e}_2]|^2), \\ \alpha_1(\lambda, a, \varepsilon) &= \int_0^a q(\Delta\tilde{e}_1)^2 - \lambda(\tilde{e}_1')^2 dx, \\ \alpha_2(\lambda, a, \varepsilon) &= \int_0^a q(\Delta\tilde{e}_2)^2 - \lambda(\tilde{e}_2')^2 dx, \\ \alpha_3(a, \varepsilon) &= 2 \int_0^a q\Delta\tilde{e}_1\Delta\tilde{e}_2 dx.\end{aligned}$$

Здесь в качестве $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2$, берутся возмущенные моды бифуркации.

Теорема 4.7. *Возмущенные корневые векторы $\tilde{e}_k$ можно представить в виде*

$$\tilde{e}_k = e_k - \varepsilon h_k + o(\varepsilon),$$

где h_k определяются соотношениями

$$\begin{aligned}h_k &= P e_k, \\ P &:= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\ell} (\mathcal{A} - zI)^{-1} \mathcal{B}(\mathcal{A} - zI)^{-1} dz, \\ \mathcal{A}u &= \Delta^2 u + \lambda u_{xx}, \quad \mathcal{B}u = \Delta(\gamma \Delta u).\end{aligned}$$

4.3.3 Вычисление интегральных коэффициентов

Из предыдущих рассуждений следует, что для получения корневых векторов $\tilde{e}_k$ необходимо вычислить интеграл

$$\mathcal{M} e_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} (\mathcal{A} - zI)^{-1} \mathcal{B}(\mathcal{A} - zI)^{-1} e_k dz, \quad (4.48)$$

с учетом краевых условий (4.23) (здесь ℓ контур $|z| = 1$).

Собственное число $z = 0$ двукратно. Ему отвечают собственные элементы $e_k = 2 \sin\left(\frac{k\pi x}{a}\right) \sin(\pi y)$, $k = 1, 2$.

Заметим, что если e_k — собственный вектор, отвечающий собственному числу z_k : $\mathcal{A}e_k = z_k e_k$, то

$$(\mathcal{A} - zI)^{-1}(\mathcal{A} - z_k I)e_k = 0,$$

или

$$(\mathcal{A} - zI)^{-1}(\mathcal{A} - zI + zI - z_k I)e_k = e_k - (z_k - z)(\mathcal{A} - zI)^{-1}e_k = 0.$$

Отсюда получаем

$$(\mathcal{A} - zI)^{-1}e_k = \frac{e_k}{z_k - z}.$$

Таким образом, формулу (4.48) можно записать в виде:

$$\mathcal{M}e_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{(\mathcal{A} - zI)^{-1}\mathcal{B}e_k}{z_k - z} dz. \quad (4.49)$$

Очевидно, что оператор $\mathcal{A}$ с заданной областью определения и краевыми условиями является симметричным, а собственные функции образуют полную систему в $L^2[0, 1]$.

Рассмотрим функцию $g(x, y) = \mathcal{B}e_k(x, y)$, $g(x, y) \in L^2[0, 1]$ и разложим ее в ряд по собственным функциям оператора $\mathcal{A}$:

$$g(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n(x, y), \quad (4.50)$$

где

$$\begin{aligned} c_n &= \int_0^a \int_0^1 2 \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin(\pi y) (\Delta(\gamma \Delta e_1)) dy dx = \\ &= \int_0^a \int_0^1 2 \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin(\pi y) (\Delta(\gamma \Delta 2 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin(\pi y))) dy dx = \\ &= \int_0^a \int_0^1 2 \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin(\pi y) \Delta\left(\left(-\pi^2 \left(\frac{a^2 + 1}{a^2}\right)\right) \gamma 2 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin(\pi y)\right) dy dx. \end{aligned}$$

Интегрируя по частям, преобразуем интеграл к виду

$$\begin{aligned}
c_n &= -4\pi^2 \left(\frac{a^2 + 1}{a^2} \right) \int_0^a \int_0^1 \gamma \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin(\pi y) \Delta \left(\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin(\pi y) \right) dy dx = \\
&= 4 \frac{\pi^4}{a^4} (a^2 + 1)(a^2 + n^2) \int_0^a \int_0^1 \gamma \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin(\pi y) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin(\pi y) dy dx.
\end{aligned}$$

