

В данной книге, посвященной математическому моделированию многомодовых посткритических процессов, описан подход, опирающийся на методы нелинейного функционального анализа и теории особенностей гладких функций. Изложенные методики сгруппированы вокруг вариационной версии метода Ляпунова-Шмидта. В качестве примеров рассмотрены задачи о прогибах упругих систем, о фазовых переходах в кристаллах и о стационарных течениях в диффузорах. Приведены процедуры построения приближенных аналитических решений модельных краевых задач. Книга рассчитана на студентов и аспирантов, интересующихся применениями функционального анализа и теории особенностей функций в инженерно-технических задачах. Автор надеется, что она будет интересна и профессиональным научным работникам.

Посткритические процессы



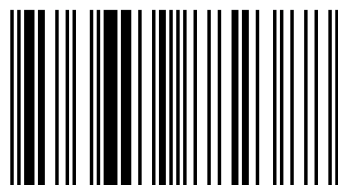
Юрий Сапронов

Математическое моделирование посткритических процессов

Локальные и нелокальные многомодовые
бифуркации



Сапронов Юрий Иванович, профессор кафедры математического моделирования Воронежского государственного университета, выпускник 58 воронежской школы (с математическим уклоном) и математического факультета ВГУ, доктор физ.-мат. наук. Профессиональные интересы - топологические методы анализа, динамические системы и теория бифуркаций.



978-3-659-88238-8

Сапронов

LAP LAMBERT
Academic Publishing

Юрий Сапронов

Математическое моделирование посткритических процессов

Юрий Сапронов

**Математическое моделирование
посткритических процессов**

**Локальные и нелокальные многомодовые
бифуркации**

LAP LAMBERT Academic Publishing

Impressum / Выходные данные

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek: Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Alle in diesem Buch genannten Marken und Produktnamen unterliegen warenzeichen-, marken- oder patentrechtlichem Schutz bzw. sind Warenzeichen oder eingetragene Warenzeichen der jeweiligen Inhaber. Die Wiedergabe von Marken, Produktnamen, Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen u.s.w. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutzgesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Библиографическая информация, изданная Немецкой Национальной Библиотекой. Немецкая Национальная Библиотека включает данную публикацию в Немецкий Книжный Каталог; с подробными библиографическими данными можно ознакомиться в Интернете по адресу <http://dnb.d-nb.de>.

Любые названия марок и брендов, упомянутые в этой книге, принадлежат торговой марке, бренду или запатентованы и являются брендами соответствующих правообладателей. Использование названий брендов, названий товаров, торговых марок, описаний товаров, общих имён, и т.д. даже без точного упоминания в этой работе не является основанием того, что данные названия можно считать незарегистрированными под каким-либо брендом и не защищены законом о брендах и их можно использовать всем без ограничений.

Coverbild / Изображение на обложке предоставлено: www.ingimage.com

Verlag / Издатель:

LAP LAMBERT Academic Publishing

ist ein Imprint der / является торговой маркой

OmniScriptum GmbH & Co. KG

Bahnhofstraße 28, 66111 Saarbrücken, Deutschland / Германия

Email / электронная почта: info@lap-publishing.com

Herstellung: siehe letzte Seite /

Напечатано: см. последнюю страницу

ISBN: 978-3-659-88238-8

Copyright / АВТОРСКОЕ ПРАВО © 2016 OmniScriptum GmbH & Co. KG

Alle Rechte vorbehalten. / Все права защищены. Saarbrücken 2016

Сапронов Ю.И.

Заголовок: Математическое моделирование посткритических процессов

Подзаголовок: *Локальные и нелокальные многомодовые бифуркации*

Краткое содержание (аннотация): Рассмотренные в книге вопросы связаны с общей проблемой моделирования многомодовых посткритических процессов и явлений. Изложение базируется на примерах изучения равновесных конфигураций упругих систем, фазовых переходов в кристаллах и зарождений гидродинамических потоков. Показано, как в анализе таких задач работают методы функционального анализа и теории особенностей гладких функций.

Используемые в книге математические подходы в целом сгруппированы вокруг вариационной модификации метода Пуанкаре-Ляпунова-Шмидта (применяемого к модельным уравнениям вариационного типа). Рассмотрены типовые примеры краевых задач и приведены примеры построения их приближенных аналитических решений. Аналитические представления решений служат основой для компьютерного моделирования.

Книга рассчитана в первую очередь на студентов и аспирантов, интересующихся применениями нелинейного функционального анализа и теории особенностей гладких функций к инженерно-техническим задачам и задачам посткритического анализа. Автор надеется, что она будет полезна и профессиональным научным работникам.

Оглавление

Введение	7
1 Фредгольмовы уравнения	9
1.1 Общие сведения	9
1.2 Конечномерные редукции	11
1.2.1 LS —приводимые отображения	11
1.2.2 Редукция Каччиополи	12
1.2.3 Метод Ляпунова-Шмидта (локальная схема)	13
1.2.4 Нелокальная версия	16
1.3 Вариационные уравнения	18
1.3.1 Редуцирующая схема Пуанкаре	18
1.3.2 Выпуклые функционалы и приближения Галеркина-Ритца	23
1.4 Уравнения с параметрами. Задача о бифуркации экстремалей	25
1.5 Общий взгляд на конечномерную редукцию в вариационной задаче	27
1.6 Локальная вариационная схема Ляпунова-Шмидта	28
1.7 Приближенное вычисление ключевой функции	31
1.8 Редукция Ляпунова-Шмидта как обобщенная ритцевская аппроксимация	33
1.9 Некоторые сведения из теории особенностей гладких функций	34
1.10 Об условии локальной конечной определенности полиномов	39
1.11 Нелокальная вариационная версия метода Ляпунова-Шмидта	41
1.12 Характеристические графы и комплексы	42

2	Модельные краевые задачи	47
2.1	Натуральные механические системы	47
2.2	Вариационные задачи для ДУ четвертого порядка	52
2.2.1	Уравнения Фусса-Винклера-Циммермана и Свифта-Хоенберга	52
2.2.2	Трассирование спусков вдоль траекторий уравнения Свифта-Хоенберга в точки минимума энергии . . .	56
2.3	Фазовые переходы в сегнетоэлектрических кристаллах . .	59
2.4	Дополнительные замечания об исследовании фазовых состояний кристаллов	62
2.5	Угловые особенности гладких функций в анализе ветвлений периодических экстремалей	69
2.6	Ветвление периодических экстремалей вблизи критической фазы с 6-мерным вырождением	73
2.7	Некоторые запреты для <i>bif</i> -раскладов	77
2.8	Редукция к функции на плоской треугольной области . . .	79
2.9	Уравнение Кармана	83
2.9.1	Случай круглой пластины	83
2.9.2	Функционал энергии круглой упругой пластины и его усечения	84
2.9.3	Построение приближений к ключевой функции от двух переменных	89
2.9.4	Пример итерационного алгоритма полиномиального приближения к ключевой функции для уравнения Кармана. Исходные данные	91
2.9.5	Операторное уравнение. Итерации	92
2.9.6	Функции Бесселя	92
2.9.7	Уравнение Кармана в случае прямоугольной пластины	93
2.10	Моделирование диффузорных течений жидкости	97
2.10.1	Двумерная жидкость, уравнения Навье-Стокса и Гельмгольца	98

2.10.2	Подстановка Гамеля и редукция к ОДУ	100
2.10.3	Вариационный подход к анализу уравнения Джеффри-Гамеля. Случай нулевого значения числа Рейнольдса	103
2.10.4	Случай ненулевого значения числа Рейнольдса. Нелокальная редукция Ляпунова-Шмидта	104
2.10.5	Области редуцируемости модельного уравнения . .	107
2.10.6	Примеры эпюр скоростей стационарных течений, соответствующих экстремалам V	109
3	Дополнение	111
3.1	Элементы коммутативной алгебры	111
3.1.1	Коммутативные кольца	111
3.1.2	Кольцо целых чисел	113
3.1.3	Кольцо многочленов от одной переменной.	114
3.1.4	Кольцо многочленов от нескольких переменных. . .	124
3.1.5	Симметрические многочлены	125
3.1.6	Многочлены от двух переменных с поворотной симметрией	126
3.1.7	Кольцо формальных степенных рядов	134
3.2	Основы локального анализа отображений конечномерных пространств	135
3.2.1	Локальные диффеоморфизмы, регулярные и особые точки гладких отображений	135
3.2.2	Алгебраические и геометрические объекты, привязанные к гладким отображениям, типы особенностей отображений, дискриминантные множества	138
3.2.3	Контактные преобразования и версальные деформации особенностей отображений	142
3.2.4	Боардмановские расширения идеалов и типы особенностей отображений в двумерном случае	143
3.2.5	Идентификация особенностей, условие трансверсальности к особенности	145

3.2.6	Боардмановские расширения идеалов и типы особенностей отображений в общем случае	147
3.2.7	Критические и регулярные точки гладких функций	148
3.2.8	Конечнократные критические точки	151
3.2.9	Версальные деформации особенностей функций . .	158
3.2.10	Типичные нормальные формы ключевых функций с двумерным и трехмерным вырождениями	161
	Список литературы	169

Введение.

Хорошо известно, что математической моделью обычно называют некоторый *комплекс математических представлений*, дающий информацию о том или ином реальном предмете или явлении. Весьма распространенный вариант модели — комплекс математических представлений, сгруппированный вокруг краевой задачи для ДУ, поэтому само ДУ часто и называют математической моделью. Построение и исследование модели позволяет получать сведения о реальном явлении, а сам процесс построения и изучения математических моделей называется при этом *математическим моделированием*. Связь модели с реальностью осуществляется посредством гипотез, идеализаций и упрощений. Таким образом, метод математического моделирования состоит в замене реального предмета исследования идеализированным объектом — математической моделью с последующим изучением этого объекта.

В конкретных разделах механики и физики были созданы процедуры перехода к упрощенным модельным уравнениям — к уравнениям Гельмгольца, Джеффри-Гамеля (в гидродинамике), редукция Дзялошинского в теории сегнетоэлектрических фазовых переходов, переход к уравнениям КдФ, Клейна-Гордона и СГ в теории нелинейных волн и пр. Отдельные направления, связанные с идеей редукции, зародились и успешно развились в рамках функционально-аналитического подхода. Среди них широкую известность приобрели методы Бубнова, Галеркина, Ритца (приближенные редукции к конечномерным уравнениям), методы Пуанкаре, Ляпунова, Шмидта, Каччиополи, Лере и Шаудера (точные редукции к конечномерным уравнениям).

Краевые задачи, рассмотренные в данном издании, связаны с проблемой моделирования посткритических равновесных конфигураций упругих систем, с фазовыми переходами в кристаллах и с некоторыми задачами гидродинамики. В их анализе использованы методы функционального анализа и теории особенностей гладких отображений. Все рассмотренные краевые задачи допускают представление в виде абстрактного фредголь-

мова операторного уравнения (см. [10], [29], [31], [32], [46], [59] и литературу в этих источниках). Исследование таких уравнений проводится через их редукцию к конечномерным уравнениям.

Локальная конечномерная редукция краевой задачи впервые была предложена А.М. Ляпуновым (1906 г.) и Е.Шмидтом (1908 г.). Идея нелокальной конечномерной редукции фредгольмова уравнения была предложена Р. Каччиополли (1932 г.) и использована им при построении теории топологической степени фредгольмова отображения. Варианты развития нелокального анализа фредгольмовых уравнений предлагались также в работах А.С. Шварца (1964 г.), С. Смейла (1965 г.), М.А. Красносельского, П.П. Забрейко (1969 г.), К.D. Elworthy, A.J. Tromba (1970 г.), Ю.Г. Борисовича, В.Г. Звягина, Ю.И. Сапронова (1970-77 гг.), J.E. Marsden (1978 г.) и др. Идея глобального сведения анализа бесконечномерного фредгольмова уравнения к анализу конечномерного уравнения была предельно точно сформулирована и строго обоснована в монографии М.А. Красносельского и П.П. Забрейко «Геометрические методы нелинейного анализа» [46]. Позже, после появления современных быстродействующих компьютеров и мощных программных комплексов начали появляться и работы по развитию и применению численных методов нелокального бифуркационного анализа [6]-[8], [40]-[42], [50, 51].

В настоящей книге изложены теоретические основы вариационной версии метода Пуанкаре-Ляпунова-Шмидта. Рассмотрены типовые примеры модельных краевых задач и приведены примеры построения приближенных аналитических решений этих задач. Аналитические представления решений служат, как известно, основой для компьютерного моделирования.

Книга рассчитана в первую очередь на студентов и аспирантов, интересующихся применениями нелинейного функционального анализа и теории особенностей гладких функций к инженерно-техническим задачам и задачам посткритического анализа. Возможно, она будет полезна и профессиональным научным работникам.

Глава 1

Фредгольмовы уравнения

1.1 Общие сведения

Большинство нелинейных задач математической физики допускают трактовку в виде операторного уравнения

$$f(x) = b, \quad x \in E, \quad b \in F,$$

в котором f — гладкое фредгольмово отображение некоторого банахова пространства E в некоторое банахово пространство F (см. [10], [28], [31], [32], [59]).

Решение такой задачи можно осуществить перейдя к конечномерному уравнению

$$\theta(\xi) = \beta, \quad \xi \in M, \quad \beta \in N,$$

где M, N — конечномерные многообразия [10], [28], [31], [46], [59].

Определение 1.1. Пусть E, F — банаховы пространства и $A : E \rightarrow F$ — линейный непрерывный оператор. Оператор A называется фредгольмовым, если

$$\dim(\text{Ker } A) < \infty, \quad \dim(\text{Coker } A) := \dim(F/\text{Im } A) < \infty.$$

Число

$$\dim(\text{Ker } A) - \dim(\text{Coker } A)$$

называется индексом фредгольмова оператора A и обозначается $\text{ind } A$.

Из определения следует, что образ $\text{Im } A$ замкнут в F , и A изоморфно отображает любое подпространство, прямо дополняющее $\text{Ker } A$ (в E), на $\text{Im } A$. Если $L_1 : E_1 \rightarrow E_2$, $L_2 : E_2 \rightarrow E_3$ — фредгольмовы операторы, то и оператор $L_2 L_1$ фредгольмов. При этом $\text{ind}(L_2 L_1) = \text{ind}(L_1) + \text{ind}(L_2)$.

Определение 1.2. Гладкое нелинейное отображение $f : \mathcal{U} \rightarrow F$, где $\mathcal{U}$ — открытое подмножество в E , называется фредгольмовым, если его производная Фреше $\frac{\partial f}{\partial x}(x)$ является фредгольмовым оператором в каждой точке $x \in \mathcal{U}$.

Индексом нелинейного фредгольмова отображения f , определенного на связной области, называется индекс линейного оператора $\frac{\partial f}{\partial x}(x)$:

$$\text{ind } f := \text{ind } \frac{\partial f}{\partial x}(x)$$

(если область связная, то индекс $\frac{\partial f}{\partial x}(x)$ не зависит от x).

В данном руководстве всюду предполагается, что $f : \Omega \rightarrow F$ — нелинейное фредгольмово отображение и $\text{ind } f = 0$. При этом уравнение

$$f(x) = 0, \quad x \in \Omega, \tag{1.1}$$

называется *фредгольмовым*.

Если для гладкого отображения $f : \Omega \rightarrow F$ существует такой гладкий функционал $V : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$, что $f = \text{grad}_{\mathcal{H}} V$ или, эквивалентно,

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x) h = \langle f(x), h \rangle_{\mathcal{H}}, \quad \forall x \in \Omega, \quad h \in E$$

($\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}}$ — скалярное произведение в заранее заданном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$), то отображение f называется потенциальным (предполагается, что E непрерывно вложено в F , F непрерывно вложено в $\mathcal{H}$ и E плотно в $\mathcal{H}$). Функционал V при этом называется потенциалом отображения f , а уравнение (2.34) также называется потенциальным.

Если V — потенциал f на Ω , то уравнение

$$\text{grad}_{\mathcal{H}} V(x) = 0 \quad x \in \Omega, \tag{1.2}$$

называется уравнением Эйлера экстремалей (критических точек) функционала V . Точка $a \in \Omega$ называется критической для функционала V , если

$$\frac{\partial V}{\partial x}(a)h = \langle f(a), h \rangle_{\mathcal{H}} = 0 \quad \forall h \in E.$$

Условие плотности E в $\mathcal{H}$ обеспечивает равносильность последнего равенства уравнению (2.35).

Таким образом, множество решений уравнения (2.35) и множество критических точек функционала V совпадают.

Построение решений уравнения (2.35) можно заменить построением критических точек функционала V (такой подход называется вариационным методом).

Функционал V называется фредгольмовым, если его градиент — фредгольмово отображение.

1.2 Конечномерные редукции

Фредгольмовы отображения ввел в современную математику Р. Каччиополи (см. [75, 76], [10] и библиографию в этих источниках). Ниже изложен подход, находящийся на стыке теорий Каччиополи и Лере-Шаудера.

1.2.1 LS –приводимые отображения

Из теоремы о неявной функции и леммы Шмидта [13] вытекает следующее утверждение: *для каждого фредгольмова отображения $f : \Omega \rightarrow F$ нулевого индекса и для каждой точки $a \in \Omega$ можно подобрать такое отображение $k : \mathcal{O}(a) \rightarrow F$ со значениями в конечномерном подпространстве ($\mathcal{O}(a)$ — некоторая открытая окрестность точки a в Ω), что отображение $\varphi = f + k$ диффеоморфно отображает $\mathcal{O}(a)$ на некоторое открытое подмножество U в F .* Из этого утверждения вытекает, что каждое фредгольмово отображение диффеоморфной заменой аргумента локально приводится к виду

$$\tilde{f} = f \cdot \varphi^{-1} = I + \tilde{k}, \quad (1.3)$$

где $\tilde{k} = -k \cdot \varphi^{-1}$ — отображение со значениями в конечномерном подпространстве. Отображение вида $I + \tilde{k}$ называется отображением в форме Лере-Шаудера или, более кратко, LS –отображением. Дiffeоморфизм φ называется LS –приводящим для f на $\mathcal{O}(a)$ [10].

В [10] сформулировано условие LS –приводимости фредгольмова отображения в окрестности компактного подмногообразия $\mathcal{X} \subset \Omega$.¹

1.2.2 Редукция Каччиополи

Существует вариант определения топологической степени фредгольмова отображения, основанный на редуцирующей схеме Р. Каччиополли [75, 75] (см. также [10]). В локальном случае схему Каччиополли можно рассматривать как разновидность схемы Ляпунова-Шмидта.

Теорема 1.1. *Пусть $f : \Omega \rightarrow F$ — фредгольмово отображение и пусть K — компакт в E . Тогда найдутся такие окрестность $\mathcal{O}$ компакта K и прямое разложение $F = F_1 \dot{+} L$, $\dim L < \infty$, что отображение $P \cdot f : \mathcal{O} \rightarrow F_1$, где $P : F \rightarrow F_1$ — проекция (параллельно L), является субмерсией в точках $\mathcal{O}$.*

Итак, исследование фредгольмова уравнения можно проводить по схеме Каччиополи — через редукцию к конечномерному уравнению [10]

$$\theta(\xi) = 0, \quad \xi \in M,$$

в котором $\theta = P \cdot f|_M$, а M — гладкое n –мерное (редуцирующее) подмногообразие в $\mathcal{O}$ и P — проектор на конечномерное подпространство в F . В этой схеме предполагается, что f на $\mathcal{O}$ трансверсально $\text{Im } P$ и $M = f^{-1}(\text{Im } P)$.

Схема Каччиополи и ее обобщения позволяют исследовать ветви бифурцирующих решений уравнений с параметрами, включая случаи разрывов непрерывных симметрий.

¹Вопрос об описании условий LS –приводимости фредгольмова отображения в окрестности компактного подмножества был поставлен М.А.Красносельским (1969 г.) в связи с построением теории топологической степени для нелинейных операторов общего вида.

1.2.3 Метод Ляпунова-Шмидта (локальная схема)

Конкретные задачи математической физики требуют не только доказательства возможности конечномерного редуцирования, но и конструктивной реализации редуцирующей схемы.

Описываемая ниже конструкция имеет алгоритмический характер и широко используется в приложениях под общим названием «метод Ляпунова-Шмидта». Основа метода создана в работах [53],[85].