Пользуясь формулой (4.50) в интеграле (4.37), при $m = 1$, получаем следующие разложения:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}e_k(x) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{(\mathcal{A} - zI)^{-1}}{z} \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n(x) dz = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{e_n(x) dz}{z(z_n - z)} = \\
&= \sum_{n=3}^{\infty} c_n e_n(x) \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{1}{z_n} \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z_n - z} \right) dz = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{c_n e_n(x)}{z_n}.
\end{aligned}$$

Здесь были учтено, что $z_1 = z_2 = 0$ и

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^2} = 0.$$

Таким образом, на основе (4.36) получаем для возмущенных собственных функций (в случае слабой неоднородности):

$$\left. \begin{aligned}
&\mathcal{M}e_1 = \\
&\sum_{n=3}^{\infty} \frac{4\pi^4(a^2+1)(a^2+n^2)}{(n^2-1)(n^2-4)} \left(\int_0^a \int_0^1 \gamma \sin\left(\frac{\pi s}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi s}{a}\right) \sin^2(\pi r) dr ds \right) e_n, \\
&\mathcal{M}e_2 = \\
&\sum_{n=3}^{\infty} \frac{4\pi^4(a^2+1)(a^2+n^2)}{(n^2-1)(n^2-4)} \left(\int_0^a \int_0^1 \gamma \sin\left(\frac{\pi s}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi s}{a}\right) \sin^2(\pi r) dr ds \right) e_n.
\end{aligned} \right\} \quad (4.51)$$

После масштабирования преобразований и сокращения на общий множитель получим представление ключевой функции в нормальной форме. Таким образом, справедливо следующее утверждение

Теорема 4.8. *Существует система ключевых координат, в которой для ключевой функции имеет место представление*

$$\begin{aligned}\widetilde{W}_q(\xi, \nu) = & \frac{1}{2} (\tilde{\nu}_1 \xi_1^2 + \tilde{\nu}_2 \xi_2^2 + 2 \tilde{\nu}_3 \xi_1 \xi_2) + \frac{1}{4} (\xi_1^4 + 2b \xi_1^2 \xi_2^2 + \xi_2^4) + \\ & + o(|\xi|^4) + O(|\xi|^4)O(\tilde{\nu}, \varepsilon) + o(\tilde{\nu}, \varepsilon), \quad 1 < b < 3.\end{aligned}$$

При этом $\tilde{\nu}_j$ допускают явные выражения через исходные параметры.

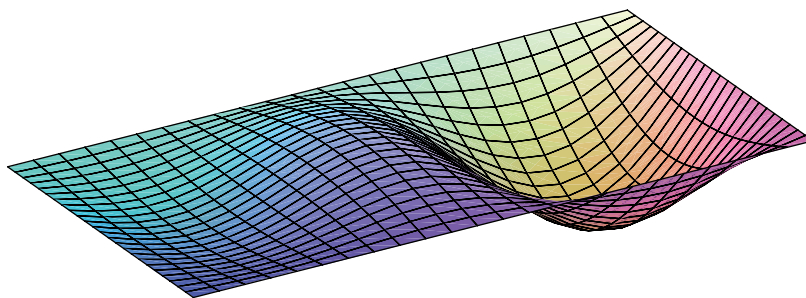
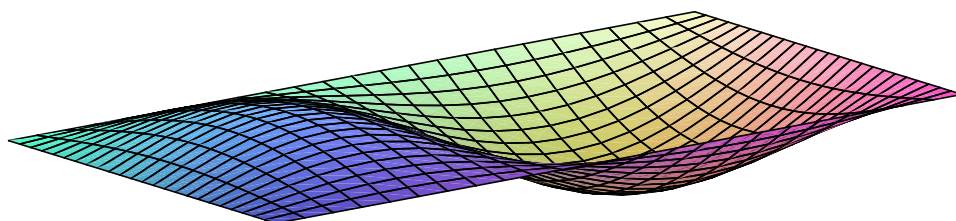
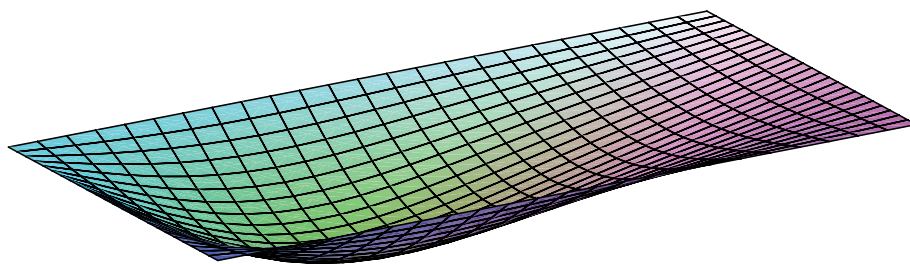
Соотношение $1 < b < 3$ следует из результатов вычислений, опубликованных в [91].