Пусть E, F — вещественные банаховы пространства, $f : E \rightarrow F$ — нелинейное фредгольмово отображение, $\text{ind } f = 0$. Пусть, далее, зафиксированы прямые разложения

$$E = E^n \dot{+} E^{\infty-n}, \quad F = F^n \dot{+} F^{\infty-n},$$

где E^n и F^n — n -мерные подпространства в E и F соответственно, а $E^{\infty-n}$ и $F^{\infty-n}$ — произвольные прямые дополнения к E^n и F^n в E и F .

Если $e_1, e_2, \dots, e_n$ — базис E^n , то для каждого вектора $x \in E$ имеет место разложение

$$x = u + v, \quad u = \sum_{i=1}^n \xi_i e_i, \quad v \in E^{\infty-n}.$$

Если $e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*$ — базис F^n , то

$$\begin{aligned} f(x) &= f^n(x) + f^{(\infty-n)}(x), \\ f^n(x) &= \sum_{j=1}^n f_j(x) e_j^*, \quad f^{(\infty-n)}(x) \in F^{\infty-n}. \end{aligned}$$

Предположив, что производная

$$\frac{\partial f^{(\infty-n)}}{\partial v}(a) : E^n \rightarrow F^n$$

является изоморфизмом в некоторой точке $a \in E$, $f(a) = 0$, получим, в силу теоремы о неявном отображении, зависимость $v = \Phi(u)$ (для u из достаточно малой окрестности $\mathcal{O} \subset E^n$ точки $\bar{u}$), такую, что $\Phi(\bar{u}) = \bar{v}$ ($\bar{u}, \bar{v}$ — компоненты a) и

$$f^{(\infty-n)}(u + \Phi(u)) = 0 \quad \forall u \in \mathcal{O} \quad (1.4)$$

(отображение $\Phi : \mathcal{O} \longrightarrow E^{\infty-n}$ при этом является гладким). Для отыскания решений уравнения $f(x) = 0$ в окрестности точки $x = a$ достаточно найти решения *ключевого уравнения*

$$f^{(n)}(u + \Phi(u)) = 0. \quad (1.5)$$

Определение 1.3. *Отображение $\tau : E^n \longrightarrow F^n$, где*

$$\tau(u) = f^{(n)}(u + \Phi(u)),$$

называется ключевым.

Замечание 1.1. *Соотношение $x = u + \Phi(u)$ осуществляет связь между решениями ключевого уравнения и решениями исходного модельного уравнения $f(x) = 0$. Это соотношение служит основой для компьютерного моделирования состояний (процессов), изображаемых решениями этого уравнения.*

Уравнение (1.5) эквивалентно уравнению

$$\theta(\xi) = 0, \quad (1.6)$$

$$\theta(\xi) = (\theta_1(\xi), \dots, \theta_n(\xi))^T,$$

где

$$\theta_k(\xi) = f_k \left(\sum_{i=1}^n \xi_i e_i + \Phi \left(\sum_{i=1}^n \xi_i e_i \right) \right), \quad f^n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x) e_k^*.$$

Замечание 1.2. *Уравнения (1.5), (1.6) называются уравнениями разветвления, а также ключевыми или бифуркационными.*

Замечание 1.3. *Выбор разложений $E = E^n \dot{+} E^{\infty-n}$, $F = F^n \dot{+} F^{\infty-n}$ и базисов $\{e_j\}$, $\{e_k^*\}$ в E^n и F^n однозначно определяет аналитическую форму уравнения (1.6). Каждый набор таких разложений и базисов (в соответствующих конечномерных компонентах) называется редуцирующей схемой.*

Пусть $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство, $E \subset F \subset \mathcal{H}$ — последовательность трех непрерывно вложенных пространств и пусть $E^n = \text{Ker } \frac{\partial f}{\partial x}(a)$. В качестве $E^{\infty-n}$ можно рассмотреть ортогональное дополнение к E^n в E . При этом

$$\xi_i = \langle x, e_i \rangle, \quad i = 1, \dots, n$$

($\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в $\mathcal{H}$), где $e_1, \dots, e_n$ — ортонормированный базис в E^n ; F^n — ортогональное дополнение к $F^{\infty-n} = \text{Im } \frac{\partial f}{\partial x}(a)$ в F , а $f_j = \langle f(x), e_j^* \rangle$, $j = 1, \dots, n$, где $e_1^*, \dots, e_n^*$ — ортонормированный базис в F^n . Обозначим

$$\varphi(\xi) := \sum_{j=1}^n \xi_j e_j + \Phi \left(\sum_{i=1}^n \xi_i e_i \right).$$

Тогда

$$\theta(\xi) = \tilde{P} \cdot f(\varphi(\xi)), \quad (1.7)$$

где

$$\tilde{P}(y) = (\langle y, e_1^* \rangle, \dots, \langle y, e_n^* \rangle)^\top$$

Отображение $\varphi(\xi)$ определено на некоторой окрестности $O \subset \mathbf{R}^n$ точки $\bar{\xi}$ с координатами $\bar{\xi}_j$, $\bar{\xi}_j = \langle a, e_j \rangle$.

Теорема 1.2. *Точка a является решением уравнения $f(x) = 0$ тогда и только тогда, когда $a = \varphi(\bar{\xi})$ и точка $\bar{\xi}$ является решением уравнения $\theta(\xi) = 0$. При этом $\dim \text{Ker } \frac{\partial f}{\partial x}(a) = \dim \text{Ker } \frac{\partial \theta}{\partial \xi}(\bar{\xi})$*

Доказательство теоремы становится очевидным, если воспользоваться существованием LS —приводящего (локально) диффеоморфизма ψ :

$$\tilde{f}(\tilde{u} + \tilde{v}) := f \cdot \psi^{-1}(\tilde{u} + \tilde{v}) = h(\tilde{u}, \tilde{v}) + \tilde{v}, \quad \tilde{u} \in \mathbf{R}^n.$$

Ясно, что ключевое отображение $\theta(\xi)$ гладко V —эквивалентно отображению $\tilde{\theta}(\tilde{u}) := h(\tilde{u}, 0)$. Из представления

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{x}} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ \frac{\partial h}{\partial \tilde{v}} & \frac{\partial h}{\partial \tilde{u}} \end{pmatrix}$$

моментально получаем равенство

$$Ker \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{x}}(\tilde{x}) = Ker \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{v}}(\tilde{x}),$$

из которого вытекает второе утверждение теоремы.

1.2.4 Нелокальная версия

Локальная схема Ляпунова-Шмидта весьма эффективно работает в теории бифуркаций решений нелинейных уравнений. Существенно меньше результатов по нелокальным бифуркационным проблемам. Это связано с тем, что применяемые в локальном случае асимптотические методы перестают работать при нелокальном рассмотрении вопросов (на конечных областях и при конечных закритических приращениях параметров). В последние годы, в связи с бурным развитием новых вычислительных компьютерных технологий, появилась возможность эффективного нелокального анализа, основанного на нелокальной конечномерной редукции.

В основе дальнейших построений находится теорема Банаха – Мазура-Каччиополи, представляющая собой критерий глобально диффеоморфного действия отображения.

Пусть, как и ранее, отображение банаховых пространств

$$f : E \longrightarrow F \tag{1.8}$$

является гладким и фредгольмовым индекса нуль.

Теорема 1.3. (Банах, Мазур, Каччиополи) *Отображение (1.8) тогда и только тогда является диффеоморфизмом, когда выполняются следующие два условия:*

- 1) производная фреше $\frac{\partial f}{\partial x}(a)$ в каждой точке $a \in E$ действует изоморфно из E на F ,
- 2) отображение (1.8) является собственным (прообраз компакта компактен).

Доказательство имеется в [10]. Самое короткое доказательство основано на замечании о том, что объединение условий локальной диффео-

морфности и собственности приводит к тому, что f оказывается накрывающим отображением. Известно, что накрытие над односвязной базой всегда однократно, что и означает диффеоморфность действия f .

Пусть, далее,

$$E = E^n \dot{+} E^{\infty-n}, \quad F = F^n \dot{+} F^{\infty-n} \quad (1.9)$$

— редуцирующие разложения рассматриваемых банаховых пространств в прямые суммы подпространств и

$$f(x) = f^{(n)}(u + v) + f^{\infty-n}(u + v) \quad (1.10)$$

— соответствующее разложение f ,

$$u \in E^n, \quad v \in E^{\infty-n}, \quad f^{(n)}(u + v) \in F^n, \quad f^{\infty-n}(u + v) \in F^{\infty-n}.$$

С каждым $u \in E^n$ свяжем отображение

$$f_u^{\infty-n} : E^{\infty-n} \longrightarrow F^{\infty-n}, \quad f_u^{\infty-n}(v) := f^{\infty-n}(u + v). \quad (1.11)$$

Теорема 1.4. Пусть для каждого $u \in E^n$ отображение (1.11) является собственным и при этом

$$\frac{\partial f_u^{\infty-n}}{\partial v}(a) : E^{\infty-n} \longrightarrow F^{\infty-n}$$

является изоморфизмом для каждого $u \in E^n$, $a \in E^{\infty-n}$. Тогда найдется такое гладкое отображение

$$\Phi : E^n \longrightarrow E^{\infty-n},$$

что точка a окажется решением уравнения

$$f(x) = 0$$

лишь в том и только том случае, в котором выполняется соотношение

$$a = \bar{u} + \Phi(\bar{u}),$$

где $\bar{u}$ — решение глобального уравнения разветвления

$$\tau(u) = 0, \quad (1.12)$$

где $\tau(u) := f^{(n)}(u + \Phi(u))$. При этом локальные кольца особенностей² отображений f и θ в точках $\bar{u}$ и $a = \bar{u} + \Phi(\bar{u})$, соответственно, изоморфны.

Доказательство. Собственность и локальная диффеоморфность отображения $f_u^{\infty-n}$ приводит к диффеоморфности действия этого отображения из $E^{\infty-n}$ на $F^{\infty-n}$ (по теореме (1.3.)). Следовательно, для каждого $u \in E^n$ найдется единственная точка $v = \Phi(u) \in E^{\infty-n}$, для которой $f^{\infty-n}(u + \Phi(u)) = 0$. Гладкость отображения $\Phi(u)$ следует из теоремы о неявной функции. Следовательно, уравнение (1.8), которое можно записать в виде системы двух уравнений

$$\begin{cases} f^{\infty-n}(u + v) = 0, \\ f^{(n)}(u + v) = 0, \end{cases}$$

сводится к уравнению (1.4).

Доказательство изоморфности локальных колец проводится стандартными приемами, разработанными в конечномерной теории особенностей гладких отображений [3], [11] и легко переносящимися на бесконечномерные банаховы многообразия для класса фредгольмовых отображений.

1.3 Вариационные уравнения

1.3.1 Редуцирующая схема Пуанкаре

Схема Пуанкаре была создана для конечномерных вариационных задач с целью понижения их размерности [63].

Пусть задана гладкая экстремальная задача

$$V(x) \longrightarrow \inf, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (1.13)$$

для которой выполнено условие *коэрцитивности*

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = +\infty, \quad (1.14)$$

²Локальное кольцо особенности гладкого отображения f в точке $a \in E$ определяется как фактор кольца ростков гладких функционалов в точке a по идеалу, порожденному функционалами вида $\alpha(f(x))$, где α — произвольный гладкий функционал, заданный на произвольной окрестности точки $b = f(a)$ в пространстве F .

так что задача (1.13) разрешима. Если функция V является выпуклой

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(a)(h, h) > 0 \quad \forall (a, h) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \setminus 0), \quad (1.15)$$

то решение этой задачи, как легко видеть, является единственным. В противном случае задача становится многоэкстремальной, поэтому приходится исследовать функцию в ситуации существования нескольких точек локальных минимумов, что существенно затрудняет анализ функции и приближенное построение экстремалей. Наличие «управляющих» параметров, изменение которых приводит к бифуркационным явлениям, еще более усложняет задачу поиска и изучения экстремалей. А. Пуанкаре предложил процедуру, позволяющую во многих случаях облегчить изучение ветвления экстремалей за счет исключения «несущественных» переменных [63].

Пусть выполнено условие выпуклости V по части переменных:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(a)(h, h) > 0 \quad \forall (a, h) \in \mathbb{R}^n \times (L \setminus 0), \quad (1.16)$$

где L — подпространство в $\mathbb{R}^n$ размерности l . Тогда вместо (1.13) можно рассмотреть аналогичную задачу с меньшим числом переменных

$$W(\xi) \longrightarrow \inf, \quad \xi \in M, \quad (1.17)$$

где M — ортогональное дополнение к L в $\mathbb{R}^n$ (в стандартно скалярном произведении $(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$), а W — функция, определенная соотношением

$$W(\xi) = \inf_{h \in L} V(\xi + h). \quad (1.18)$$

Теорема 1.5. *Если выполнены условия (1.14) и (1.16), то функция (1.18) является гладкой.*

Доказательство. Из коэрцитивности функции V следует существование в слое $\xi + L$ ($\forall \xi \in M$) точки глобального условного минимума $\xi + h(\xi)$, где $h(\xi)$ определяется из системы уравнений

$$\frac{\partial V}{\partial h_j}(\xi + h) = 0, \quad j = 1, \dots, l \quad (1.19)$$

($h_1, \dots, h_l$ — координаты вектора h относительно произвольно фиксированного базиса в L). Условие (1.16) гарантирует единственность решения при любом ξ и его гладкую зависимость от ξ (по теореме о неявной функции: якобиан левой части (1.19) по переменным $h_1, \dots, h_l$ невырожден вследствие (1.16)). Следовательно, функция $W(\xi) = V(\xi + h(\xi))$ является гладкой.

Замечание 1.4. *Строго говоря, А. Пуанкаре определял функцию W не формулой (1.18), а системой уравнений (1.19). Функция W при этом определялась лишь локально (условия (1.14) не было) и предназначалась для (локального) исследования бифуркации экстремалей [63]. Смысл перехода от (1.13) к (1.17) состоял в замене «многомерной» задачи на «маломерную», как более доступную.*

Функция (1.18), полученная при условиях (1.14) и (1.16), называется *ключевой*. Координаты ξ_j , $j = 1, \dots, m = n - l$, вектора $\xi \in M$ относительно произвольного фиксированного базиса $\{f_1, \dots, f_m\}$ в M также называются *ключевыми*. Отображение $\varphi : \xi \longrightarrow \xi + h(\xi)$, где $h(\xi)$ определено системой уравнений (1.19), называется *редуцирующим* или *маргинальным*³.

Теорема 1.6. *Маргинальное отображение задает взаимно однозначное соответствие между множествами критических точек функции V и ее ключевой функции W . При этом соответствия невырожденные критические точки переходят в невырожденные и только невырожденные критические точки (с сохранением значений индексов Морса). А соответствующие друг другу вырожденные критические точки имеют изоморфные локальные кольца особенностей.*

Доказательство становится очевидным после применения обобщенной леммы Морса (леммы о расщеплении особенности).

³ Термин «маргинальное отображение» заимствован из теории приближений функций, в которой он используется в аналогичном контексте.

Определение 1.4. *Переход от задачи (1.13) к задаче (1.17), где W — ключевая функция функции V , называется редукцией по схеме Пуанкаре или, более кратко, редукцией Пуанкаре.*

Подход А.М. Ляпунова и Э. Шмидта получили дальнейшее развитие в многочисленных работах других математиков, что впоследствии привело к созданию обширной теории ветвления решений нелинейных уравнений [13], [45], [84]. В этой теории произошел отрыв от вариационных корней метода конечномерных редукций. Возврат к вариационным задачам в рамках общей теории ветвления произошел лишь в 70-ые годы прошедшего столетия (см. [44], [52], [65], [70], [81], [82]).

Следует отметить, что развитие упомянутых подходов происходило, в основном, на уровне локальных задач — в виде схем построения так называемых малых решений, зависящих от малых параметров. Потребность в условиях типа собственности градиентного отображения при этом не возникала. В некоторых работах для построения нелокальных редукций вместо условия собственности отображения использовались более частные условия, приводящие к возможности применения принципа сжатых отображений.

В дальнейшем предполагается, что $f : E \rightarrow F$, E, F — банаховы пространства, является потенциальным фредгольмовым отображением нулевого индекса (с потенциалом V), и наряду с этим выполнены условия:

- а) $E \subset F \subset H$ — тройка непрерывно вложенных пространств, H — гильбертово пространство.
- б) E плотно в H (любой элемент из H может быть представлен как предел последовательности элементов из E).

Из плотности E в H следует, что F также плотно в H . Плотности E в H обеспечивает равносильность равенства $\frac{\partial V}{\partial x}(x) = 0$ уравнению Эйлера $f(x) = 0$.

Свойство собственности отображения является весьма эффективным средством проверки нелокальной редукцируемости уравнения. Впервые оно было использовано (как условие глобальной редукцируемости) в работе

[66]), в которой сформулировано следующее утверждение.

Теорема 1.7. Пусть градиентное отображение $f : E \longrightarrow F$ является собственным и пусть при этом выполняется условие положительности (выпуклости) его потенциала V на подпространстве L в E , являющемся ортогональным дополнением к $N = \text{Lin}(e_1 \dots e_n)$ ($L = E \cap N^\perp$). Тогда маргинальное отображение $\varphi : \xi \mapsto \sum_{j=1}^n \xi_j e_j + h(\xi)$, где $h(\xi)$ определено уравнением $f \left(\sum_{j=1}^n \xi_j e_j + h \right) = 0$, $h \in L$, устанавливает взаимно однозначное соответствие между критическими точками ключевой функции

$$W(\xi) := \inf_{h \in L} V \left(\sum_{j=1}^n \xi_j e_j + h \right) = V \left(\sum_{j=1}^n \xi_j e_j + h(\xi) \right),$$

и функционала V . При этом локальные кольца особенностей⁴ соответствующих функций в точках ξ и $\varphi(\xi)$ изоморфны. В соответствующих друг другу однократных критических точках имеет место совпадение индексов Морса⁵.

Доказательство проводится стандартными приемами, разработанными в конечномерной теории особенностей гладких функций [3], [11] и легко распространяющимися на фредгольмовы отображения бесконечномерных банаховых многообразий и фредгольмовы функционалы.

Определение 1.5. Критическая точка a функции $W : \mathcal{U} \subset R^n \rightarrow R$ называется невырожденной (морсовской), если

$$\det \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}(a) \right) \neq 0.$$

⁴Локальное кольцо особенности гладкого функционала V в критической точке a определяется как фактор кольца ростков гладких функционалов в точке a по идеалу, порожденному функционалами вида $\alpha(f(x))$, где α — произвольный гладкий функционал, заданный на произвольной окрестности нуля в пространстве F ($f = \text{grad}_H V$).

⁵Индекс Морса в бесконечномерном случае определяется как максимальная размерность подпространства, на котором отрицательно определен второй дифференциал.

Определение 1.6. Пусть $V : E \rightarrow R$ — гладкий фредгольмов функционал, E — банахово пространство. Критическая точка a функционала V называется невырожденной (морсовской), если

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a)h \neq 0 \quad , \quad \forall h \in E \setminus \{0\}.$$

Лемма 1.1. (Конечномерная лемма Морса, [56],[61]) Пусть a — невырожденная критическая точка гладкой функции $W : R^n \rightarrow R$. Тогда в некоторой окрестности $\mathcal{U} \subset R^n$ точки a можно указать такую локальную систему координат $x_1, x_2, \dots, x_n$, удовлетворяющую условию $x_i(a) = 0 \quad \forall i$, что

$$W(x) = W(a) - \sum_{k=1}^q x_k^2 + \sum_{k=q+1}^n x_k^2 \quad \text{на } \mathcal{U}.$$

Число q называется индексом Морса критической точки.

Лемма 1.2. (Бесконечномерная лемма Морса, [74]) Пусть задан фредгольмов функционал V с градиентной реализацией в тройке пространств $\{E, F, H\}$, и $x_o \in E$ — невырожденная критическая точка V . Тогда существует диффеоморфизм $\varphi : (\mathcal{U}, x_o) \rightarrow (\mathcal{O}, 0)$, где $\mathcal{U}$ и $\mathcal{O}$ — окрестности, соответственно, точки x_o и нуля в E , такой, что

$$V(x) = V(x_o) + \frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}(x_o) y, y \right\rangle, \quad y = \varphi(x), \quad x \in \mathcal{U}, \quad f = \text{grad } V$$

($\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в H).