Здесь также появилось дополнительное слагаемое $\tilde{\nu}_3 \xi_1 \xi_2$ (как и в случае балки), понижающее симметрию прямоугольного параллелограмма до симметрии четности.

Замечание 4.5. *В рассмотренной краевой задаче гладкий локальный топологический тип дискриминантного множества (в нуле) и расклады бифурцирующих экстремалей функционала энергии V совпадают с гладким локальным топологическим типом каустики и раскладами бифурцирующих экстремалей ключевой функции W (см. главу 1). Из теорем Дж. Мазера о конечной определенности ростков гладкой функции следует, что локальный топологический тип каустики и набор *bif*-раскладов ключевой функции W полностью определяется ее главной частью U .*

Алгебраическое строение главной части ключевой функции для пластины Кáрмана идентична главной части ключевой функции упругой балки. Поэтому каустики этих функций имеют аналогичное геометрическое строение. Списки раскладов бифурцирующих экстремалей также аналогичны.

На рисунке 31 изображены прогибы пластины при избранных значениях управляющих параметров.



Puc. 31

Литература

1. Аппель П. Фигуры равновесия вращающейся однородной жидкости / П. Аппель. – М. – Л., ОНТИ, 1936. – 375 с.
2. Арнольд В.И. Критические точки функций на многообразии с краем, простые группы Ли B_k, C_k, F_4 и особенности эволют / В.И. Арнольд // Успехи мат. наук. – 1978. – Т. 33, вып. 5(203). – С. 91–105.
3. Арнольд В.И. Математические методы классической механики / В.И. Арнольд. – М. : Наука, 1989. – 472 с.
4. Арнольд В.И. Особенности дифференцируемых отображений / В.И. Арнольд, А.Н. Варченко, С.М. Гусейн-Заде. – М. : МЦНМО, 2004. – 672 с.
5. Арнольд В.И., Математические аспекты классической и небесной механики / В.И. Арнольд, В.В. Козлов, А.И. Нейштадт // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. – М. : ВИНТИ, 1985. – Т. 3. – С. 1–304.
6. Бардин Б.С. Локальная теория существования периодических волновых движений бесконечной балки на нелинейно упругом основании / Б.С. Бардин, С.Д. Фурта // Актуальные проблемы классической и небесной механики. – М. : Эльф, 1998. – С. 13–22.
7. Белых Ф.А. Вторичные редукции в анализе бифуркаций экстремалей из точки минимума с особенностью 3-мерной сборки / Ф.А. Белых, А.В. Зачепа, Ю.И. Сапронов // Семинар по глобальному и стохастическому анализу. – Воронеж : ВГУ, 2005. – Вып. 1. – С. 18–33.
8. Бибигов Ю.Н. Многочастотные нелинейные колебания и их бифуркации / Ю.Н. Бибигов. – Л. : Изд-во, ЛГУ, 1991. – 144 с.