Индексом Морса невырожденной критической точки функционала V называется максимальная размерность подпространства, на котором отрицательно определен второй дифференциал $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(a)(h, h)$.

1.3.2 Выпуклые функционалы и приближения Галеркина-Ритца

В соответствии с известной теоремой Эберлейна-Шмульяна [33], непрерывный строго выпуклый функционал V на гильбертовом пространстве

H , рассмотренный на ограниченном замкнутом выпуклом подмножестве $K \subset H$, имеет точку минимума (автоматически единственную). Очевидно, что вместо условия ограниченности K можно потребовать выполнение условия коэрцитивности функционала:

$$V(x) \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad \|x\| \rightarrow \infty,$$

также влекущее существование единственной точки минимума.

В конкретных прикладных задачах поиск приближений к точке минимума часто осуществляется на основе методов Галеркина и Ритца [45], [57], [54], [18].

С точки зрения функционального анализа поиск решений многих вариационных краевых задач сводится к построению точек минимума выпуклого функционала на гильбертовом пространстве H , заданного в виде

$$V(x) = \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle + \omega(x), \quad (1.20)$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в гильбертовом пространстве H_0 , в которое H вложено непрерывно, компактно и всюду плотно. При этом A — положительный симметричный (в $\langle \cdot, \cdot \rangle$) изоморфизм из H на H_0 , а $\omega(x)$ — гладкий функционал, градиент которого $g(x) := \text{grad } \omega(x)$ (в $\langle \cdot, \cdot \rangle$) является вполне непрерывным отображением из H в H_0 . Если предположить, что функционал (1.20) гладко продолжается на энергетическое пространство H_1 , полученное замыканием H в норме (см. [57])

$$|x|_1 := \sqrt{\langle Ax, x \rangle},$$

то функционал (1.20) можно записать в виде

$$\frac{1}{2} \langle x, x \rangle_1 + \tilde{\omega}(x), \quad \langle x, y \rangle_1 := \langle Ax, y \rangle, \quad (1.21)$$

где $\tilde{\omega}$ — гладкое продолжение на H_1 функционала ω . При этом будем иметь следующее представление для градиента в H_1 :

$$\text{grad}_{H_1} V(x) = x + \tilde{g}(x), \quad \tilde{g}(x) = A^{-1}g(x). \quad (1.22)$$

Таким образом, градиент продолжения функционала в энергетическое пространство, является отображением в форме Лере-Шаудера.

Если задать последовательность конечномерных ортопроекторов $\{P_n\}$ в H_1 , сильно сходящуюся к I (тождественному отображению), то, очевидно, последовательность отображений $x + P_n \tilde{g}(x)$ будет равномерно сходиться к $x + \tilde{g}(x)$ на любой ограниченной области в H_1 , что влечет сходимость решений уравнений

$$x + P_n \tilde{g}(x) = 0, \quad x \in H_1,$$

к точке минимума функционала V . Так как любое решение последнего уравнения принадлежит $E_n := \text{Im } P_n$, то поиск его решений сводится к поиску решений галеркинской аппроксимации данного уравнения :

$$u + P_n \tilde{g}(u) = 0, \quad u \in E_n. \quad (1.23)$$

Левая часть уравнения (1.23) является градиентом функции

$$W_R(u) := V(u), \quad u \in E_n$$

и называется *ритцевской аппроксимацией исходного функционала*.

Приближенное вычисление точек минимума функционала V можно осуществлять, комбинируя переход к ритцевской аппроксимации W_R с методом кратчайшего спуска для W_R .

1.4 Уравнения с параметрами. Задача о бифуркации экстремалей

Важным типом уравнений, часто встречающимся в задачах математического моделирования, является фредгольмово уравнение с параметром:

$$f(x, \lambda) = b, \quad x \in E, \quad b \in F, \quad \lambda \in \mathbb{R}^k.$$

То есть f включено в $f(x, \lambda) : U \times \mathbb{R}^k \rightarrow F$, $f(x, 0) = f(x)$, — семейство гладких фредгольмовых отображений, гладко зависящее от векторного параметра $\lambda \in \mathbb{R}^m$. Если отображение $f(\cdot, \lambda)$ потенциально с потенциалом $V(\cdot, \lambda)$, то потенциал также гладко зависит от данного параметра. В такой ситуации естественным образом возникает понятие бифуркации экстремалей и, соответственно, бифуркационного значения параметра.

Определение 1.7. Пусть $\lambda = \lambda_0$ — такое значение параметра, при котором a является единственной критической точкой функционала $V(x, \lambda)$ в некоторой области $\Omega \subset E$. Значение λ_0 называется бифуркационным, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое λ_1 , $\|\lambda_1 - \lambda_0\| < \varepsilon$, при котором V имеет в Ω не менее двух критических точек a_1, a_2 , таких, что

$$\max \{ \|a_1 - a\|, \|a_2 - a\| \} < \varepsilon.$$

В условиях данного определения говорят, что переход λ через (бифуркационное) значение λ_0 сопровождается рождением дополнительных экстремалей из нуля.

Задача изучения ветвления экстремалей вблизи точки бифуркации широко известна под общим названием «задача о бифуркации экстремалей». Важнейшей составляющей этой задачи является вопрос геометрического строения каустики, соответствующей точке бифуркации.

Определение 1.8. Пусть задана фредгольмова C^r — развертка

$$f(\cdot, \delta) : E \rightarrow F, \quad \delta \in \Delta^m \subset \mathbb{R}^m.$$

Пусть Ω — открытое подмножество в E . Дискриминантным множеством $\Sigma(\Omega)$ уравнения

$$f(x, \delta) = 0 \quad x \in \Omega \tag{1.24}$$

называется совокупность тех значений $\lambda = \bar{\lambda}$, для которых уравнение (1.24) имеет в Ω вырожденное решение $\bar{x}$:

$$f(\bar{x}, \bar{\lambda}) = 0 \quad \text{codim} \left(\text{Im} \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{\lambda}) \right) > 0.$$

Определение 1.9. Пусть $\tilde{\Sigma}(\Omega)_{\bar{\lambda}}$ — росток множества $\Sigma(\Omega)$ в точке $\bar{\lambda}$. Тогда пересечение

$$\Sigma(\bar{x}, \bar{\lambda}) = \bigcap_{\Omega: \bar{x} \in \Omega} \tilde{\Sigma}(\Omega)_{\bar{\lambda}}$$

называется дискриминантной диаграммой уравнения (1.24) в точке $(\bar{x}, \bar{\lambda})$.

Если (1.24) — вариационное уравнение ($f = \text{grad } V$), то $\Sigma(\bar{x}, \bar{\lambda})$ называется каустикой функционала V в точке $\bar{x}$.

1.5 Общий взгляд на конечномерную редукцию в вариационной задаче

Определение 1.10. Пусть V — гладкий функционал, заданный на области Ω банахова пространства E . Конечномерной редукцией V на открытом подмножестве $\Psi \subset \Omega$ называется тройка $\{p, \varphi, N\}$, удовлетворяющая следующим условиям:

- (1) Гладкое отображение $p : \Psi \rightarrow N$ (N — конечномерное многообразие) является субмерсией (то есть каждый дифференциал касательных пространств $\frac{\partial p}{\partial x}(a) : T_a(\Psi) \rightarrow T_\xi(N)$ является отображением «на»).
- (2) $\forall \xi \in \mathcal{U} = p(\Psi)$ функционал $V_\xi = V|_{p^{-1}(\xi)}$ имеет единственную, причем невырожденную, критическую точку $\varphi(\xi)$ (что означает невырожденность второго дифференциала

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(V|_{p^{-1}(\xi)})(\varphi(\xi))(h, h),$$

$h \in T_{\varphi(\xi)}(p^{-1}(\xi))$, как квадратичной формы на линейном пространстве).

- (3) Отображение $\varphi : \mathcal{U} \rightarrow \Psi$ является гладким.

Отображение p называется редуцирующей субмерсией. Размерностью редукции называется размерность образа редуцирующей субмерсии.

Определение 1.11. Функция $W : \mathcal{U} \rightarrow R$, определенная равенством

$$W(\xi) = V(\varphi(\xi)), \quad \xi \in \mathcal{U}, \quad (1.25)$$

называется ключевой, а отображение φ — маргинальным.

Определение 1.12. Если $\forall \xi \in N$ точка $\varphi(\xi)$ является точкой минимума функционала $V_{p^{-1}(\xi)}$, то редукция называется эллиптической.

В случае эллиптической редукции ключевая функция определяется равенством

$$W(\xi) = \inf_{x:p(x)=\xi} V(x) = V(\varphi(\xi)). \quad (1.26)$$

Имеет место следующее фундаментальное утверждение [65]:

Утверждение 1.1 Пусть $\{p, \varphi, N\}$ — эллиптическая конечномерная редукция гладкого функционала V на области Ω гладкого банахова многообразия M . Тогда маргинальное отображение φ устанавливает взаимно однозначное соответствие между множествами критических точек ключевой функции W и функционала V . При этом соответствующие друг другу критические точки одновременно являются либо вырожденными, либо нет. В случае невырожденности соответствующие критические точки имеют одинаковые значения индексов Морса.

Все топологические и аналитические понятия, так или иначе характеризующие тип стационарной точки (кратность, локальное кольцо особенности, версальная деформация, бифуркационная диаграмма и т.п. [3, 62]), для функционалов можно вводить через ключевые функции.

1.6 Локальная вариационная схема Ляпунова-Шмидта

Вполне естественно, что формулирование условий единственности и невырожденности критической точки для $V_\xi = V|_{p^{-1}(\xi)}$ проще осуществить локально — в некоторой окрестности критической точки. Сделаем это на примере широко известной схемы конечномерной редукции — схемы Ляпунова-Шмидта.

Как и ранее, будем предполагаться, что задано потенциальное отображение $f : \mathcal{U} \rightarrow F$ (с потенциалом V), где $\mathcal{U}$ — область банахова пространства E (E, F — банаховы пространства), которое является фредгольмовым нулевого индекса, и наряду с этим выполнены «технические условия»: $E \subset F \subset H$ — тройка непрерывно вложенных пространств (H — гильбертово пространство); E плотно в H (из плотности E в H следует плотность F в H).

Будем предполагать также гладкую зависимость f от параметра $\lambda \in \mathbb{R}^m$ («по умолчанию»). Пусть, далее, $\mathcal{A}(\lambda) := \frac{\partial f}{\partial x}(0, \lambda)$ и $\dim N = n > 0$, где $N = \text{Ker } \mathcal{A}(\lambda_0)$.

Наложим также два *дополнительных условия* :

1) в N зафиксирован ортонормированный (в H) базис $\{e_j\}_{j=1}^n$, вместе с набором гладких (спектральных) функций $\{\alpha_j(\lambda)\}_{j=1}^n$, $\alpha_j(\lambda_0) = 0$, определенных на некоторой окрестности нуля $\mathcal{U}(0) \subset \mathbb{R}^m$, для которого выполнено соотношение

$$\mathcal{A}(\lambda) e_j = \alpha_j(\lambda) e_j \quad \forall j, \quad (Mod)$$

2) выполнено неравенство

$$\langle \mathcal{A}(\lambda) v, v \rangle > 0 \quad \forall v \in E \cap N^\perp, \quad v \neq 0. \quad (Pos)$$

Векторы $e_1, e_2, \dots, e_n$ называются *ведущими модами бифуркаций*.

Зафиксируем далее прямые разложения

$$E = N \dot{+} E^{\infty-n}, \quad F = N \dot{+} F^{\infty-n},$$

где $E^{\infty-n}$ и $F^{\infty-n}$ — прямые ортогональные дополнения к N в E и F .

Для каждого вектора $x \in E$ имеет место представление

$$x = u + v, \quad u = \sum_{j=1}^n \xi_j e_j, \quad v \in E^{\infty-n}, \quad \xi_j = \langle x, e_j \rangle,$$

а также представление

$$f(x, \lambda) = f^n(x, \lambda) + f^{\infty-n}(x, \lambda),$$

где

$$f^n(x, \lambda) = \sum_{i=1}^n f_j(x, \lambda) e_j, \quad f_j(x, \lambda) = \langle f(x, \lambda), e_j \rangle, \\ f^{\infty-n}(x, \lambda) := f(x, \lambda) - f^n(x, \lambda) \in F^{\infty-n}.$$

Таким образом, экстремали функционала $V(x, \lambda)$ близи нуля определяются системой двух уравнений

$$\left. \begin{aligned} f^n(u + v, \lambda) &= 0, \\ f^{\infty-n}(u + v, \lambda) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.27)$$

Так как производная

$$\frac{\partial f^{\infty-n}}{\partial v}(0, \lambda) : E^{\infty-n} \rightarrow F^{\infty-n}$$

является изоморфизмом (в силу условия положительности (Pos)), то получим, по теореме о неявной функции, существование явной зависимости

$$v = \Phi(u, \lambda)$$

(в достаточно малой окрестности $\mathcal{O} \times \mathcal{U} \subset E^{\infty-n} \times \mathbb{R}^n$ нуля), для которой $\Phi(0, \lambda_0) = 0$ и

$$f^{\infty-n}(u + \Phi(u, \lambda), \lambda) = 0 \quad \forall u \in \mathcal{O}^n.$$

Здесь и ниже полагаем $\mathcal{O} = \mathcal{O}^n \times \mathcal{O}^{\infty-n}$.

Отображение $\Phi : \mathcal{O}^n \rightarrow E^{\infty-n}$ при этом является гладким.

Для отыскания решений уравнения $f(x, \lambda) = 0$ в окрестности точки $x = 0$ достаточно найти решения $u = u(\lambda)$ уравнения

$$f^n(u + \Phi(u, \lambda), \lambda) = 0. \quad (1.28)$$

Решение исходного уравнение задается *связывающим соотношением*

$$x(\xi, \lambda) = u(\lambda)(\xi) + \Phi(u(\lambda)(\xi), \lambda). \quad (1.29)$$

Определение 1.13. *Отображение $\tau : \mathcal{O}^n \rightarrow F^n$, где*

$$\tau(u, \lambda) = f^n(u + \Phi(u, \lambda), \lambda),$$

называется ключевым.

При практическом применении уравнение (1.24) используется в координатной форме

$$\theta(\xi, \lambda) = 0. \quad (1.30)$$

$$\theta(\xi, \lambda) = (\theta_1(\xi, \lambda), \theta_2(\xi, \lambda), \dots, \theta_n(\xi, \lambda),), \quad \theta_k(\xi, \lambda) = \langle \tau(u(\xi), \lambda), e_k \rangle.$$

Теорема 1.8. *Справедливо следующее соотношение:*

$$\inf_{v : v \in \mathcal{O}^{\infty-n}} V(u + v) = V(u + \Phi(u, \lambda), \lambda). \quad (1.31)$$

Доказательство становится очевидным, если заметить, что вблизи нуля экстремали функционала $V(u + v)$ по v определяются вторым уравнением системы уравнений (1.27).

Отображение

$$\tau : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad \tau(u, \lambda) := f^n(u + \Phi(u, \lambda), \lambda),$$

называется *ключевым отображением*. Соответственно, уравнение

$$\tau(u, \lambda) = 0$$

называется *ключевым уравнением*.

Функция $W(u, \lambda) := V(u + \Phi(u, \lambda), \lambda)$ называется *ключевой функцией* функционала $V(x, \lambda)$ вблизи нуля.

Теорема 1.9. *Справедливо следующее соотношение:*

$$\text{grad } W(u, \lambda) = \tau(u, \lambda) \quad (1.32)$$

Доказательство осуществляется непосредственной проверкой.

Замечание 1.5. *Для практических применений более удобна координатная форма ключевой функции*

$$\widehat{W}(\xi, \lambda) := W(u(\xi) + \Phi(u(\xi), \lambda), \lambda) \quad (1.33)$$

Замечание 1.6. *Связывающее соотношение $x = u + \Phi(u)$ осуществляет связь между решениями ключевого уравнения и решениями исходного модельного уравнения. Это соотношение служит основой для компьютерного моделирования состояний (процессов), изображаемых решениями модельного уравнения.*

1.7 Приближенное вычисление ключевой функции

Опишем одну практическую схему локальной редукции [65]. Функция $W(\xi, \lambda) = V\left(\sum_{j=1}^n \xi_j e_j(\lambda) + \Phi(\xi, \lambda), \lambda\right)$ при соответствующем выборе $\Phi(\xi, \lambda)$

является ключевой для функционала $V(x, \lambda)$, а ее градиент является ключевым отображением для уравнения $f(x, \lambda) = 0$. Для получения приближенной ключевой функции W часто достаточно ограничиться несколькими членами разложения W в ряд Тейлора. Обоснование того, что отображение «тейлоровского хвоста» не изменяет топологию бифуркационных диаграмм и структуру *bif*-раскладов, проводится на основе теорем о конечной определенности ростков отображений и их деформаций [3]. Рассмотрим тейлоровское разложение потенциала V до четвертого порядка:

$$V(x, \lambda) = \text{const} + \frac{1}{2} \langle A(\lambda)x, x \rangle_H + V_\lambda^{(3)}(x) + V_\lambda^{(4)}(x) + o(\|x\|^4),$$

где $A(\lambda) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, \lambda)$, $V_\lambda^{(3)}$ и $V_\lambda^{(4)}$ — однородные формы третьего и четвертого порядков на E . Для четного функционала V (или, что эквивалентно, нечетного отображения f) получаем представление

$$W(\xi, \lambda) = \text{const} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \alpha_j(\delta) \xi_j^2 + W_R^{(4)}(\xi) + O(|\lambda|)O(|\xi|^4) + O(|\xi|^6), \quad (1.34)$$

где $W_R^{(4)}(\xi) = V_0^{(4)}(\sum_{j=1}^n \xi_j e_j)$.

Пусть, далее, на $\mathcal{H}$ задан набор инволюций $\{J_k\}_{k=1}^n$ таких, что

- 1) $J_k(E) \subset E$, $J_k(F) \subset F$, $k = 1, \dots, n$,
- 2) $J_k(e_k(\lambda)) = -e_k(\lambda)$, $J_k(e_j(\lambda)) = e_j(\lambda)$, $k \neq j$. И пусть потенциал $V(\cdot, \lambda)$ инвариантен относительно J_k :

$$V(J_k(x), \lambda) = V(x, \lambda), \quad k = 1, \dots, n, \quad \forall x, \lambda, \quad (1.35)$$

(условие симметрии параллелепипеда). Тогда ключевая функция $W(\xi, \lambda)$ четна по каждой переменной ξ_j и, следовательно, её тейлоровское разложение имеет следующий вид [65]:

$$W(\xi, \lambda) = \text{const} + W_\lambda^{(2)}(\xi) + W_\lambda^{(4)}(\xi) + o(|\xi|^5),$$

где $W_\lambda^{(2)}$ и $W_\lambda^{(4)}$ — формы второго и четвертого порядков, четные по ξ_j .

Таким образом, для четного потенциала V с дополнительной симметрией параллелепипеда имеем представление

$$\text{const} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \alpha_j(\lambda) \xi_j^2 + W_R^{(4)}(\xi, 0) + O(|\lambda|)O(|\xi|^4) + O(|\xi|^6), \quad (1.36)$$

где $W_R^{(4)}(\xi, 0) = V_0^{(4)}\left(\sum_{j=1}^n \xi_j e_j\right)$. Если $V_0^{(4)}(x) = \mathcal{V}_0^{(4)}(x, x, x, x) (\mathcal{V}_0^{(4)}(x, y, z, t)$ — симметричная 4-линейная форма), то, с учетом всех симметрий, получаем соотношение

$$W_R^{(4)}(\xi) = \sum_{k=1}^n V_0^{(4)}(e_k) \xi_k^4 + 6 \sum_{i < j}^n \mathcal{V}_0^{(4)}(e_i, e_i, e_j, e_j) \xi_i^2 \xi_j^2. \quad (1.37)$$

В частности, при $n = 3$ имеем

$$W_R^{(4)}(\xi) = \sum_{k=1}^3 A_k \xi_k^4 + \sum_{i < j}^3 B_{i,j} \xi_i^2 \xi_j^2.$$

1.8 Редукция Ляпунова-Шмидта как обобщенная ритцевская аппроксимация

Определение 1.14. *Ритцевской аппроксимацией [65] функционала V , заданного на банаховом пространстве E , называется функция*

$$W_R(\xi) = V\left(\sum_{j=1}^n \xi_j e_j\right), \quad \xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)^\top,$$

где $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ — некоторый линейно независимый набор функций из E (базис аппроксимации).

Экстремалам $\bar{\xi} = (\bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_n)$ функции W соответствуют точки $\bar{x} = \sum_{j=1}^n \bar{\xi}_j e_j$, называемые ритцевскими аппроксимациями экстремалей V .

Точность ритцевских аппроксимаций повышается лишь за счет увеличения количества базисных функций. Если, обобщая, рассмотреть «нелинейные» аппроксимации вида

$$W(\xi) = V\left(\sum_{j=1}^n \xi_j e_j + \Phi(\xi)\right),$$

где Φ — гладкое отображение из $N := \text{Lin}(e_1, \dots, e_n)$ в $N^\perp$ (ортогональное дополнение к N в метрике пространства функций с суммируемым

квадратом), то во многих прикладных задачах можно достигнуть любой аппроксимативной точности при априори зафиксированном наборе базисных функций и, следовательно, априори ограниченном количестве степеней свободы аппроксимирующей системы. Таким образом, схему Ляпунова-Шмидта можно рассматривать как разновидность нелинейной ритцевской аппроксимации.

1.9 Некоторые сведения из теории особенностей гладких функций

Одним из важнейших в теории особенностей гладких функций является понятие *кратности* критической точки. Пусть $a \in \mathbb{R}^n$ — критическая точка функции V . Тогда функции $\partial V/\partial x_1, \dots, \partial V/\partial x_n$ порождают так называемый *якобиев идеал* $\langle \partial V/\partial x_1, \dots, \partial V/\partial x_n \rangle$ функции V в *кольце* $\mathbb{R}[[x - a]] = \mathbb{R}[[x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n]]$ формальных степенных рядов⁶ вида

$$\sum_{p_1, \dots, p_n} \beta_{p_1, \dots, p_n} (x_1 - a_1)^{p_1} \dots (x_n - a_n)^{p_n}$$

с вещественными коэффициентами $\beta_{p_1, \dots, p_n}$.

Факторкольцо

$$Q = \mathbb{R}[[x - a]] / \langle \partial V/\partial x_1, \dots, \partial V/\partial x_n \rangle$$

называется *локальным кольцом особенности* функции V в точке a (это определение корректно, поскольку заданные таким образом локальные кольца оказываются попарно изоморфными для всех функций из любого класса (попарно) эквивалентных функций [3]).

Число

$$\mu(V, a) = \dim Q(V, a)$$

⁶Формальные степенные ряды образуют *коммутативное кольцо с единицей*, т. е. множество с операциями сложения и умножения, свойства которых подобны свойствам аналогичных операций над вещественными числами, за исключением одного: не всякий ненулевой элемент имеет обратный по умножению. *Идеал* J в кольце A — это подкольцо, обладающее «идеальным свойством»: $u \cdot x \in J \quad \forall u \in J, x \in A$.

(имеется в виду размерность $Q(V, a)$ как вещественного линейного пространства) называется *кратностью* особенности (или критической точки a). Локальное кольцо может оказаться и бесконечномерным: такая особенность считается очень сложной и к изучению непригодной. Мы будем рассматривать исключительно конечнократные особенности.

Кратность особенности тесно связана с ее *коразмерностью* (не имеющей никакого отношения к размерности особенности).

Известно, что гладкие диффеоморфизмы $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ образуют группу (обозначим ее Diff), которую можно рассматривать как бесконечномерный аналог группы Ли [60]. Для каждой гладкой функции $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ множество функций, эквивалентных ей, является *орбитой* функции V относительно действия группы Diff :

$$\text{Orb}(V) = \{V \circ \varphi\}_{\varphi \in \text{Diff}}.$$

Известно, что в случае гладкого действия конечномерной группы Ли на гладком конечномерном многообразии орбиты являются гладкими подмногообразиями [60], поэтому в каждой точке такого многообразия определено касательное (к орбите) подпространство. Его коразмерность (определяемая как разность между размерностью объемлющего пространства и размерностью касательного подпространства) называется коразмерностью орбиты. Коразмерность равна минимальному количеству «управляющих параметров» для точки в объемлющем пространстве, необходимому для устойчивого (не устранимого малым шевелением) пересечения орбиты «управляемой точкой». Такое пересечение называется трансверсальным.

В классической механике коразмерность многообразия состояний механической системы совпадает с количеством независимых связей, наложенных на нее и выделяющих «реальное» многообразие ее состояний. Наложение дополнительных независимых связей уменьшает размерность многообразия состояний на число, равное количеству дополнительных связей.

Аналоги подобных понятий и конструкций имеются и в бесконечно-

мерном случае (в функциональных пространствах). К сожалению, мы не имеем здесь возможности более точного описания соответствующей теории.

Заметим лишь, что подмножество $\tilde{O}(V) \subset \mathbb{R}[[x]]$, состоящее из тейлоровских разложений в нуле для функций из $V_\varphi(x) = V(\varphi(x))$, также называется орбитой и оно обладает многими свойствами обычных (конечномерных) орбит. В частности, для него определено касательное пространство, как множество T_V формальных степенных рядов вида

$$h(x) = \frac{d}{d\varepsilon} (x + \varepsilon \mathcal{H}(x))|_{\varepsilon=0} = (\text{grad } V(z), \mathcal{H}(z))$$

(здесь $\mathcal{H}$ — произвольный степенной ряд с векторными (в $\mathbb{R}^n$) коэффициентами). Коразмерность T_V , определяемая как минимальная размерность подпространства в $\mathbb{R}[[x]]$, прямо дополняющего T_V до $\mathbb{R}[[x]]$, называется большой коразмерностью особенности V в нуле. Если к совокупности всех преобразований аргумента функции добавить преобразования сдвига значений функции, то орбита расширится на одно измерение, а коразмерность (расширенной) орбиты уменьшится на единицу. Эта величина (коразмерность расширенной орбиты) называется малой коразмерностью особенности или просто коразмерностью особенности V в нуле. Из описанных построений вытекает, что T_V совпадает с якобиевым идеалом в $\mathbb{R}[[x]]$, порожденным функцией V . Отсюда вытекает совпадение кратности с большой коразмерностью или, соответственно, с коразмерностью, увеличенной на единицу.

Вопросы строения конечнократных особенностей функций и их морсификаций естественно включаются в более общую теорию *деформаций особенностей*. Пусть функция V имеет в нуле конечнократную особенность. Под гладкой деформацией данной особенности подразумевается любое включение функции V в гладкое λ -параметрическое семейство гладких функций $U(x, \lambda)$, $U(x, 0) = V(x)$, определенных на некоторой окрестности нуля в $\mathbb{R}^n$, $\lambda \in \Lambda$, Λ — некоторая окрестность нуля в $\mathbb{R}^l$. Среди всевозможных гладких деформаций выделяются так называемые *версальные* и *миниверсальные* деформации, играющие важную роль в теории особен-

носте функций. Это связано с тем, что версальные деформации содержат в себе все допуститмык метаморфозы функции (перестройки поверхностей уровня, распадаения особых точек, разнообразные бифуркационные эффекты и т.д.), которые могут происходить при произвольном гладком деформировании функции.

Гладкая деформация $U(z, \lambda)$ функции $V(x)$ называется версальной в нулевой точке, если для любой другой деформации $\tilde{U}(x, \nu)$ функции $V(x)$, $\nu \in \mathbb{R}^k$, найдется такое отображение из $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ в $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l$ вида

$$(x, \nu) \rightarrow (\varphi(x, \nu), \psi(\nu)), \quad \varphi(x) = x, \quad (1.38)$$

определенное в некоторой сколь угодно малой окрестности нуля в $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$, что для всех (x, ν) из этой окрестности выполнено равенство

$$\tilde{U}(x, \nu) = U(\varphi(x, \nu), \psi(\nu)).$$

Версальная деформация с минимальным числом параметров m называется *миниверсальной*. Оказывается, что минимальное число параметров равно кратности μ деформируемой особенности [3]. Более того, гладкая деформация $U(x, \lambda)$ функции $V(x)$ является версальной в нулевой точке тогда и только тогда, когда факторклассы функций $\frac{\partial U}{\partial \lambda_j}(x, 0)$ (λ_j — координата λ , $j = 1, 2, \dots, m$) дают систему линейных образующих в локальном кольце особенности V в нуле (рассматриваемом как линейное пространство) [3].

Набор функций $\left\{ \frac{\partial U}{\partial \lambda_j}(x, 0), j = 1, 2, \dots, \mu \right\}$ иногда называют системой начальных скоростей деформации.

Гладкая деформация $U(x, \lambda)$ миниверсальна в нулевой точке, если факторклассы ее начальных скоростей деформации образуют базис в локальном кольце особенности V в нуле. В частности, деформация

$$V(x) + \sum_{j=1}^{\mu} \lambda_j \omega_j(x), \quad (1.39)$$

где $\{\omega_j(x)\}$ — произвольный базис локального кольца особенности V в нуле, является миниверсальной.

Формула (3.17) дает наиболее простой и наиболее распространенный способ построения версальных деформаций. Обычно в качестве базисных функций $\{\omega_j(x)\}$ выбирают мономы (мономиальный базис локального кольца).

Отметим еще одно важное для приложений утверждение [3]: *если $\tilde{U}(x, \nu)$ и $U(x, \lambda)$ — миниверсальные деформации, то отображение (1.38) является (локальным) диффеоморфизмом.*

Слово «версальный» является общей частью слов «трансверсальный» и «универсальный» [3], выражающих формально другие понятия, но имеющих прямое отношение к версальным деформациям. Первое из них означает, что отображение из $\text{Diff} \times \mathbb{R}^\mu$ в $\mathbb{R}[[x]]$, заданное соответствием

$$(\varphi, \lambda) \mapsto \hat{V}_\varphi(x) + \sum_{k=1}^{\mu} \lambda_k \omega_k(x), \quad (1.40)$$

где $\hat{V}_\varphi(x)$ — ряд Тейлора функции $V_\varphi(x) := V(\varphi(x))$ в нуле, является субмерсией в нуле (образ производной Гато совпадает с $\mathbb{R}[[x]]$). Второе понятие означает, что *любая гладкая деформация $\tilde{U}(x, \nu)$ функции V может быть получена из версальной деформации (3.17) посредством замены параметра и замены основного аргумента (зависящей от параметра)* (см. (1.38)).

Посредством миниверсальных деформаций вводятся различные *бифуркационные диаграммы*, важнейшими среди которых являются *каустики*, *дискриминантные множества* и *множества Максвелла*. Как правило, функция V предварительно приводится (посредством подходящей замены координат) к полиномиальной нормальной форме (нормализация не является обязательной процедурой, но после ее осуществления многие вычисления проводятся проще).

Напомним определения соответствующих диаграмм. Пусть λ принадлежит заданной области $\Lambda \subset \mathbb{R}^\mu$. Через $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ обозначим «наблюдаемую» область (в ней и только в ней находятся изучаемые критические точки).

Каустика Σ — это совокупность тех значений λ , при которых

$V(\cdot, \lambda)$ имеет в $\mathcal{U}$ вырожденную критическую точку.

Дискриминантное множество $\mathcal{D}$ — совокупность значений λ , при которых $V(\cdot, \lambda)$ имеет в $\mathcal{U}$ критическую точку на нулевой линии уровня.

Множество Максвелла Δ — совокупность значений λ , при которых $V(\cdot, \lambda)$ принимает равные значения на паре различных критических точек.

При изучении критических точек и их локальных морсовизаций можно сократить на единицу количество параметров версальной деформации за счет рассмотрения лишь мономиальных образующих (в локальном кольце особенности) положительной степени (моном нулевой степени отбрасывается). Допустимость такой «экономии» связана, во-первых, с тем, что при дифференцировании постоянные слагаемые функции исчезают и поэтому они не играют никакой роли при определении критических точек и вычислении их кратности. Во-вторых, проистекающую при таком отбрасывании параметра потерю информации в вопросах, связанных с метаморфозами поверхностей уровней, можно компенсировать расширением группы диффеоморфных преобразований аргумента функций посредством добавления преобразований постоянного сдвига значений функций [11].

Сокращенная на один параметр миниверсальная деформация называется ограниченной миниверсальной деформацией. Число входящих в неё «управляющих» параметров совпадает с коразмерностью особенности.

1.10 Об условии локальной конечной определенности полиномов

В рамках алгебраического формализма теории особенностей функций накоплен определенный опыт построения канонических полиномов, выражающих своей алгебраической формой типы особенностей гладких функций [3], [62]. Эти полиномы играют важную роль при использовании ключевых функций в приложениях. Важнейшую роль играют условия ло-

кальной конечной определенности полиномов в особых точках. Приведем наиболее часто употребляемое условие, найденное Дж. Мазером (см. [3], [11], [55]).

Предварительно напомним, что гладкая функция V называется *сильно r -определенной в точке a* , если каждая функция U с тем же отрезком ряда Тейлора (порядка r) в точке a , который имеется у V , сильно локально гладко эквивалентна функции V , то есть найдется такое гладкое отображение $\varphi : (\mathbb{R}^n, a) \rightarrow (\mathbb{R}^n, a)$ с единичной матрицей Якоби в точке a , что в некоторой окрестности этой точки a выполнено равенство $V(\varphi(x)) = U(x)$.

Согласно Дж. Мазеру, функция V является сильно r -определенной в нуле, если выполняется следующее *условие Мазера*:

$$\mathfrak{M}^{r+1} \subset \mathfrak{M}^2 \cdot J(V). \quad (1.41)$$

Здесь $\mathfrak{M}^k$ — k -я степень максимального идеала $\mathfrak{M}$ в $\mathbb{R}[[x]]$, а $J(V)$ — якобиев идеал функции V в нуле. Это условие допускает естественное обобщение

$$\mathfrak{U} \subset \mathfrak{M}^2 \cdot J(W), \quad (1.42)$$

где $\mathfrak{U}$ — произвольный конечнодефектный идеал (в кольце ростков гладких функций). При условии (1.42) допускается «уничтожение» диффеоморфной заменой координат «хвоста» тейлоровского разложения (включенного в $\mathfrak{U}$).

Примером весьма распространенного в приложениях типа ключевой функции является полином

$$\xi_1^4 + 2a \xi_1^2 \xi_2^2 + \xi_2^4 + q_1 \xi_1^2 \xi_2 + q_2 \xi_1 \xi_2^2 + \delta_1 \xi_1^2 + \delta_2 \xi_2^2 + 2\delta_3 \xi_1 \xi_2 + \varepsilon_1 \xi_1 + \varepsilon_2 \xi_2, \quad (1.43)$$

где q_i , δ_j , ε_k — малые вещественные параметры, $a > -1$, $a \neq 1$. Полином $\xi_1^4 + 2a \xi_1^2 \xi_2^2 + \xi_2^4$ носит название *двумерной сборки*. Он конечно определен (порядка 4), и его развертка (1.43) является миниверсальной [28].

1.11 Нелокальная вариационная версия метода Ляпунова-Шмидта

Среди теоретических проблем, связанных с применением и развитием метода конечномерных редукций, выделяется вопрос нелокальной продолжимости ключевых параметров. Он включает задачу нелокального существования ключевых параметров и задачу точного или приближенного представления маргинальных отображений и ключевых функций (возможность точного представления появляется, например, в некоторых интегрируемых уравнениях).

Пусть $f : E \rightarrow F$ — гладкое фредгольмово нулевого индекса отображение банаховых пространств. Пусть f потенциально с потенциалом V (гладким функционалом на E).

Если выполнено условие положительности (монотонности)

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial x}(x)h, h \right\rangle > 0 \quad \forall (x, h) \in E \times (E \setminus 0), \quad (1.44)$$

то, как легко проверить, уравнение $f(x) = 0$ имеет не более одного решения ([10], [29]). Выше было показано, что решение этого уравнения является и точкой минимума V на E .

В случае выполнения условия собственности f (компактность прообраза произвольного компакта) уравнение $f(x) = 0$ однозначно разрешимо (следствие теоремы Банаха-Мазура-Каччиополи [10]). Его решение является точкой глобального минимума V .

Можно определить глобальную ключевую функцию Ляпунова-Шмидта

$$W(\xi) := \inf_{x: \langle x, e_j \rangle = \xi_j \ \forall j} V(x), \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)^\top, \quad (1.45)$$

«отвечающую» за поведение функционала V в целом.

Для глобального ключевого уравнения

$$\theta(\xi) = 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad (1.46)$$

в котором

$$\theta(\xi) = (\theta_1(\xi), \dots, \theta_n(\xi))^\top, \quad \theta_j(\xi) = \langle f(l(\xi) + \Phi(\xi)), e_j \rangle,$$

имеем

$$\theta(\xi) = \text{grad } W(\xi).$$

1.12 Харатеристические графы и комплексы

Из теории Морса [61] известно, что каждую гладкую функцию W на конечномерном многообразии M , имеющую лишь морсовские критические точки, можно изобразить клеточным комплексом, каждая клетка которого взаимно однозначно соответствует критической точке функции W . Размерность клетки равна индексу Морса соответствующей критической точки, а примыкания клеток в комплексе соответствуют взаимным примыканиям критических точек (как особых точек динамической системы $\dot{\xi} = -\text{grad}W(\xi)$). Причем гомотопический тип характеристического комплекса совпадает с гомотопическим типом многообразия M . Из этого факта вытекает, в частности, что наборы стационарных точек функций на плоскости и в трехмерном пространстве можно изображать графами (одномерными остовами клеточных комплексов). Если функция W , заданная на $\mathbb{R}^n$, коэрцитивна, то изображающий ее характеристический комплекс гомотопически тривиален (гомотопен точке). Следовательно, в случае коэрцитивной функции изображающий граф связан.

Пусть $n = 3$. Обозначив через l_0, l_1, l_2, l_3 количества минимумов, седел индекса (Морса) 1, седел индекса 2 и точек максимума, получим, в силу формулы Эйлера [61], следующие соотношения:

$$l_0 - l_1 + l_2 - l_3 = 1. \quad (1.47)$$

Характеристический клеточный комплекс состоит из l_0 вершин, l_1 ребер, l_2 двумерных клеток и l_3 трехмерных клеток. Он полностью определяется своим одномерным остовом (изображающим графом). Вершины графа взаимно однозначно соответствуют точкам минимумов, а ребра — седлам индекса 1. При этом две вершины соединяются ребром, если существует кривая, соединяющая соответствующую им пару точек минимумов, составленная из пары линий кратчайшего спуска (интегральных

кривых поля градиентов), связывающих пары «седло – минимум» (малым шевелением функции или метрики можно добиться того, чтобы любая интегральная кривая, вытекающая из седла, втекала в точку локального минимума). За счет изменения метрики в областях вида $\{c_1 < W < c_2\}$, не содержащих критических точек, можно переносить финальные точки сепаратрис из одних локальных минимумов в другие (то есть сепаратрисы будут втекать в другие точки локальных минимумов). За счет таких переключений можно получать разнообразные соединения ребрами вершин в пределах одного расклада стационарных точек. Переключениям сепаратрис соответствуют гомологические преобразования графа.

Определение 1.15. Пусть граф $\hat{\Gamma}$ получен из графа Γ через последовательность следующих трех операций: 1) удаление любого ребра, соединяющего пару внутренних (некраевых) вершин A, B , 2) склеивание оставшихся (после удаления ребра) частей графа по вершинам A, B (за точкой стыка сохраним обозначение A) и 3) приклеивание к точке стыка A нового «висячего» ребра (вторая вершина приклеенного ребра — краевая точка).

Тогда будем говорить, что граф $\hat{\Gamma}$ получен из графа Γ прямым гомологическим преобразованием, а граф Γ получен из $\hat{\Gamma}$ обратным гомологическим преобразованием.

Определение 1.16. Если граф $\tilde{\Gamma}$ получен из графа Γ через конечную последовательность прямых и обратных гомологических преобразований, то графы Γ и $\tilde{\Gamma}$ называются гомологичными.

Очевидно, что гомологические преобразования сохраняют количества вершин и ребер графа.