9. Бобылев Н.А. Геометрические методы в вариационных задачах / Н.А. Бобылев, С.В. Емельянов, С.К. Коровин. – М. : Магистр, 1998. – 658 с.
10. Бобылев Н.А. О бифуркации экстремалей вариационных задач / Н.А. Бобылев, М.А. Красносельский // Докл. АН СССР. – 1990. – Т. 314, № 2. – С. 265–268.
11. Богоявленский О.И. Опрокидывающиеся солитоны. Нелинейные интегрируемые уравнения / О.И. Богоявленский. – М. : Наука, 1991. – 320 с.
12. Борисович Ю.Г. Нелинейные фредгольмовы отображения и теория Лере – Шаудера / Ю.Г. Борисович, В.Г. Звягин, Ю.И. Сапронов // Успехи матем. наук. – 1977. – Т. 32, вып. 4. – С. 3–54.
13. Болотин С.В. Периодические решения системы с гироскопическими силами / С.В. Болотин // Прикл. матем. и механ. – 1987. – Т. 51, вып. 4. – С. 686–687.
14. Брекер Т. Дифференцируемые ростки и катастрофы / Т. Брекер, Л. Ландер. – М. : Мир, 1977. – 208 с.
15. Брюно А.Д. Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях / А.Д. Брюно. – М. : Наука. Физматлит, 1998. – 288 с.
16. Ван дер Варден Б.Л. Алгебра / Б.Л. Ван дер Варден. – М. : Наука, 1979. – 624 с.
17. Варченко А.Н. Теорема об эквисингулярности семейств алгебраических многообразий / А.Н. Варченко // Успехи матем. наук. – 1971. – Т. 26, вып. 1. – С. 317–218.
18. Варченко А.Н. О ростках аналитических отображений, топологический тип которых определяется конечной струей / А.Н. Варченко // Функци. анализ и его прил. – 1972. – Т. 6, вып. 3. – С. 63–64.
19. Вишик С.В. Аналоги уравнений Эйлера – Пуассона и магнитной гидродинамики, связанные с группами Ли / С.В. Вишик, Ф.В. Должанский // Докл АН СССР. – 1978. – Т. 238, № 5. – С. 1032–1035.

20. Волков Е.А. О решении краевых задач для уравнения Пуассона в прямоугольнике / Е.А. Волков // Докл. АН СССР. – 1962. – Т. 147, № 2. – С. 13–16.
21. Вольмир А.С. Гибкие пластины и оболочки / А.С. Вольмир. – М. : Гостехиздат, 1956. – 419 с.
22. Гилмор Р. Прикладная теория катастроф / Р. Гилмор. – М. : Мир, 1984. – Т. 1. – 350 с.; Т. 2. – 285 с.
23. Годбийон К. Дифференциальная геометрия и аналитическая механика / К. Годбийон. – М. : Мир, 1973. – 188 с.
24. Голубицкий М. Устойчивые отображения и их особенности / М. Голубицкий, В. Гийемин. – М. : Мир, 1978. – 290 с.
25. Гнездилов А.В. Бифуркации критических торов для функционалов с 3-круговой симметрией / А.В. Гнездилов // Функц. анализ. – 2000. – Т. 34, вып. 1. – С. 83–86.
26. Даринский Б.М. Бифуркации экстремалей вблизи особенности многомерной сборки / Б.М. Даринский, Ю.И. Сапронов // Известия вузов. Математика. – Казань : Форт-Диалог, 1997. – Т. 2. – С. 35–46.
27. Даринский Б.М. К термодинамической теории сегнетоэлектрических фазовых переходов в кристаллах / Б.М. Даринский, Ю.И. Сапронов, В.Л. Шалимов // Кристаллография. – 1999. – Т. 44, № 4. – С. 1–5.
28. Даринский Б.М. Топологический подход к классификациям фаз кристаллических сегнетоэлектриков / Б.М. Даринский, Ю.И. Сапронов // В кн. : Топологические методы нелинейного анализа. – Воронеж : ВГУ, 2000. – С. 41–57.
29. Даринский Б.М. О двухмодовых бифуркациях решений одной вариационной краевой задачи для уравнения четвертого порядка / Б.М. Даринский, Ю.И. Сапронов // Понтрягинские чтения – XI : сб. трудов. – Воронеж : ВГУ, 2000. – Ч. 1. – С. 57–64.
30. Даринский Б.М. Дискриминантные множества и расклады бифурцирующих решений фредгольмовых уравнений / Б.М. Даринский,

- Ю.И. Сапронов // Современная математика и ее приложения. – Тбилиси, 2003. – Т. 7. – С. 72–86.
31. Даринский Б.М. Фредгольмовы функционалы с круговой симметрией и периодические волны / Б.М. Даринский, Е.В. Ладыкина, Ю.И. Сапронов // Математические модели и операторные уравнения. – Воронеж : ВГУ, 2003. – Том 2. – С. 52–67.
32. Даринский Б.М. Бифуркации экстремалей фредгольмовых функционалов / Б.М. Даринский, Ю.И. Сапронов, С.Л. Царёв // Современная математика. Фундаментальные направления. – М. : МАИ, 2004. – Т. 12. – С. 3–140.
33. Даринский Б.М. Фазовые переходы в доменных границах ферроиков / Б.М. Даринский [и др.] // Известия РАН. Серия физическая. – 2004. – Т. 768, № 7. – С. 920–926.
34. Дерунова Е.В. Ветвление периодических экстремалей в стационарной точке с резонансом $1 : 2 : 4$ / Е.В. Дерунова, Ю.И. Сапронов // Семинар по глобальному и стохастическому анализу. – Воронеж : ВГУ, 2010. – Вып. 5. – С. 42–54.
35. Долженков А.А. Нелокальный бифуркационный анализ некоторых конфигураций кирхгофова стержня / А.А. Долженков, Ю.И. Сапронов, Т.Ю. Сапронова // Математические модели и операторные уравнения. – Воронеж : ВГУ, 2009. – Т. 6. – С. 27–41.
36. Желобенко Д.П. Компактные группы Ли и их представления / Д.П. Желобенко. – М. : Наука, 1970. – 664 с.
37. Заваровский Ю.Н. Нормальная форма ключевой функции обобщенного уравнения Кирхгофа / Ю.Н. Заваровский // Успехи матем. наук. – 1983. – Т. 38, вып. 3. – С. 177–178.
38. Задорожний В.Г. Усредненная система дифференциальных уравнений для автогенератора на трех связанных контурах Ван-дер-Поля / В.Г. Задорожний, А.В. Попов // Дифференциальные уравнения. – 1999. – № 11. – С. 1580.

39. Зайцев В.Ф. Дискретно-групповой анализ обыкновенных дифференциальных уравнений / В.Ф. Зайцев. – Л. : ЛГПИ, 1989. – 80 с.
40. Зачепа В.Р. Локальный анализ фредгольмовых уравнений / В.Р. Зачепа, Ю.И. Сапронов. – Воронеж : ВГУ, 2002. – 185 с.
41. Зачепа А.В. Трехмодовые бифуркации решений в краевой задаче для симметричного ОДУ шестого порядка / А.В. Зачепа // Труды матем. факультета. Вып. 8 (новая серия). – Воронеж : ТЕФА, 2004. – С. 48–55.
42. Зачепа А.В. О бифуркации экстремалей фредгольмова функционала из вырожденной точки минимума с особенностью 3-мерной сборки / А.В. Зачепа, Ю.И. Сапронов // Труды математического факультета. Вып. 9 (новая серия). – Воронеж : ВГУ, 2005. – С. 57–71.
43. Изюмов Ю.А. Фазовые переходы и симметрия кристаллов / Ю.А. Изюмов, В.И. Сыромятников. – М. : Наука, 1984. – 247 с.
44. Иллс Дж. Основания глобального анализа / Дж. Иллс // Успехи матем. наук. – 1969. – Т. 24, № 3. – С. 157–210.
45. Карпова А.П. Бифуркационный анализ фредгольмовых уравнений с круговой симметрией и его приложения / А.П. Карпова, Е.В. Ладыкина, Ю.И. Сапронов // Математические модели и операторные уравнения. – Воронеж : ВГУ, 2008. – Т. 5, Ч. 1. – С. 45–90.
46. Койтер В.Т. Устойчивость и закритическое поведение упругих систем / В.Т. Койтер // Механика. Периодический сборник переводов иностр. статей. – 1960. – № 5. – С. 99–110.
47. Костин Д.В. Применение формулы Маслова для асимптотического решения одной задачи об упругих деформациях / Д.В. Костин // Матем. заметки. – 2008. – Т. 83, № 1. – С. 50–60.
48. Костин Д.В. Об одной схеме анализа двухмодовых прогибов слабо неоднородной упругой балки / Д.В. Костин // Доклады Академии наук. 2008. – Т. 418, № 4. – С. 295–299.
49. Костин Д.В. Применение асимптотических методов теории линейных операторов в анализе бифуркаций экстремалей / Д.В. Костин,