В качестве примеров характеристических комплексов приведем изображения раскладов экстремалей для двумерных и трехмерных сборок.

Раскладам экстремалей для двумерных сборок соответствуют следующие примеры графов (собранных в классы гомологичных) (рис. 1):

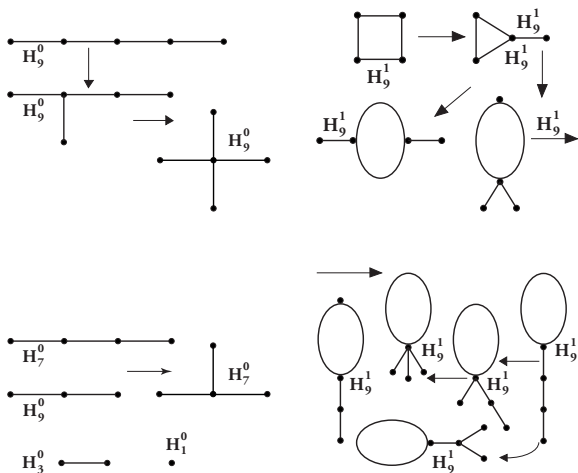


Рис. 1

Примеры характеристических графов для раскладов экстремалей, бифурцирующих из $\min$ -особенности типа 2-мерной сборки

При произвольных регулярных возмущениях гладкой функции в окрестности особой точки минимума типа двумерной сборки появляется те и только те *bif*-расклады критических точек, которые приведены в следующем списке ⁷ (см. [28]):

$\{2, 1, 0\}$, $\{3, 2, 0\}$, $\{4, 3, 0\}$, $\{5, 4, 0\}$, $\{1, 1, 1\}$, $\{2, 2, 1\}$, $\{3, 3, 1\}$, $\{4, 4, 1\}$.

Этим раскладам соответствуют следующие топологическими типы характерных линий уровней (возмущенной сборки):

⁷В раскладе (l_0, l_1, l_2) компонента l_k равна количеству критических точек с индексом Морса, равным k .

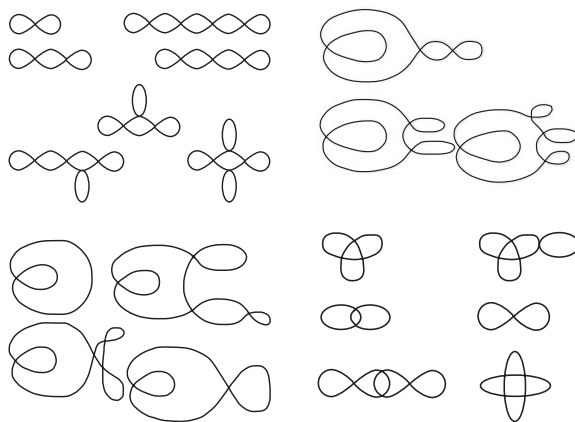


Рис. 2

Характерные линии уровней возмущенных 2-мерных сборок

Раскладам бифурцирующих критических точек, полученным при возмущениях особенности 3-мерной сборки, соответствует несколько сотен характеристических комплексов. Если ограничиться рассмотрением сборок и их возмущений с симметрией параллелепипеда (т.е. четных по каждой переменной), то получится около пятидесяти изображающих комплексов [23]. Полного списка изображающих комплексов для 3-мерных сборок в настоящее время нет. Однако созданные в последнее время новые геометрические методы [28] дают надежду на создание эффективных алгоритмов перечисления *bif*–раскладов в случае *min*-особенности типа трехмерной сборки.

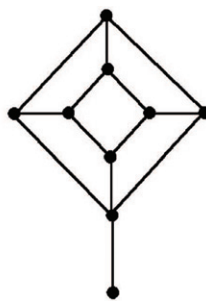
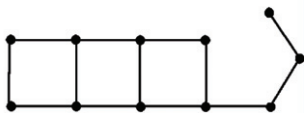
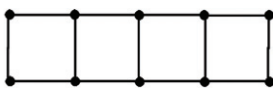
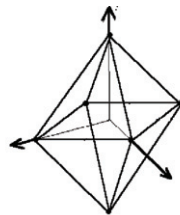
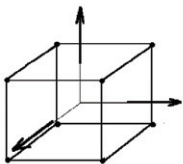


Рис. 3

Простейшие характеристические комплексы, изображающие максимальные расклады экстремалей, бифурцирующих из *min*-особенности типа 3-мерной сборки

Глава 2

Модельные краевые задачи

2.1 Натуральные механические системы

Рассмотрим на отрезке $[0, 1]$ дифференциальное уравнение второго порядка в виде натуральной механической системы

$$\ddot{x} + Ax - \nabla\omega(x) = 0, \quad x = (x_1, \dots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n, \quad (2.1)$$

с однородными краевыми условиями первого рода (условиями Дирихле)

$$x(0) = x(1) = 0. \quad (2.2)$$

В уравнение (2.1) входит симметричная $(n \times n)$ –матрица A и гладкая нестрого выпуклая на $\mathbb{R}^n$ функция ω : $\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}(x)(h, h) \geq 0 \quad \forall x, h \in \mathbb{R}^n$. Мы предполагаем, что уравнение (2.1) разрешимо на $[0, 1]$ при любых начальных условиях Коши: $x(0) = a$, $\dot{x}(0) = b$. Очевидно, что множество $\mathcal{N}$ его решений является гладким подмногообразием размерности $2n$ в банаховом пространстве $C^2([0, 1], \mathbb{R}^n)$.

Частный случай уравнения (2.1) — уравнение колебаний маятника

$$\ddot{x} + \lambda \sin x = 0, \quad x : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}.$$

Положим $E = \{x \in C^2([0, 1], \mathbb{R}^n) : x(0) = x(1) = 0\}$, $F = C([0, 1], \mathbb{R}^n)$, $H = L_2([0, 1], \mathbb{R}^n)$. Скалярное произведение в H будем обозначать $\langle \cdot, \cdot \rangle$: $\langle x, y \rangle = \int_0^1 (x(t), y(t)) dt$, где $(\cdot, \cdot)$ — стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$. Левая часть (2.1), взятая со знаком минус, задает гладкое фредгольмово отображение индекса 0 из E в F , которое является градиентом в

тройке пространств $\{E, F, H\}$ гладкого на E функционала энергии

$$V(x) = \int_0^1 \left(\frac{|\dot{x}|^2}{2} - \frac{(Ax, x)}{2} + \omega(x) \right) dt. \quad (2.3)$$

Обозначим через e_{ij} вектор-функции

$$e_{ij}(t) = (\underbrace{0, \dots, 0}_{i-1}, \sqrt{2} \sin \pi j t, 0, \dots, 0)^\top, \quad i = 1, \dots, n, \quad j \in \mathbf{N},$$

образующие полную ортонормированную систему в H . Если максимальное собственное значение λ^* матрицы A удовлетворяет неравенству

$$\lambda^* < (k+1)^2 \pi^2, \quad (2.4)$$

то квадратичная форма

$$\int_0^1 (|\dot{x}|^2 - (Ax, x)) dt = \langle -\ddot{x} - Ax, x \rangle$$

положительна на ортогональном дополнении в H к (nk) -мерному подпространству

$$E^{nk} := \text{Lin}(e_{11}, \dots, e_{n1}, \dots, e_{1k}, \dots, e_{nk}).$$

Пусть

$$\xi = (\xi_{11}, \dots, \xi_{nk})^\top \in \mathbb{R}^{nk}, \quad l(\xi) = \sum_{i,j} \xi_{ij} e_{ij} \in E^{nk},$$

$$\tilde{E} = \{x \in E : \langle x, e_{ij} \rangle = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, k\} = E \cap (E^{nk})^\perp,$$

$$\tilde{E}_\xi = \{x \in E : \langle x, e_{ij} \rangle = \xi_{ij}, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, k\} = l(\xi) + \tilde{E}.$$

Покажем, что $\forall \xi \in \mathbb{R}^{nk}$ функционал V имеет единственную условную невырожденную критическую точку в слое $\tilde{E}_\xi$. Для этого рассмотрим гильбертово пространство H^1 , полученное замыканием E в норме, порожденной скалярным произведением $\langle x, y \rangle_1 = \langle \dot{x}, \dot{y} \rangle = \langle -\ddot{x}, y \rangle$. Пусть H_ξ^1 — замыкание $\tilde{E}_\xi$ в H^1 . Функционал V можно переписать в виде

$$V(x) = V(l(\xi) + v) = \frac{1}{2} \left(\|v\|_1^2 - \left\langle \left(\frac{d}{dt} \right)^{-2} v, Av \right\rangle_1 \right) + S(\xi, v), \quad v \in H_0^1, \quad (2.5)$$

где $S(\xi, v)$ — выпуклый по v функционал, из чего следует оценка

$$S(\xi, v) \geq -C_1(\xi)\|v\|_1 - C_2(\xi), \quad C_1, C_2 \geq 0.$$

Поскольку квадратичная форма $\left(\|v\|_1^2 - \left\langle \left(\frac{d}{dt}\right)^{-2} v, Av \right\rangle_1\right)$ положительна, функционал V является выпуклым и коэрцитивным по аффинным подпространствам H_ξ^1 , что гарантирует существование условной экстремали v_ξ в H_ξ^1 . На самом деле, $v_\xi \in \tilde{E}_\xi$. «Подкачку гладкости» позволяет произвести соотношение

$$v_\xi + \left(\frac{d}{dt}\right)^{-2} v_\xi + \left(\frac{d}{dt}\right)^{-2} Av_\xi + \left(\frac{d}{dt}\right)^{-2} \omega(v_\xi) = \sum_{i,j} \mu_{ij} \left(\frac{d}{dt}\right)^{-2} e_{ij}, \quad (2.6)$$

являющееся уравнением Эйлера — Лагранжа для условных экстремалей функционала (2.5) в $\mathcal{H}_\xi^1$. Из (2.6) очевидно следует, что v_ξ принадлежит классу C^2 .

Из фредгольмовости с нулевым индексом отображения $\nabla_H V : E \rightarrow F$ следует гладкость ключевой функции Ляпунова-Шмидта

$$W_{LS}(\xi) = V(l(\xi) + v_\xi) = \inf_{v \in \tilde{E}} V(l(\xi) + v) = \inf_{x \in \tilde{E}_\xi} V(x).$$

Краевые задачи для неоднородного уравнения колебаний маятника в случае двух нелокальных ключевых параметров и с использованием вариационного характера уравнения рассматривал в своих работах А.Ю. Борзаков [6]–[8].

Если рассмотреть периодическую задачу для неоднородного уравнения

$$\ddot{x} + \mu \sin(x) = q_0 e_0 + q_1 e_1 + q_2 e_2, \quad (2.7)$$

$e_0 = 1, e_1 = \sqrt{2} \cos(t), e_2 = \sqrt{2} \sin(t)$ (ниже рассмотрен, без ущерба для общности, постоянный период $T = 2\pi$), то, как нетрудно заметить, это уравнение соответствует функционалу действия

$$V_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\dot{x}^2}{2} + \lambda(\cos(x) - 1) + qx \right) dt, \quad (2.8)$$

$q = q_0 e_0 + q_1 e_1 + q_2 e_2$. Эта задача при $q = 0$ интегрируема (в квадратурах) и решения можно выписывать через функции Якоби. Другой вариант

построения решений, позволяющий более детально изучить бифуркационную картину, опирается на редукцию Ляпунова-Шмидта.

Запишем функционал (2.8) в следующем виде:

$$V_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\dot{x}^2}{2} - \lambda \frac{x^2}{2} \right) dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lambda \left(\frac{x^2}{2} + \cos(x) - 1 \right) dt,$$

так как $\frac{x^2}{2} + \cos(x)$ — выпуклая функция, то при $\lambda > 0$ второе слагаемое — выпуклый функционал. При $\lambda < 0$ первое слагаемое также является выпуклым. При $\lambda > 0$ выпуклость первого слагаемого исчезает.

Моды бифуркации, по которым происходит вырождение при $\lambda < 4$, следующие:

$$e_0 = 1, \quad e_1 = \sqrt{2} \cos(t), \quad e_2 = \sqrt{2} \sin(t).$$

Пусть $E = \Pi_{2\pi}^2$ — пространство периодических дважды непрерывно дифференцируемых функций, $F = \Pi_{2\pi}^0$ — пространство непрерывных периодических функций и пусть $f : E \rightarrow F$ — отображение, заданное левой частью уравнения (2.7). Пусть, далее, $1 < \lambda < 4$ и

$$E = \text{Lin}(e_0, e_1, e_2) + E^{\infty-3},$$

— ортогональное разложение, где $E^{\infty-3}$ — ортогональное дополнение к $\text{Lin}(e_0, e_1, e_2)$ (подпространство всех функций, у которых коэффициенты Фурье по e_0, e_1, e_2 равно нулю). При $\lambda < 4$ функционал действия является выпуклым на $E^{\infty-3}$, а его условный градиент послойно собственный.

Таким образом, для отыскания и изучения периодических решений уравнения (2.7) можно применить глобальную ключевую функцию

$$W(\xi) = \inf_{v \perp e_0, e_1, e_2} V(\xi_0 + \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + v).$$

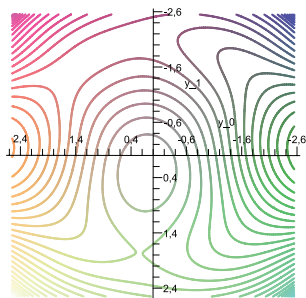


Рис. 4

Фрагмент линий уровня редуцированной (по $SO(2)$ -симметрии) ключевой функции уравнения колебаний маятника

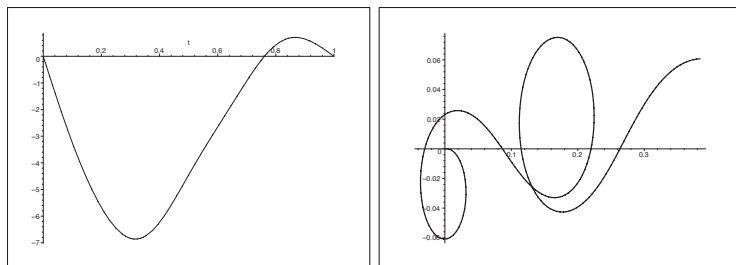


Рис. 5

Изображения неустойчивого решения (индекса Морса единица) и соответствующей ему конфигурации стержня (рисунок получен А.Ю. Борзаковым)

О результатах приближенного построения нелокальных ключевых функций, соответствующих уравнению маятника (2.7) и более общему уравнению Белецкого [5] (колебаний спутника в плоскости эллиптической орбиты) можно получить информацию в [34], [40], [42].

2.2 Вариационные задачи для ДУ четвертого порядка

2.2.1 Уравнения Фусса-Винклера-Циммермана и Свифта-Хоенберга

Стационарное уравнение СХ (Свифта-Хоенберга [47], [87]) формально совпадает с нелинейным уравнением прогибов балки на упругом основании. Подобные уравнения исследовали Ю.А. Митропольский, Б.И. Мосеенков [58], J.M.T. Thompson, G.W. Hunt [88], [89], Б.С. Бардин, С.Д. Фурта [4] и др. Линейное уравнение изгиба балки на упругом основании представляет собой широко известную модель Фусса-Винклера-Циммермана (ФВЦ), служащую, вплоть до настоящего времени, основой для большинства инженерных исследований устойчивости строительных сооружений [16]. Нелинейные обобщения модели ФВЦ начали рассматриваться сравнительно недавно [4], [89].

Бифуркационный анализ периодических решений нелинейного уравнения, аналогичного типу ФВЦ, проводился в работах Б.М. Даринского и Ю.И. Сапронова [28], основное внимание в которых уделялось вопросу зарождения посткритических периодических структур в кристаллах. Прогобы неоднородных балок на упругом основании изучались Д.В. Костинным в работах [38, 39].

Нелинейная промасштабированная модель колебательного движения однородной балки на упругом основании задается уравнением (см. [89])

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \kappa \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \alpha w + w^3 = 0,$$

где w — прогиб балки (смещение точек средней линии упругой балки, расположенной вдоль оси x). Аналогичное уравнение возникает в теории кристаллов [30], в которой w — параметр порядка.

Первый шаг в изучении такой задачи — отыскание равновесных (стационарных) состояний, определяемых уравнением

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + \kappa \frac{d^2 w}{dx^2} + \alpha w + w^3 = 0, \quad (2.9)$$

которое ниже мы рассмотрим при стандартных краевых условиях

$$w(0) = w(1) = w''(0) = w''(1) = 0. \quad (2.10)$$

Начально-краевая задача с граничным условием (2.10) допускает 2-мерные вырождения.

Уравнение (2.9) является уравнением Эйлера-Пуассона для экстремалей функционала (действия)

$$V = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} \left(\left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 - \kappa \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 + \alpha w^2 \right) + \frac{w^4}{4} \right) dx. \quad (2.11)$$

Двумерное вырождение нулевой экстремали происходит при

$$\kappa = \kappa_1 := (p^2 + q^2)\pi^2, \quad \alpha = \alpha_1 := p^2 q^2 \pi^4, \quad p, q \in \mathbb{N},$$

со стандартными модами бифуркации (базисом ядра второго дифференциала)

$$e_1 = \sqrt{2} \sin(p\pi x), \quad e_2 = \sqrt{2} \sin(q\pi x).$$

Ниже предполагается, что $p = 1$, $q = 2$ и, соответственно, $\kappa_1 = 5\pi^2$, $\alpha_1 = 4\pi^4$ (эти значения являются наименьшими из тех, при которых происходит 2-мерное вырождение; в остальных случаях анализ аналогичен).

Редукция Ляпунова-Шмидта [28] к (ключевой) функции (двух переменных)

$$W(\xi, \delta) = \inf_{w: \langle w, e_1 \rangle = \xi_1, \langle w, e_2 \rangle = \xi_2} V(w, \alpha_1 + \delta_1, \kappa_1 + \delta_2), \quad (2.12)$$

$\xi = (\xi_1, \xi_2)$, $\delta = (\delta_1, \delta_2)$, сохраняет симметрию функционала действия. Так как функционал (2.11) инвариантен относительно инволюций J_1, J_2 :

$$J_2(p)(x) := p(1 - x), \quad J_1 := -J_2,$$

то и для функции (2.12) имеем

$$W(-\xi_1, \xi_2, \delta_1, \delta_2) = W(\xi_1, -\xi_2, \delta_1, \delta_2) = W(\xi_1, \xi_2, \delta_1, \delta_2)$$

(симметрию прямоугольника), из которой вытекает [28] справедливость асимптотического представления

$$W(\xi, \delta) = U(\xi, \delta) + o(|\xi|^4) + O(|\xi|^4)O(\delta),$$

где $U(\xi, \delta) = V(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2, \delta)$ — линейная ритцевская аппроксимация функционала V по модам e_1, e_2 . Таким образом, для ключевой функции имеет место асимптотическое представление

$$\frac{\lambda_1}{2} \xi_1^2 + \frac{\lambda_2}{2} \xi_2^2 + \frac{1}{4} (A \xi_1^4 + 2B \xi_1^2 \xi_2^2 + C \xi_2^4) + o(|\xi|^4) + O(|\xi|^4)O(\delta), \quad (2.13)$$

где

$$\lambda_1 = \delta_1 - \pi^2 \delta_2, \quad \lambda_2 = \delta_1 - 4\pi^2 \delta_2,$$

$$A = \int_0^1 e_1^4 dx = \frac{3}{2}, \quad B = \int_0^1 e_1^2 e_2^2 dx = 3, \quad C = \int_0^1 e_2^4 dx = \frac{3}{2}.$$

Сократив на множитель $3/2$, получим функцию (2.13) с нормализованной главной частью:

$$\widetilde{W}_0(\xi, \delta) = \widetilde{U}(\xi, \delta) + o(|\xi|^4) + O(|\xi|^4)O(\delta),$$

где

$$\widetilde{U}(\xi, \delta) = \frac{\tilde{\lambda}_1}{2} \xi_1^2 + \frac{\tilde{\lambda}_2}{2} \xi_2^2 + \frac{1}{4} (\xi_1^4 + 4\xi_1^2 \xi_2^2 + \xi_2^4).$$

«Геометрический сюжет» бифуркации критических точек и первые асимптотики ветвей бифурцирующих точек (по закритическим приращением управляющих параметров) для функции $\widetilde{W}_0(\xi, \delta)$ полностью определяются ее главной частью $\widetilde{U}(\xi, \delta)$, которая представляет собой «возмущенную двумерную сборку» (с коэффициентом двойного отношения $a = 4$), четную по каждой переменной [28].