- Ю.И. Сапронов // Труды воронежской зимней математической школы
С.Г. Крейна. – 2008. – Воронеж : ВГУ, 2008. – С. 172–179.
50. Красносельский М.А. Об одной схеме исследования вырожденных экстремалей функционалов классического вариационного исчисления / М.А. Красносельский, Н.А. Бобылев, Э.М. Мухамадиев // ДАН СССР. – 1978. – Т. 240, № 3. – С. 530–533.
51. Красносельский М.А. Приближенное решение операторных уравнений / М.А. Красносельский [и др.]. – М. : Наука, 1969. – 456 с.
52. Ленг С. Введение в теорию дифференцируемых многообразий / С. Ленг. – М. : Мир, 1967. – 204 с.
53. Логинов Б.В. Теория ветвления нелинейных уравнений в условиях групповой инвариантности / Б.В. Логинов. – Ташкент : Фан, 1985. – 184 с.
54. Ляв А. Математическая теория упругости / А. Ляв. – М., Л. : НКТН СССР, 1935. – 674 с.
55. Ляпунов А.М. Sur les figures d'équilibre peu differentes des ellipsoïdes d'une masse liquide homogène donnée d'un mouvement de rotation, p.1 / А.М. Ляпунов. – СПб. : Зап. Акад. наук, 1906.
56. Мазер Дж.Н. Конечная определенность гладких отображений / Дж.Н. Мазер // Математика. – 1970. – Т. 14, № 1. – С. 145–175.
57. Мазер Дж.Н. Стратификация и отображения / Дж.Н. Мазер // Успехи матем. наук. – 1972. – Т. 27, № 5. – С. 85–113.
58. Маслов В.П. Асимптотические методы и теория возмущений / В.П. Маслов. – М. : Наука, 1988. – 312 с.
59. Милнор Дж. Теория Морса / Дж. Милнор. – М. : Мир, 1965. – 184 с.
60. Милнор Дж. Особые точки комплексных гиперповерхностей / Дж. Милнор. – М. : Мир, 1971. – 126 с.
61. Мітропольський Ю.О. Дослідження коливань в системах з розподіленими параметрами (асимптотичні методи) / Ю.О. Мітропольський,

- Б.І. Мосеєнков. – Київ : Видавництво Київського університету, 1961. – С. 123
62. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике / С.Г. Михлин. – М. : Наука, 1970. – 512 с.
63. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы / М.А. Наймарк. – М. : Наука, 1969. – 528 с.
64. Нарасимхан Р. Анализ на действительных и комплексных многообразиях / Р. Нарасимхан. – М. : Мир, 1971. – 231 с.
65. Николаи Е.Л. К задаче об упругой линии двойкой кривизны / Е.Л. Николаи // Труды по механике. – М. : Гостехиздат, 1955. – С. 45–277.
66. Ниренберг Л. Лекции по нелинейному функциональному анализу / Л. Ниренберг. – М. : Мир, 1977. – 232 с.
67. Обен Ж.-П. Прикладной нелинейный анализ / Ж.-П. Обен, И. Экланд. – М. : Мир, 1988. – 510 с.
68. Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям / П. Олвер. – М. : Мир, 1989. – 639 с.
69. Особенности дифференцируемых отображений : сб. ст. под ред. В.И. Арнольда. – М. : Мир, 1968. – 268 с.
70. Попов Е.П. Нелинейные задачи статики тонких стержней / Е.П. Попов. – М. : ОГИЗ, 1948. – 170 с.
71. Постников М.М. Введение в теорию Морса / М.М. Постников. – М. : Наука, 1971. – 568 с.
72. Постон Т. Теория катастроф и её приложения / Т. Постон, И. Стюарт. – М. : Мир, 1980. – 608 с.
73. Пуанкаре А. Избранные труды в трех томах. Т. 2. Новые методы небесной механики. Топология. Теория чисел / А. Пуанкаре. – М. : Наука, 1972. – 1000 с.

74. Рапопорт Л.Б. Устойчивость по Ляпунову и знакоопределенность квадратичной формы в конусе / Л.Б. Рапопорт // Прикладная математика и механика. – 1986. – Т. 50, № 4. – С. 674–679.
75. Сапронов Ю.И. Многомодовые бифуркации упругих равновесий / Ю.И. Сапронов // Прикл. матем. и механ. – 1988. – Т. 52, вып. 6. – С. 997–1006.
76. Сапронов Ю.И. Двумодовая бифуркация решений уравнения Кармана / Ю.И. Сапронов // Дифференц. уравнения. – 1989. – Т. 25, № 6. – С. 1078–1081.
77. Сапронов Ю.И. Полурегулярные угловые особенности гладких функций / Ю.И. Сапронов // Матем. сборник. – 1989. – Т. 180, № 10. – С. 1299–1310.
78. Сапронов Ю.И. Нелокальные конечномерные редукции в вариационных краевых задачах / Ю.И. Сапронов // Математические заметки. – 1991. – Т. 49, вып. 1. – С. 94–103.
79. Сапронов Ю.И. Конечномерные редукции в гладких экстремальных задачах / Ю.И. Сапронов // Успехи матем. наук. – 1996. – Т. 51, № 1. – С. 101–132.
80. Сапронов Ю.И. Глобальное сравнение конечномерных редукций в гладких вариационных задачах / Ю.И. Сапронов, С.Л. Царёв // Матем. заметки. – 2000. – Т. 58, № 5. – С. 745–754.
81. Сапронова Т.Ю. О разрушении компактных критических орбит инвариантных фредгольмовых функционалов при несимметричных возмущениях / Т.Ю. Сапронова // Труды математического факультета. Новая серия. – Воронеж : ВГУ, 1997. – № 2. – С. 54–58.
82. Сапронова Т.Ю. О методе квазиинвариантных подмногообразий в теории фредгольмовых функционалов / Т.Ю. Сапронова // В кн.: Топологические методы нелинейного анализа. – Воронеж : ВГУ, 2000. – С. 107–124.

83. Сапронова Т.Ю. О квазиинвариантных подмногообразиях фредгольмовых функционалов / Т.Ю. Сапронова // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения — 2004. — СПб., 2004. — С. 81–88.
84. Треногин В.А. Уравнение разветвления: потенциальность, бифуркации, симметрия / В.А. Треногин, Н.А. Сидоров, Б.В. Логинов // Докл. АН СССР. — 1989. — Т. 309, № 2. — С. 286–289.
85. Фридрихс К. Возмущение спектра операторов в гильбертовом пространстве / К. Фридрихс. — М. : Мир, 1969. — 232 с.
86. Царёв С.Л. О глобальной распрямляемости гладких функций с единственной критической точкой / С.Л. Царёв // Труды матем. факультета ВГУ. — Воронеж : ВГУ, 1996. — № 1 (новая серия). — С. 92–96.
87. Царёв С.Л. Один вариант леммы Морса и его приложения к нелинейным вариационным задачам / С.Л. Царёв // В кн.: Топологические методы нелинейного анализа. — Воронеж : Изд-во ВГУ, 2000. — С. 132–136.
88. Царёв С.Л. Сравнение конечномерных редукций в гладких вариационных задачах с симметрией / С.Л. Царёв // Современная математика и ее приложения. — 2003. — Т. 7. — С. 87–91.
89. Чемерзина Е.В. Об одной схеме вариационного подхода в теории возмущений Релея – Шредингера / Е.В. Чемерзина // Сб. статей аспирантов и студентов матем. факультета ВГУ. — Воронеж : ВГУ, 2000. — С. 70–74.
90. Darinskii B.M. Phase transitions in crystals characterized by polarization and deformation components of the order parameter / B.M. Darinskii, Yu.I. Sapronov, V.V. Shalimov // Ferroelectrics. — 2002. — V. 265. — P. 31–42.
91. Holder E.J. Boundary conditions and mode jumping in the von Karman equations / E.J. Holder, D. Schaeffer // SIAM J. Math. Anal. — 1984. — V. 15, № 3. — P. 446–458.

92. Poénaru V. Singularités C^∞ en Présence de Symétrie / V. Poénaru // Lecture Notes in Mathematics. – N.-Y. : Springer-Verlag, 1976. – V. 510, chapter II. – P. 61–89.
93. Saprónov Yu.I. Direct parameterization of caustics of Fredholm functionals / Yu.I. Saprónov, E.V. Chemerzina // Journ. of Math. Sc. – 2007. – V. 142, № 3. – P. 2189–2197.
94. Siersma D. Singularities of Functions on Boundaries, Corners, etc / D. Siersma // Quart. J. Oxford Ser. – 1981. – V. 32, № 125. – P. 119–127.
95. Schmidt E. Zur Theorie linearen und nichtlinearen Integralgleichungen, Theil 3: Über die Auflösung der nichtlinearen Integralgleichungen und Verzweigung ihrer Lösungen / E. Schmidt // Math. Ann. – 1908. – V. 65. – P. 370–399.
96. Thompson J.M.T. Nonlinear Dynamiks and Chaos / J.M.T. Thompson, H.B. Stewart. – Wiley & Sons, Chichester – Singapore, 1986.