Пусть $\theta_1 = \tilde{\lambda}_1 - 2\tilde{\lambda}_2$, $\theta_2 = \tilde{\lambda}_2 - 2\tilde{\lambda}_1$. Так как матрица Гессе функции $\widetilde{U}$ представима в виде

$$\begin{pmatrix} \tilde{\lambda}_1 + 3\xi_1^2 + 2\xi_2^2 & 4\xi_1 \xi_2 \\ 4\xi_1 \xi_2 & \tilde{\lambda}_2 + 2\xi_1^2 + 3\xi_2^2 \end{pmatrix},$$

то, как нетрудно проверить, при $\theta_1 > 0$ и $\theta_2 > 0$ существуют четыре 2-модовые критические точки индекса 1. Все 1-модовые точки при этом являются точками локальных минимумов, а нуль — критической точкой индекса 2. Рождение 1-модовых критических точек происходит при переходах параметров $\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2$ в области отрицательных значений.

Каустика (бифуркационная диаграмма функций [3]) $\Sigma_{\tilde{U}}$ функции $\tilde{U}$ разбивает плоскость управляющих параметров на шесть зон

$$\omega_0 = \{\tilde{\lambda}_1 > 0, \tilde{\lambda}_2 > 0\},$$

$$\omega_1 = \{\tilde{\lambda}_1 < 0, \tilde{\lambda}_2 > 0\},$$

$$\omega_2 = \{\tilde{\lambda}_1 > 0, \tilde{\lambda}_2 < 0\},$$

$$\omega_3 = \{\tilde{\lambda}_1 < 0, \tilde{\lambda}_2 < 0, \theta_1 < 0, \theta_2 > 0\},$$

$$\omega_4 = \{\tilde{\lambda}_1 < 0, \tilde{\lambda}_2 < 0, \theta_1 > 0, \theta_2 < 0\},$$

$$\omega_5 = \{\tilde{\lambda}_1 < 0, \tilde{\lambda}_2 < 0, \theta_1 > 0, \theta_2 > 0\}.$$

Каждой зоне соответствует свой расклад (*bif*-расклад) бифурцирующих критических точек: параметрам из зоны ω_0 отвечает случай единственной критической точки (точка минимума в нуле), для ω_1, ω_2 — пара симметрично расположенных (относительно нуля) 1-модовых точек минимума и седло в нуле, для ω_3, ω_4 — пара симметрично расположенных 1-модовых точек минимума, пара 1-модовых седел и точка локального максимума в нуле, для ω_5 — четверка симметрично расположенных 1-модовых точек минимума, четверка 2-модовых седел и точка локального максимума в нуле.

При обходе плоскости управляющих параметров против часовой стрелки вокруг нуля, начиная с зоны ω_0 , соответствующие метаморфозы линий уровней и распределений критических точек изображены на следующей диаграмме:

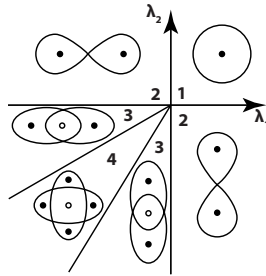


Рис. 6

Метаморфозы характерных линий уровней

В этом случае появляются те и только те расклады бифурцирующих критических точек (*bif*-расклады), которым соответствуют следующие целочисленные векторы: $(1, 0, 0)$, $(2, 1, 0)$, $(2, 2, 1)$, $(4, 4, 1)$ (в раскладе (l_0, l_1, l_2) компонента l_k равна количеству критических точек с индексом Морса, равным k).

2.2.2 Трассирование спусков вдоль траекторий уравнения Свифта-Хоенберга в точки минимума энергии

Обратимся вновь к уравнению СХ

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \kappa \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \alpha w + w^3 = 0.$$

Изменение параметров приведет к потере устойчивости исходной фазы и, как следствие (как отклик системы), к ее переходу в новое состояние (с новыми структурными свойствами). Такой переход может сопровождаться, например, спинодальным расслоением (распадом), выраженным в изменении локальных концентраций компонентов, в образовании сначала зернистой структуры, а затем кластеров и доменов новой фазы. В последнее время структурную перестройку физической среды часто объясняют на основе нелинейного диффузионного уравнения КХ (Кана-Хилларда [71], [77])

$$\dot{u} = \Delta \operatorname{grad} V(u) := \mathcal{D} \Delta (u^3 - u - \gamma \Delta(u)),$$

в котором $u = u(x)$ — относительная концентрация компонента вещества, $x \in U \subset \mathbb{R}^m$, $1 \leq m \leq 3$, $\mathcal{D}$ — коэффициент диффузии,

$$V(u) := \mathcal{D} \int_U \left(\frac{(u^2 - 1)^2}{4} + \frac{\gamma}{2} |\nabla u|^2 \right) dx$$

— интеграл энергии, U — область, занятая изучаемой средой.

Близким уравнением, также способным моделировать структурные превращения, является нелинейное уравнение СХ, которое можно представить в виде градиентной динамической системы (с бесконечным числом

степеней свободы)

$$\dot{w} = -\text{grad } V(w) := -\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \kappa \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \alpha w + w^3\right),$$

$$x \in [0, 2\pi],$$

$$V(w) := \int_0^{2\pi} \left(\frac{(w'')^2}{2} - \kappa \frac{(w')^2}{2} + \alpha \frac{w^2}{2} + \frac{w^4}{4} \right) dx$$

— интеграл энергии. Будем далее предполагать, что для концентрации выполнено краевое условие $w(0) = w(1) = w''(0) = w''(1) = 0$ (см. (2.10)). При исследовании локальных бифуркаций экстремалей иногда используется ритцевская аппроксимация функционала

$$W(\xi) := V(c + \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_n e_n),$$

построенная по начальным собственным функциям (модам) e_j оператора $\frac{d^4}{dx^4}$. В нелокальных задачах также можно использовать ритцевскую аппроксимацию, но при этом для достижения требуемой точности решения необходимо использовать большое количество мод, что приводит к большой размерности аппроксимирующей системы. Снизить размерность аппроксимирующей системы можно за счет применения нелинейной ритцевской аппроксимации, например, в виде нелокально продолженной ключевой функции, то есть фактически перейдя к конечномерной задаче $\dot{\xi} = \text{grad } W(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, где $W(\xi) := \inf_{\langle w, e_j \rangle = \xi_j} V(w)$ — ключевая функция Ляпунова-Шмидта.

Ниже мы воспользуемся прямой процедуры кратчайшего спуска в точку минимума V (не переходя к аппроксимирующей ключевой функции). Первым шагом этой процедуры является выбор величины сдвига вдоль градиента из начальной (порождающей) точки, с целью уменьшения значения функционала энергии.

В качестве финальных состояний искомым траекторий динамической системы (1) используются те орбиты точек минимума, которые ответвились (при возрастании параметра λ) от докритического нулевого равновесия.

Основной шаг в построении «трассы кратчайшего спуска» к минимуму — решение уравнения (относительно s):

$$\langle \text{grad} \tilde{V}(a_0 + sh_0), h \rangle = 0. \quad (2.14)$$

Здесь $h_0 = -\text{grad} \tilde{V}(a_0)$, $g = -\text{grad} \tilde{V}$, a_0 — начальная (порождающая) точка. Например, можно положить (для определенности)

$$a_0 = \sin(5\pi x_1) + \sum_{k=1}^4 \varepsilon_k \sin(k\pi x), \quad (2.15)$$

$\{\varepsilon_k\}$ — некоторый фиксированный набор малых величин. Используя для $g(a + sh_0)$ разложение Тейлора, получим соотношение

$$g(a_0 + sh_0) = g(a_0) + s \frac{\partial g}{\partial x}(a_0) h_0 + o(s),$$

$\frac{\partial g}{\partial x}(a_0)$ — производная Фреше градиентного отображения g , и

$$\langle g(a_0 + sh_0), h_0 \rangle = \langle g(a_0), h_0 \rangle + s \langle (\partial g / \partial x)(a_0) h_0, h_0 \rangle + o(|s|).$$

Следовательно, исходя из уравнения (2.14), можно положить (с некоторой точностью)

$$s = s_0 := -\frac{\langle g(a_0), h_0 \rangle}{\langle (\partial g / \partial x)(a_0) h_0, h_0 \rangle} = -\frac{\|g(a_0)\|^2}{\langle (\partial g / \partial x)(a_0) h_0, h_0 \rangle}.$$

Поиск значения s_0 можно осуществить более точно — посредством отыскания точки минимума полинома четвертой степени

$$p(s) = s^4 + p_3 s^3 + p_2 s^2 + p_1 s \sim \tilde{V}(a_0 + s h_0)$$

(рассмотренного с точностью до постоянного множителя и постоянного слагаемого).

Следующий шаг кратчайшего спуска — повторение основного шага для новой порождающей точки $a_1 := a_0 + s_0 h_0$ и т.д. Ниже, на рисунке 7, изображены графики, полученные при $\lambda > \pi^2$ соответствующих промежуточных и финальной функций концентрации после некоторого предварительного подбора коэффициентов разложения Фурье для начальной функции концентрации (2.15).

На основе данного алгоритма были получены кривые, изображающие удельные концентрации ¹.

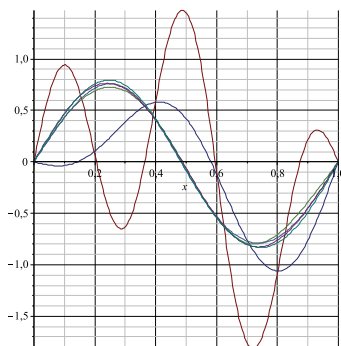


Рис. 7

Первые пять итераций расчетных функций плотности концентраций

2.3 Фазовые переходы в сегнетоэлектрических кристаллах

Как свидетельствуют эксперименты, большинство фазовых переходов в сегнетоэлектриках происходят при уменьшении температуры образца и с разрушением или понижением некоторых исходных симметрий [30]. Ведущим фактором при описании этих переходов методами неравновесной термодинамики является температурная зависимость тензора поляризации вещества. Учет этой зависимости позволяет получать существенные дополнительные сведения о фазовых переходах и, следовательно, выявлять новые типы фазовых состояний.

В обзоре [28] поставлена задача исследования возможных фазовых переходов в кристаллах, сингонии которых содержат оси высоких порядков и термодинамические потенциалы которых представлены полиномами не выше четвертой степени. К этой совокупности относятся кристаллы кубической, тетрагональной, тригональной и гексагональной сингоний (всего

¹Здесь использован рисунок, полученный Д.В. Костиным.

19 классов). Полный список возможных фаз пока никем не получен, и его создание выглядит весьма сложной задачей. Списки некоторых допустимых раскладов метастабильных состояний приведены в [28] (в случае особенностей типа двумерной и трехмерной сборки).

Известно, что фазовые состояния некоторых сегнетоэлектрических кристаллов моделируются решениями нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка (см. [4], [73], [79])

$$\frac{d^4 p}{dx^4} + \kappa \frac{d^2 p}{dx^2} + \alpha p + p^3 = 0, \quad (2.16)$$

рассмотренного на отрезке $[0, \pi]$ числовой оси при краевых условиях

$$p(0) = \frac{d^2 p}{dx^2}(0) = p(\pi) = \frac{d^2 p}{dx^2}(\pi) = 0. \quad (2.17)$$

Моделльное уравнение в случае таких кристаллов совпадает со стационарным уравнением ФСЦ (2.9).

Это уравнение является уравнением Эйлера-Пуассона экстремалей функционала энергии

$$V(p, \kappa, \alpha) = \int_0^\pi \left(\frac{1}{2} \left(\left(\frac{d^2 p}{dx^2} \right)^2 - \kappa \left(\frac{dp}{dx} \right)^2 + \alpha p^2 \right) + \frac{p^4}{4} \right) dx, \quad (2.18)$$

где $\alpha > 0$.

Функционал (2.18) можно рассмотреть, например, на пространстве E функций класса C^4 на отрезке $[0, \pi]$, удовлетворяющих краевым условиям (2.17).

Анализ бифуркационных эффектов можно осуществить посредством редукции Ляпунова-Шмидта к ключевой функции (от двух ключевых переменных)

$$W(\xi, \delta) = \inf_{p: \langle p, e_1 \rangle = \xi_1, \langle p, e_2 \rangle = \xi_2} V(p, \alpha_1 + \delta_1, \kappa_1 + \delta_2), \quad (2.19)$$

$$\xi = (\xi_1, \xi_2), \quad \delta = (\delta_1, \delta_2),$$

где e_n — моды бифуркации

$$e_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nx).$$

Функционал (2.18) инвариантен относительно инволюций J_1, J_2 :

$$J_2(p)(x) = p(\pi - x), \quad J_1 = -J_2.$$

Следовательно, функция (2.19) имеет симметрию прямоугольника:

$$W(-\xi_1, \xi_2, \delta_1, \delta_2) = W(\xi_1, -\xi_2, \delta_1, \delta_2) = W(\xi_1, \xi_2, \delta_1, \delta_2), \quad (2.20)$$

из которой вытекает справедливость асимптотического представления

$$W(\xi, \delta) = U(\xi, \delta) + o(|\xi|^4) + O(|\xi|^4)O(\delta), \quad (2.21)$$

где $U(\xi, \delta) = V(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2, \delta)$ — ритцевская аппроксимация функционала V по модам e_1, e_2 . Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.1. *Для ключевой функции (2.19) имеет место асимптотическое представление*

$$W(\xi, \delta) = \frac{\lambda_1}{2} \xi_1^2 + \frac{\lambda_2}{2} \xi_2^2 + \frac{1}{4} (A \xi_1^4 + 2B \xi_1^2 \xi_2^2 + C \xi_2^4) + o(|\xi|^4) + O(|\xi|^4)O(\delta), \quad (2.22)$$

где

$$\lambda_1 = \delta_1 - \delta_2, \quad \lambda_2 = \delta_1 - 4\delta_2, \\ A = \int_0^\pi e_1^4 dx = \frac{3}{2\pi}, \quad B = \int_0^\pi e_1^2 e_2^2 dx = \frac{3}{\pi}, \quad C = \int_0^\pi e_2^4 dx = \frac{3}{2\pi}.$$

Сократив функцию (2.22) на множитель $\frac{3}{2\pi}$, получим функцию с нормализованной главной частью:

$$\tilde{W}(\xi, \delta) = \tilde{U}(\xi, \delta) + o(|\xi|^4) + O(|\xi|^4)O(\delta),$$

где

$$\tilde{U}(\xi, \delta) = \frac{\tilde{\lambda}_1}{2} \xi_1^2 + \frac{\tilde{\lambda}_2}{2} \xi_2^2 + \frac{1}{4} (\xi_1^4 + 4\xi_1^2 \xi_2^2 + \xi_2^4).$$

«Геометрический сюжет» бифуркации критических точек и первые асимптотики ветвей бифурцирующих точек (по закритическим приращениям управляющих параметров) для функции $\tilde{W}(\xi, \delta)$ полностью определяются ее главной частью $\tilde{U}(\xi, \delta)$.

Главная часть ключевой функции представляет собой возмущенную двумерную сборку, четную по каждой переменной с коэффициентом двойного отношения $a > 2$. В этом случае появляются только следующие *bif*-расклады: $(1,0,0)$, $(2,1,0)$, $(2,2,1)$, $(4,4,1)$.

Таким образом, в случае фазовых состояний некоторых видов кристаллов реализуются те же *bif*-расклады, что и в случае балки на упругом основании (стационарное уравнение ФСЦ (2.9)).

2.4 Дополнительные замечания об исследовании фазовых состояний кристаллов

Сегнетоэлектрические фазовые состояния неоднородных кристаллов (в теории Ландау [48]) определяются решениями некоторых нелинейных дифференциальных уравнений, являющимися уравнениями Эйлера экстремалей функционалов энергии (при соответствующих краевых условиях). Нелинейность ДУ задается термодинамическим потенциалом Φ , форма которого определяется на основе опытных данных и общих теоретических соображений [48], [30].

Сегнетоэлектрические фазы некоторых «более общих» кристаллов определяются экстремалами функционала энергии

$$V(x) = \int_{\Omega} (|\text{grad } p|^2 + \Phi(p)) dV,$$

Где $p = (p_j(r))$ — так называемое поле векторов поляризации, Φ — термодинамический потенциал кристалла, рассматриваемого при каких-либо краевых условиях, связанных с рассматриваемой задачей. Экстремали данного функционала также можно исследовать, применив одну из схем конечномерной редукции, то есть переходом к ключевой функции $W(\xi)$, задаваемой формулой

$$W(\xi) := \inf_{p: q(p)=\xi} V(p), \quad (2.23)$$

где $q = (q_1, \dots, q_n)$, $\{q_j\}_{j=1}^n$ — набор гладких функционалов (ключевых параметров).

Подбор ключевых параметров осуществляется как с учетом «удобств в вычислениях», так и с учетом требований согласованности параметров с имеющейся симметрией.

Проведя точное или приближенное построение маргинального отображения $\varphi(\xi)$, мы получим ключевую функцию (точно или приближенно) $W(\xi) = V(\varphi(\xi))$, «отвечающую» за бифуркацию фазовых состояний.

Все топологические и аналитические понятия, так или иначе характеризующие тип стационарной точки (кратность, локальное кольцо особенности, версальная деформация, бифуркационная диаграмма и т.п.) для функционалов действия удобно вводить через ключевые функции. Наиболее типичными и часто встречаемыми в теории кристаллов особенностями ключевых функций, вызванными пересечением управляющими параметрами границ устойчивости основных состояний, являются многомерные сборки [25]–[28].

Рассмотрим вновь пример, связанный с модельным ОДУ четвертого порядка

$$\frac{d^4 p}{dx^4} + \varrho \frac{d^2 p}{dx^2} + \alpha p + p^3 = 0 \quad (2.24)$$

на отрезке $[0, \pi]$ числовой оси при краевых условиях

$$p(0) = \frac{d^2 p}{dx^2}(0) = p(\pi) = \frac{d^2 p}{dx^2}(\pi) = 0. \quad (2.25)$$

Отбор решений, соответствующих стабильным фазам, производится посредством правила Максвелла на основе функционала энергии

$$V(p, \varrho, \alpha) = \int_0^\pi \left(\frac{1}{2} \left(\left(\frac{d^2 p}{dx^2} \right)^2 + \varrho \left(\frac{dp}{dx} \right)^2 + \alpha p^2 \right) + \frac{p^4}{4} \right) dx. \quad (2.26)$$

Правило Максвелла: стабильному состоянию кристалла соответствует то решение задачи (2.24)–(2.25), которое реализуют глобальный минимум функционала энергии. Так называемым метастабильным состояниям соответствуют точки локальных минимумов.

Функционал (2.24) будем рассматривать на пространстве E функций класса C^4 на отрезке $[0, \pi]$, удовлетворяющих краевым условиям (2.25).

Бифуркации решений уравнения (2.24) при различных краевых условиях изучались многими специалистами в связи некоторыми задачами теории фазовых переходов в кристаллических сегнетоэлектриках. В большинстве известных нам работ рассматривались лишь случаи одномерных бифуркаций. Однако при некоторых значениях управляющих параметров в такого типа краевых задачах появляются 2-мерные вырождения, приводящие к конкурентному взаимодействию двух бифуркационных мод, что порождает интересные эффекты.

Стандартным (порождающим) решением задачи (2.24)-(2.25) является нулевая функция. После пересечения точкой (ϱ, α) характеристической линии (в плоскости управляющих параметров) нулевая функция теряет стабильность и рождается ненулевое стабильное состояние. Характеристические линии задаются через линеаризованное уравнение

$$\frac{d^4 h}{dx^4} + \varrho \frac{d^2 h}{dx^2} + \alpha h = 0 \quad (2.27)$$

(при краевых условиях вида (2.25)). Эти линии состоят из тех и только тех точек (ϱ, α) , для которых уравнение (2.27) имеет ненулевое решение. То есть, поиск нетривиальных решений линеаризованного уравнения приводит к характеристическому уравнению

$$\lambda^4 - \varrho \lambda^2 + \alpha = 0. \quad (2.28)$$

Учет краевых условий (2.25) с необходимостью приводит к соотношениям $\lambda^2 = -n^2$, $n = 1, 2, \dots$, из которых получаем, в силу (2.28), набор уравнений

$$\varrho = \frac{\alpha}{n^2} + n^2, \quad (2.29)$$

задающих характеристические прямые $l_1, l_2, \dots, l_n, \dots$. Огибающая кривая $\mathcal{L}$ семейства характеристических прямых ограничивает ту область значений вектора управляющих параметров, для которых функционал энергии имеет единственную точку минимума (в нуле). При пересечении движущейся точкой в плоскости управляющих параметров кривой $\mathcal{L}$ происходит бифуркация рождения нетривиального стабильного состояния. Кривая $\mathcal{L}$ является ломаной, звеньями которой служат отрезки $\mathcal{L}_n$,

соединяющие точки d_n и d_{n+1} , где $d_n = (\varrho_n, \alpha_n)$, $\alpha_n = n^2(n+1)^2$, $\varrho_n = n^2 + (n+1)^2$ (при этом полагаем: $d_0 = (0, 1)$). В точке d_n пересекается пара прямых l_n, l_{n+1} ($n \geq 1$). В этой же точке происходит обмен ведущих мод бифуркаций. Пересечение в плоскости управляющих параметров отрезка $\mathcal{L}_n$ по внутренней точке приводит к одномерной бифуркации с модой

$$e_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nx).$$

Пересечение же $\mathcal{L}$ по точке излома d_n приводит к двумерной бифуркации с модами e_n, e_{n+1} .

Ниже рассмотрена лишь точка d_1 (при $n \geq 2$ результаты аналогичны).

Анализ бифуркационных эффектов, происходящих при локализации (управляющих параметров) $\alpha = \alpha_1 + \delta_1$, $\varrho = \varrho_1 + \delta_2$ можно осуществить посредством редукции Ляпунова-Шмидта к ключевой функции (от двух ключевых переменных)

$$\begin{aligned} W(\xi, \delta) &= \inf_{p: \langle p, e_1 \rangle = \xi_1, \langle p, e_2 \rangle = \xi_2} V(p, \alpha_1 + \delta_1, \alpha_1 + \delta_2), \\ \xi &= (\xi_1, \xi_2), \quad \delta = (\delta_1, \delta_2). \end{aligned} \quad (2.30)$$

Хорошо известно, что при рассматриваемых здесь условиях функция $W(\xi, \delta)$ является гладкой. Более того, эта функция наследует все аналитические и топологические свойства V (на E). В частности, при достаточно малых δ существует взаимно однозначное соответствие между критическими точками V и W , сохраняющее их типы (кратности, значения индекса Морса и т.п.).

Так как функционал V четен: $V(-p, \varrho, \alpha) \equiv V(p, \varrho, \alpha)$ и симметричен относительно инволюции $I_1 : p(x) \mapsto p(\pi - x)$, то V инвариантен относительно действия группы $\mathbf{Z}_2^2$, заданного парой инволюций I_1, I_2 , где $I_2 = -I_1$. Для этой пары инволюций выполняются соотношения

$$I_1(e_1) = e_1, \quad I_2(e_2) = e_2, \quad I_1(e_2) = -e_2, \quad I_2(e_1) = -e_1.$$

Следовательно, функция (2.30) имеет симметрию прямоугольника:

$$W(-\xi_1, \xi_2, \delta_1, \delta_2) = W(\xi_1, -\xi_2, \delta_1, \delta_2) = W(\xi_1, \xi_2, \delta_1, \delta_2), \quad (2.31)$$

из которой вытекает справедливость асимптотического представления

$$W(\xi, \delta) = U(\xi, \delta) + o(|\xi|^4) + O(|\xi|^4)O(\delta), \quad (2.32)$$

где $U(\xi, \delta) = V(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2, \delta)$ — ритцевская аппроксимация функционала V по модам e_1, e_2 . Таким образом, для ключевой функции (2.30) имеет место асимптотическое представление

$$W(\xi, \delta) = \frac{\lambda_1}{2} \xi_1^2 + \frac{\lambda_2}{2} \xi_2^2 + A \xi_1^4 + 2B \xi_1^2 \xi_2^2 + C \xi_2^4 + \\ + o(|\xi|^4) + O(|\xi|^4)O(\delta), \quad (2.33)$$

где

$$\lambda_1 = \delta_1 - \delta_2, \quad \lambda_2 = \delta_1 - 4\delta_2, \\ A = \int_0^\pi e_1^4 dx = \frac{3}{2\pi}, \quad B = \int_0^\pi e_1^2 e_2^2 dx = \frac{3}{\pi}, \quad C = \int_0^\pi e_2^4 dx = \frac{3}{2\pi}.$$

Сократив функцию W на множитель $\frac{6}{\pi}$, получим функцию с нормализованной главной частью:

$$\tilde{W}(\xi, \delta) = \tilde{U}(\xi, \delta) + o(|\xi|^4) + O(|\xi|^4)O(\delta),$$

где

$$\tilde{U}(\xi, \delta) = \frac{\tilde{\lambda}_1}{2} \xi_1^2 + \frac{\tilde{\lambda}_2}{2} \xi_2^2 + \frac{1}{4} (\xi_1^4 + 4\xi_1^2 \xi_2^2 + \xi_2^4).$$

«Геометрический сюжет бифуркации» критических точек и первые асимптотики ветвей бифурцирующих точек (по закритическим приращениям управляющих параметров) для функции $\tilde{W}(\xi, \delta)$ полностью определяются ее главной частью $\tilde{U}(\xi, \delta)$. Критические точки $\tilde{U}(\xi, \delta)$ определяются системой уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \xi_1} &= \tilde{\lambda}_1 \xi_1 + \xi_1^3 + 2\xi_1 \xi_2^2 = 0, \\ \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \xi_2} &= \tilde{\lambda}_2 \xi_2 + 2\xi_1^2 \xi_2 + \xi_2^3 = 0, \end{aligned} \right\}$$

все решения которой делятся на три типа:

- 1) 0-решение $\xi_1 = \xi_2 = 0$,
- 2) 1-модовые решения $\xi_1 = \pm \sqrt{-\tilde{\lambda}_1}$ ($\lambda_1 < 0$), $\xi_2 = 0$ и $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = \pm \sqrt{-\tilde{\lambda}_2}$ ($\lambda_2 < 0$),

3) 2-модовые решения $\xi_1 = \pm\sqrt{\frac{\tilde{\lambda}_1 - 2\tilde{\lambda}_2}{3}}$, $\xi_2 = \pm\sqrt{\frac{\tilde{\lambda}_2 - 2\tilde{\lambda}_1}{3}}$, ($\tilde{\lambda}_1 - 2\tilde{\lambda}_2 > 0$, $\tilde{\lambda}_2 - 2\tilde{\lambda}_1 > 0$).

Пусть $\theta_1 = \tilde{\lambda}_1 - 2\tilde{\lambda}_2$, $\theta_2 = \tilde{\lambda}_2 - 2\tilde{\lambda}_1$. Так как матрица Гессе функции $\tilde{U}$ представима в виде

$$\begin{pmatrix} \tilde{\lambda}_1 + 3\xi_1^2 + 2\xi_2^2 & 4\xi_1\xi_2 \\ 4\xi_1\xi_2 & \tilde{\lambda}_2 + 2\xi_1^2 + 3\xi_2^2 \end{pmatrix},$$

то, как нетрудно проверить, при $\theta_1 > 0$ и $\theta_2 > 0$ существуют четыре 2-модовые критические точки индекса 1. Все 1-модовые точки при этом являются точками локальных минимумов, а нуль — критической точкой индекса 2. Рождение 1-модовых критических точек происходит при переходах параметров $\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2$ в области отрицательных значений.

Бифуркационная диаграмма (каустика) $\Sigma_{\tilde{U}}$ функции $\tilde{U}$ разбивает плоскость управляющих параметров на шесть зон

$$\omega_0 = \{\tilde{\lambda}_1 > 0, \tilde{\lambda}_2 > 0\},$$

$$\omega_1 = \{\tilde{\lambda}_1 < 0, \tilde{\lambda}_2 > 0\},$$

$$\omega_2 = \{\tilde{\lambda}_1 > 0, \tilde{\lambda}_2 < 0\},$$

$$\omega_3 = \{\tilde{\lambda}_1 < 0, \tilde{\lambda}_2 < 0, \theta_1 < 0, \theta_2 > 0\},$$

$$\omega_4 = \{\tilde{\lambda}_1 < 0, \tilde{\lambda}_2 < 0, \theta_1 > 0, \theta_2 < 0\},$$

$$\omega_5 = \{\tilde{\lambda}_1 < 0, \tilde{\lambda}_2 < 0, \theta_1 > 0, \theta_2 > 0\}.$$

Каждой зоне соответствует свой расклад (*bif*-расклад) бифурцирующих критических точек:

параметрам из зоны ω_0 отвечает случай единственной критической точки (точка минимума в нуле),

для ω_1, ω_2 — пара симметрично расположенных (относительно нуля) 1-модовых точек минимума и седло в нуле,

для ω_3, ω_4 — пара симметрично расположенных 1-модовых точек минимума, пара 1-модовых седел и точка локального максимума в нуле,

для ω_5 — четверка симметрично расположенных 1-модовых точек минимума, четверка 2-модовых седел и точка локального максимума в нуле.

На основании проведенного исследования главной части ключевой функции можно сделать выводы о локальном топологическом строении исходного функционала и о бифуркациях его экстремалей.

Заметим, что для ключевой функции W можно подобрать такие параметры

$$\tilde{\theta}_1 = \tilde{\lambda}_1 - 2\tilde{\lambda}_2 + o(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2), \quad \tilde{\theta}_2 = \tilde{\lambda}_2 - 2\tilde{\lambda}_1 + o(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2),$$

в которых разбиение плоскости параметров каустикой Σ_W функции W на шесть зон $\tilde{\omega}_0, \tilde{\omega}_1, \dots, \tilde{\omega}_5$ аналогично разбиению на зоны ω_k пространства параметров для главной части ключевой функции U из предыдущего пункта. При этом $\tilde{\omega}_0 = \omega_0$, $\tilde{\omega}_1 = \omega_1$, $\tilde{\omega}_2 = \omega_2$, а $\tilde{\omega}_3, \tilde{\omega}_4$ и $\tilde{\omega}_5$ описываются теми же соотношениями, которыми описаны множества ω_3, ω_4 и ω_5 , но с заменой в них функций θ_1 и θ_2 на $\tilde{\theta}_1$ и $\tilde{\theta}_2$. Каждой зоне $\tilde{\omega}_k$ также соответствует свой *bif*-расклад критических точек, изображаемый тем же графом, которым ранее был изображен соответствующий *bif*-расклад для функции U . Факт существования таких параметров $\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2$ — следствие теорем об изоморфности миниверсальных деформаций особенности [3], [11].

Таким образом, при локализации управляющих параметров в точке $(4, 5)$ ($\alpha = 4 + \delta_1$, $\varrho = 5 + \delta_2$) достаточно малая окрестность этой точки разбивается на шесть перечисленных выше зон $\tilde{\omega}_0, \tilde{\omega}_1, \dots, \tilde{\omega}_5$, которым отвечают *bif*-расклады критических точек функционала V .

При переходе точки плоскости управляющих параметров через линию $\mathbf{m} = \{\tilde{\lambda}_1 = \tilde{\lambda}_2 > 0\}$ происходит фазовый переход первого рода. Во всех зонах стабильные фазовые состояния являются 1-модовыми и представляются в виде

$$\pm \sqrt{\frac{\delta_1 - \delta_2}{3}} \sin(x) + o(\delta_1, \delta_2)$$

или

$$\pm \sqrt{\frac{\delta_1 - 4\delta_2}{3}} \sin(2x) + o(\delta_1, \delta_2).$$

2.5 Угловые особенности гладких функций в анализе ветвлений периодических экстремалей

В данном разделе рассмотрена модельная задача, которой отвечает ключевая функция с круговой симметрией на шестимерном пространстве (функция, инвариантная относительно полусвободного действия окружности на $\mathbb{R}^6$). Показано, что анализ такой функции сводится к анализу некоторой функции в положительном октанте трехмерного координатного пространства. Рассмотрен случай 3-модовой бифуркации в вершине трехгранного угла. Дан также краткий обзор результатов (в основном, авторов статьи и их ближайших коллег) по изучению ветвления критических точек гладкого функционала в угловой точке минимума с омбилической особенностью. Сформулированы правила допустимости расклада бифурцирующих экстремалей гладкого функционала в угловой точке минимума.

Широко известно, что стационарные состояния многих физических сред определяются решениями нелинейных дифференциальных уравнений, являющихся уравнениями Эйлера экстремалей функционалов энергии при периодических краевых условиях.

Например, некоторые сегнетоэлектрические фазовые состояния неоднородных кристаллов (в теории Ландау [48]) определяются вариационными периодическими задачами, в которых нелинейность задается термодинамическими потенциалами. Их аналитическая форма определяется на основе опытных данных и общих теоретических соображений [30], [48].

В качестве простейшей модели рассмотрим функционал энергии с неоднородностью вдоль оси $0Z$ и с трехкомпонентным вектором состояния:

$$V(w, \lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{L} dz, \quad \mathcal{L} \left(\frac{\partial w}{\partial z}, w \right) := \frac{1}{2} \left(\left| \frac{\partial w}{\partial z} \right|^2 - \Pi(w) \right), \quad (2.34)$$

$$\begin{aligned} \Pi = & |w|^6 + \beta |w|^4 + \alpha |w|^2 + \\ & + q_1 (w_1^2 w_2^2 + w_1^2 w_3^2 + w_2^2 w_3^2) |w|^2 + q_2 w_1^2 w_2^2 w_3^2 + \varkappa (w_1^2 w_2^2 + w_1^2 w_3^2 + w_2^2 w_3^2) \end{aligned}$$

— модельный потенциал, $w := (w_1, w_2, w_3)$, $\lambda = (\alpha, \beta, q_1, q_2, \varkappa)$. Компоненты λ — некоторые физические константы, $w = (w_1, w_2, w_3)$ — параметр состояния. Область определения функционала (2.34) — пространство E , состоящее из 2π —периодических функций класса C^4 со значениями в $\mathbb{R}^3$.

Метод Ляпунова-Шмидта позволяет в естественных условиях заменить изучение функционала V анализом ключевой функции [28]

$$W(\xi, \lambda) = \inf_{w: \langle w, e_k \rangle = \xi_k} V(w, \lambda), \quad (2.35)$$

$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, где e_k — мода бифуркации, $k \leq 6$. Для того, чтобы прояснить существование, взаимные примыкания стабильных и метастабильных фаз, а также выяснить условия фазовых переходов, необходимо вычислить не только точки локальных и глобальных минимумов функционала энергии (2.34), но и седловые точки. Более того, требуется информация о структуре фазового портрета динамической системы $\dot{w} = -\text{grad } V(w)$ (здесь градиент задан скалярным произведением $\langle p, q \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \langle p, q \rangle dz$). Если известна ключевая функция W , то эта структура определяется фазовым портретом W (фазовым портретом градиентной динамической системы $\dot{\xi} = -\text{grad } W(\xi)$).

Анализ ключевой функции в обсуждаемой здесь задаче приводит, в свою очередь, к задаче изучения поведения гладких функционалов вблизи угловых особых точек края многообразия. К анализу функций вблизи угловых точек приходится обращаться как в пределах «чистого анализа» (в теории особенностей гладких функционалов), так и в смежных областях — в теории управления, теории фазовых переходов, теории бифуркаций периодических волн и т.д. Один из подходов к изучению угловых особенностей основан на специализированных конечномерных редукциях, приспособленных для случая угловых особенностей. Приспособление состоит в том, что ключевые параметры выбираются согласованными с ограничениями в виде неравенств, задающих край в окрестности угловой точки. Простейший способ такого согласования — включение системы ограничений в систему ключевых параметров.

Общая схема анализа краевых и угловых особенностей гладких функций и их разверток была создана усилиями В.И. Арнольда, С.Т.С. Уолла, Д. Сирсмы, Д. Пита, Т. Постона и др. (см. [3], [62], [86]). В.И. Арнольдом был сформулирован принцип отождествления краевых особенностей с особенностями, инвариантными относительно действия элементарной инволюции (инволюция элементарна, если коразмерность ее зеркала равна единице). Этот принцип позволил перенести понятие краевой особенности на комплексный случай и развить соответствующую теорию. Затем Д. Сирсмой была развита теория угловых особенностей [86], как обобщение теории краевых особенностей. Дальнейшее развитие эта теория получила в работах В.А. Васильева, А.А. Давыдова, В.И. Матова и др. [3]

Перенос теории угловых особенностей на класс фредгольмовых функционалов был осуществлен Ю.И. Сапроновым посредством вариационной версии метода Ляпунова–Шмидта [28]. Сравнительно недавно Ю.И. Сапроновым, А.В. Гнездиловым, О.Ю. Даниловой, О.В. Швыревой, М.А. Хуссаином, А.В. Белоглазовым и И.В. Колесниковой был проанализирован ряд важных бифуркационных задач в угловых особых точках, связанных с приложениями к задачам механики сплошных сред и математической физики [5], [28], [36], [64]. Выяснилось, что ряд внешне различных краевых задач приводит в конечном итоге к одной и той же задаче — изучению ветвления критических точек параметрического семейства многочленов от переменных $\xi_1, \dots, \xi_n$ в положительном октанте координатного пространства $\mathbb{R}^n$. Список примеров такого рода постоянно растет.

Опишем кратко теоретические основы анализа угловых особенностей. Пусть функционал $V(w, \lambda)$ задан при ограничениях на основную переменную в виде m неравенств, задающих неособо пересекающиеся гладкие поверхности и выделяющих m -гранный угол: $\mathcal{C} = \{w \in E \mid g_i(w) \geq 0, i = 1, \dots, m\}$. В случае $m = 1$ (одного неравенства) получаем так называемую краевую особенность. Точка $a \in \mathcal{C}$ называется условно критической для гладкого функционала $V(w, \lambda)$, если $\text{grad}_H V(0)$ ортогонален грани $\mathcal{C}$, содержащей a . Число элементов носителя $\text{supp}(a) = \{k \in$

$\{1, \dots, m\} | g_k(a) \neq 0\}$ (приведенная размерность минимальной грани угла, содержащей эту точку) называется порядком точки a .

Анализ поведения $V(w, \lambda)$ можно проводить на основе перехода к ключевой функции

$$W(\xi) = \inf_{w: g(w)=\xi} V(w)$$

в какой-либо схеме конечномерной редукции. Здесь $g(w) = (g_1, \dots, g_n)$, $\{g_i\}_{i=1}^n$ — набор независимых гладких функционалов (ключевых параметров), включающий в себя семейство ограничителей $\{g_k\}_{k=1}^m$ (определяющих угол). Функционалы $g_i(w)$ подчинены, как правило, дополнительным условиям технического характера. Предполагается, что $\text{grad}_H g_i(w) \in F \ \forall w \in E$. и что вблизи нуля в каждом слое $g^{-1}(\xi)$ существует единственная (морсовская) экстремаль $\varphi(\xi)$. Тогда исследование V в угле $\mathcal{C}$ сводится к исследованию функции W в координатном угле $\xi_j \geq 0, \ j = 1, \dots, m$.

Кратность μ условно критической точки $w_0 \in \mathcal{C}$ определяется как размерность фактор-алгебры $Q(W, a) = \mathbb{R}[[\xi - a]]/\mathcal{T}(W, a)$, где a — образ w_0 в пространстве ключевых переменных, $\mathbb{R}[[\xi - a]]$ — алгебра формальных степенных рядов от $\xi - a$, а $\mathcal{T}(W, a)$ — угловой якобиев идеал в $\mathbb{R}[[\xi - a]]$, порожденный двумя следующими наборами функций (тейлоровскими разложениями этих функций): $\left\{ \frac{\partial W}{\partial \xi_i} \right\}, \left\{ \xi_k \frac{\partial W}{\partial \xi_k} \right\}, \ i, k \in \text{supp}(a)$. Точка, для которой $\mu = 1$, называется простой или регулярной.

Подмногообразие $\mathcal{N}$, состоящее из точек $\varphi(\xi)$ (см. (1.25)), называется редуцирующим. Ключевая функция представляет собой сужение функционала V на редуцирующее подмногообразие.

Пусть $\hat{M} \in E \times \mathbb{R}^q$ — многообразие катастроф, то есть $\hat{M} = M_0 \cup M_1 \cup \dots \cup M_m$, где M_k определяется соотношениями: $f(w, \lambda) = 0, \ w \in \mathcal{C}_k, \ \dim \text{Ker} \frac{\partial [f]_k}{\partial w}(w, \lambda) > 0$. Здесь $\mathcal{C}_k$ — совокупность граней угла $\mathcal{C}$ приведенной размерности k , $\mathcal{C}_0$ — вершинная грань угла, а $[f]_k = \text{grad}_H (V|_{\mathcal{C}_k})$.

Каустика Σ является образом многообразия катастроф относительно канонической проекции $\pi : E \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^q, \ \Sigma = \pi(\hat{M})$. Если известна оценка сверху числом d значений индексов Морса всех бифурцирующих экстремалей, то каждый *bif*-расклад описывается матрицей $L = (l_k^j)$,

в которой элемент l_k^j совпадает с количеством критических точек (углового) индекса k на j -мерных гранях (в приведенном смысле: $m - j$ — коразмерность грани). Как обычно, версальные деформации угловых особенностей содержат информацию о всех метаморфозах, происходящих при всевозможных гладких деформированиях функции — о перестройках поверхностей уровня, расклейках и склейках особых точек, о различных бифуркационных эффектах и т.д., и поэтому они играют центральную роль в теории угловых особенностей (как и в теории обычных особенностей).

В угловом случае версальная деформация определяется как функция $V(w, \lambda)$, для которой совокупность ростков функций $\frac{\partial V}{\partial \lambda_j}(w, 0)$ (начальных скоростей деформации) дает систему линейных образующих в угловом кольце особенности $\hat{Q}_0(V)$. Если эта совокупность является базисом $\hat{Q}_0(V)$, то деформация называется миниверсальной. Если вместо кольца ростков гладких функций использовать максимальный (в нем) идеал и профакторизовать его по угловому якобиеву идеалу, то получим усеченное угловое локальное кольцо $\hat{Q}_0^*(V)$. Деформация $V(w, \lambda)$, для которой $V(w, 0) = 0$ и совокупность ростков функций $\frac{\partial V}{\partial \lambda_j}(w, 0)$ образует базис $\hat{Q}_0^*(V)$, называется ограниченной миниверсальной деформацией. Каустика такой деформации называется главной и обозначается Σ (чаще всего каустикой особенности называют главную каустическую).

2.6 Ветвление периодических экстремалей вблизи критической фазы с 6-мерным вырождением

Легко заметить, что группа G симметрий исходного функционала (2.34) порождена преобразованиями

$$g_1 : \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}, \quad g_2 : \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} w_1 \\ -w_2 \\ w_3 \end{pmatrix},$$

$$g_3 : \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ -w_3 \end{pmatrix}, \quad g_\omega : \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} w_\omega(1) \\ w_\omega(2) \\ w_\omega(3) \end{pmatrix}, \quad \forall \omega \in S_3,$$

$$g_4 : \begin{pmatrix} w_1(z) \\ w_2(z) \\ w_3(z) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} w_1(-z) \\ w_2(-z) \\ w_3(-z) \end{pmatrix}, \quad J_\varphi : \begin{pmatrix} w_1(z) \\ w_2(z) \\ w_3(z) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} w_1(z + \varphi) \\ w_2(z + \varphi) \\ w_3(z + \varphi) \end{pmatrix},$$

$\forall \varphi \in \mathbb{R}$, S_3 — группа перестановок третьего порядка.

При некоторой локализации параметров получим в нуле 6-мерное вырождение со следующими модами бифуркации:

$$e_1 = \begin{pmatrix} c(z) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} s(z) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ c(z) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ s(z) \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$e_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c(z) \end{pmatrix}, \quad e_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ s(z) \end{pmatrix},$$

где

$$c(z) = \sqrt{2} \cos(z), \quad s(z) = \sqrt{2} \sin(z).$$

В линейной оболочке $\mathcal{N} = \text{Span}(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6)$, естественно отождествляемой с $\mathbb{R}^6$ (пространством ключевых параметров), индуцируется действие группы G . Полученный сужением образ этой группы в $SO(6)$ также обозначим G . Нетрудно убедиться в том, что действие группы G в $\mathbb{R}^6$ порождено матрицами

$$U_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad U_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$U_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad U_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

U_ω — матрица оператора

$$(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2, \xi_3, \eta_3) \mapsto (\xi_{\omega(1)}, \eta_{\omega(1)}, \xi_{\omega(2)}, \eta_{\omega(2)}, \xi_{\omega(3)}, \eta_{\omega(3)}),$$

$$U_\varphi = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}.$$

Теорема 2.2. *Ключевая функция*

$$W(\xi) := \inf_{w: g(w)=\xi} V(x), \quad \xi \in \mathbb{R}^6, \quad (2.36)$$

где $g(w) = (g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6)$, $g_j(w) := \langle w, e_j \rangle$ ($\langle w, e_j \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} w e_j dx$), наследует симметрию функционала V : функция W инвариантна относительно действия G на $\mathbb{R}^6$.

Доказательство этой теоремы несложно провести, если воспользоваться общими теоремами о наследовании симметрий ключевыми функциями [28].

Если воспользоваться тейлоровским разложением ключевых функций [28] и указанной выше симметрией, то получим следующее утверждение.

Теорема 2.3. *Ключевая функция $W(\xi)$ имеет (с точностью до общего множителя и масштабирующих преобразований аргумента) следующий вид: $(I_1 + I_2 + I_3)^3 + \varepsilon(I_1 + I_2 + I_3)^2 + \delta(I_1 + I_2 + I_3) + \gamma_1(I_4^2 + I_5^2 + I_6^2) +$*

$\gamma_2 (I_7^2 + I_8^2 + I_9^2) + (p_1 (I_4^2 + I_5^2 + I_6^2) + p_2 (I_7^2 + I_8^2 + I_9^2)) (I_1 + I_2 + I_3) + q_1 I_1 I_2 I_3 + q_2 I_4 I_5 I_6 + O(|\xi|^8)$, где $I_1, \dots, I_9$ — образующие инварианты действия окружности $z \longrightarrow \exp(i\varphi)z$ (вектор $\xi \in \mathbb{R}^6$ отождествлен с комплексным вектором $z = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3$, $z_1 = \xi_1 + i\xi_2$, $z_2 = \xi_3 + i\xi_4$, $z_3 = \xi_5 + i\xi_6$):

$$I_1 = \xi_1^2 + \xi_2^2, \quad I_2 = \xi_3^2 + \xi_4^2, \quad I_3 = \xi_5^2 + \xi_6^2,$$

$$I_4 = \xi_1 \xi_3 + \xi_2 \xi_4, \quad I_5 = \xi_3 \xi_5 + \xi_4 \xi_6, \quad I_6 = \xi_5 \xi_1 + \xi_6 \xi_2,$$

$$I_7 = -\xi_1 \xi_4 + \xi_2 \xi_3, \quad I_8 = -\xi_3 \xi_6 + \xi_4 \xi_5, \quad I_9 = -\xi_5 \xi_2 + \xi_6 \xi_1.$$

Коэффициенты $\varepsilon, \delta, \gamma_k, q_k$ допускают явные выражения через коэффициенты $\beta, \alpha, q, \varkappa$. При этом $\varepsilon, \delta, \gamma_k = O(\beta, \alpha, \varkappa)$.

Доказательство легко провести, если заметить, что образующей системой инвариантов действия группы $\mathcal{G}$ является набор следующих многочленов:

$$J_1 = I_1 + I_2 + I_3, \quad J_2 = I_4^2 + I_5^2 + I_6^2, \quad J_3 = I_7^2 + I_8^2 + I_9^2, \quad J_4 = I_1 I_2 I_3, \quad J_5 = I_4 I_5 I_6.$$

После введения полярных координат $z_1 = r_1 e^{i\psi_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\psi_2}$, $z_3 = r_3 e^{i\psi_3}$ получим функцию в форме $U = \tilde{U} + O(|\xi|^8)$, где

$$\begin{aligned} \tilde{U} &= J_1^3 + \varepsilon J_1^2 + \delta J_1 + \gamma_1 J_2 + \gamma_2 J_3 + (p_1 J_2 + p_2 J_3) J_1 + q_1 J_4 + q_2 J_5 = \\ &= \sigma_1^3 + \varepsilon \sigma_1^2 + \delta \sigma_1 + \\ &+ \gamma_1 (r_1^2 r_2^2 \cos^2(\psi_1 - \psi_2) + r_2^2 r_3^2 \cos^2(\psi_2 - \psi_3) + r_3^2 r_1^2 \cos^2(\psi_3 - \psi_1)) + \\ &+ \gamma_2 (r_1^2 r_2^2 \sin^2(\psi_1 - \psi_2) + r_1^2 r_3^2 \sin^2(\psi_2 - \psi_3) + r_1^2 r_3^2 \sin^2(\psi_3 - \psi_1)) + \\ &+ (p_1 (r_1^2 r_2^2 \cos^2(\psi_1 - \psi_2) + r_2^2 r_3^2 \cos^2(\psi_2 - \psi_3) + r_1^2 r_3^2 \cos^2(\psi_3 - \psi_1)) + \\ &+ p_2 (r_1^2 r_2^2 \sin^2(\psi_1 - \psi_2) + r_1^2 r_3^2 \sin^2(\psi_2 - \psi_3) + r_3^2 r_1^2 \sin^2(\psi_3 - \psi_1))) \sigma_1 + \\ &+ q_1 \sigma_3 + q_2 \cos(\psi_1 - \psi_2) \cos(\psi_2 - \psi_3) \cos(\psi_3 - \psi_1) \sigma_3 + O(|r|^8). \end{aligned}$$

Здесь и ниже $\sigma_1 = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2$, $\sigma_2 = r_1^2 r_2^2 + r_2^2 r_3^2 + r_1^2 r_3^2$, $\sigma_3 = r_1^2 r_2^2 r_3^2$.

Стационарные по ψ_j точки для (огрубленной) функции $\tilde{U}$ находятся из уравнения $\frac{\partial \tilde{U}}{\partial \psi_j} = 0$. Ясно, что эти точки определяются нулями функций $\cos(\psi_j - \psi_k)$, $\sin(\psi_j - \psi_k)$. Нетрудно заметить, что, например, следующие подмножества являются квазиинвариантными подмногообразиями [68, 69] для этой функции:

$$\mathcal{M}_0 := \{\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3\}, \quad \mathcal{M}_1 := \{\varphi_1 - \varphi_2 = \varphi_2 - \varphi_3 = \varphi_3 - \varphi_1 = \pi/2\}.$$

Сузив $\tilde{U}$ на $\mathcal{M}_0$ или $\mathcal{M}_1$, получим (редуцированную) функцию вида

$$W = \sigma_1^3 + \varepsilon \sigma_1^2 + \delta \sigma_1 + p \sigma_1 \sigma_2 + \gamma \sigma_2 + q \sigma_3, \quad (2.37)$$

анализ которой можно осуществить посредством дополнительных (вторичных) редукций.

2.7 Некоторые запреты для bif -раскладов

Пусть W — функция вида (2.37) с условием конечнократности (автоматически 125-кратной) в нуле старшей однородной части (порядка 6). Данное предположение означает, что $q \neq 0$. Через $\mathcal{L} = (l_0, l_1, l_2, l_3)$ обозначим bif -расклад (количества минимумов, седел индекса (Морса) 1, седел индекса 2 и количество максимумов). Из формулы Эйлера следует, что для максимального расклада (125 критических точек) имеют место соотношения $l_1 + l_3 = 62$, $l_0 + l_2 = 63$.

Сформулируем ряд правил, упрощающих поиск bif -раскладов экстремалей в случае угловых особенностей (см. [35]-[37]).

Правило 1. *Бифурцирующие (из нуля) критические точки функции (2.37) могут располагаться лишь на координатных осях $r_j = r_k = 0$, на диагональных осях $r_1 = \pm r_2 = \pm r_3$ и на диагональных плоскостях $r_j = \pm r_k$.*

Доказательство. Так как $\frac{\partial W}{\partial r} = \frac{\partial W}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial r}$, $\det \left(\frac{\partial \sigma}{\partial r} \right) = 8r_1 r_2 r_3 (r_1^2 - r_2^2)(r_1^2 - r_3^2)(r_2^2 - r_3^2)$ и $\frac{\partial W}{\partial \sigma} = (3\sigma_1^2 + 2\varepsilon \sigma_1 + \delta + p \sigma_2, p \sigma_1 + \gamma, q) \neq 0$, то критические точки могут появляться лишь при условии $r_1 r_2 r_3 (r_1^2 - r_2^2)(r_1^2 - r_3^2)(r_2^2 - r_3^2) = 0$, эквивалентном утверждению теоремы.

Правило 2. Если старшая часть функции (2.37) принимает в нуле строго минимальное значение, то $p > -4$ и $27 + 9p + q > 0$.

Доказательство. Для старшей части W_0 имеем $W_0 = \sigma_1^3 + p \sigma_1 \sigma_2 + q \sigma_3 = \sigma_1(\sigma_1^2 + p \sigma_2) + q \sigma_3$. Так как $\sigma_1 \geq 0$, то проверка первого утверждения теоремы сводится к проверки положительности сужения W_0 на координатную плоскость $r_3 = 0$, то есть положительной определенности кватерничной формы $\sigma_1^2 + p \sigma_2 = r_1^4 + r_2^4 + ar_1^2 + r_2^2$, $a = 2 + p$, которая положительна тогда и только тогда, когда $a > -2$.

Второе утверждение получается посредством проверки положительной определенности сужения W_0 на диагональ $r_1 = r_2 = r_3$.

Правило 3. Если $\mathcal{L}$ — максимальный *bif*–расклад для *min*–особенности шестого порядка, то для соответствующей возмущенной функции W начало координат является точкой локального минимума.

Доказательство проводится через рассмотрение сужений $W|_{r_k=0}$. В случае максимального расклада соответствующие расклады критических точек для $W|_{r_k=0}$ также будут максимальными. Следовательно, $\frac{\partial^2 W}{\partial r_k^2}(0) > 0 \quad \forall k$ (для функции с симметрией квадрата $\frac{\partial^2 W}{\partial r_1 \partial r_2}(0) = 0$).

Правило 4. Если $\mathcal{L}$ — *bif*–расклад для *min*–особенности шестого порядка на $\mathbb{R}^3$, то на каждой из полуосей координат и на диагональных полуосях существует не более двух ненулевых критических точек.

Если на одной из таких полуосей имеется пара ненулевых критических точек, то эти точки разнотипны (с различными значениями индекса Морса).

Доказательство. Первое утверждение проверяется через рассмотрение сужений $W|_{r_k=0}$. Невозможность существования на каждой оси пары минимумов или максимумов также проверяется через рассмотрение таких сужений.

Запрет на существование пары минимумов или пары максимумов очевиден. Менее очевиден случай пары седел. Предположим противное: пусть на положительной полуоси $r_2 = r_3 = 0, r_1 \geq 0$ имеется пара ненулевых седел (или, что эквивалентно, имеется четыре седла на всей оси $r_2 = 0$).

В случаях остальных осей рассуждения аналогичны. Для критической точки на данной оси координат выполняется соотношение

$$\frac{\partial W}{\partial r_1}(r_1, 0, 0) = 2r_1(3r_1^4 + 2\varepsilon r_1^2 + \delta) = 0. \quad (2.38)$$

Следовательно, $r_1^2 = -\frac{\varepsilon}{3} \pm \frac{1}{3}\sqrt{\varepsilon^2 - 3\delta}$, $\varepsilon < 0$, $\delta < \frac{\varepsilon^2}{3}$. В случае левого корня ($r_1^2 = -\frac{\varepsilon}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{\varepsilon^2 - 3\delta}$) имеем (в силу предположения противного) $\frac{\partial^2 W}{\partial r_2^2} \frac{\partial^2 W}{\partial r_3^2} > 0$, а в случае правого ($r_1^2 = -\frac{\varepsilon}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{\varepsilon^2 - 3\delta}$) выполнено неравенство $\frac{\partial^2 W}{\partial r_2^2} \frac{\partial^2 W}{\partial r_3^2} < 0$. Так как $\frac{\partial^2 W}{\partial r_k^2}(r_1, 0) = 2((3+p)r_1^4 + (\varepsilon + \gamma)r_1^2 + \delta)$, $k > 1$, то, в силу (2.38), для одной из осей получим $pr_1^2 + \gamma - \varepsilon > 0$ для левого корня и $pr_1^2 + \gamma - \varepsilon < 0$ — для правого. Или, соответственно, $\frac{p}{3}(-\varepsilon - \sqrt{\varepsilon^2 - 3\delta}) + \gamma - \varepsilon > 0$ и $\frac{p}{3}(-\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - 3\delta}) + \gamma - \varepsilon < 0$. После вычитания неравенств получим при $p > 0$ (случай $p < 0$ сводится к $p > 0$ поворотом осей на угол $\pi/4$) противоречивое неравенство $p\sqrt{\varepsilon^2 - 3\delta} < 0$.

2.8 Редукция к функции на плоской треугольной области

Как было указано выше, главная часть $\tilde{U}$ ключевой функции принимает после вторичной редукции следующий вид: $\sigma_1^3 + \varepsilon \sigma_1^2 + \delta \sigma_1 + p \sigma_1 \sigma_2 + \gamma \sigma_2 + q \sigma_3$,

$$\sigma_1 = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2, \quad \sigma_2 = r_1^2 r_2^2 + r_1^2 r_3^2 + r_2^2 r_3^2, \quad \sigma_3 = r_1^2 r_2^2 r_3^2.$$

После подстановки $r_1 = r \cos(\varphi_1)$, $r_2 = r \cos(\varphi_2)$, $r_3 = r \cos(\varphi_3)$ (здесь $\sum_j \cos^2(\varphi_j) = 1$) получим $\sigma_1 = r^2$,

$$\sigma_2 = r^4 (\cos^2(\varphi_1) + \cos^2(\varphi_2) - \cos^4(\varphi_1) - \cos^4(\varphi_2) - \cos^2(\varphi_1) \cos^2(\varphi_2)),$$

$$\sigma_3 = r^6 (\cos^2(\varphi_1) \cos^2(\varphi_2) - \cos^2(\varphi_1) \cos^2(\varphi_2) (\cos^2(\varphi_1) + \cos^2(\varphi_2))).$$

Множество критических точек функции W является (при фиксированных значениях параметров) пересечением поверхностей M_0 , M_1 и M_2 , определяемых уравнениями $\frac{\partial V}{\partial r} = 0$ (поверхность радиально стационарных

точек) и $\frac{\partial V}{\partial \varphi_1} = 0$, $\frac{\partial V}{\partial \varphi_2} = 0$ (поверхности стационарных точек по тангенциальным переменным φ_1, φ_2).

Из (2.37) следует, что M_0 задается уравнением

$$6r^5 + 4\varepsilon r^3 + 2\delta r + 2r^3((3p r^2 + \gamma)(\cos^2(\varphi_1) + \cos^2(\varphi_2) - \cos^4(\varphi_1) - \cos^4(\varphi_2) - \cos^2(\varphi_1)\cos^2(\varphi_2)) - 6q r^5(\cos^2(\varphi_1)\cos^2(\varphi_2) - \cos^2(\varphi_1)\cos^2(\varphi_2)(\cos^2(\varphi_1) + \cos^2(\varphi_2))) = 0.$$

Поверхность M_k задается уравнением $(p r^2 + \gamma)\frac{\partial \sigma_2}{\partial \varphi_k} + q \frac{\partial \sigma_3}{\partial \varphi_k} = 0$. Множество всех критических точек совпадает с пересечением $M_0 \cap M_1 \cap M_2$. Пересечение $M_1 \cap M_2$ определяется уравнением $(p r^2 + \gamma) \operatorname{grad}_{\varphi} \sigma_2 + q \operatorname{grad}_{\varphi} \sigma_3 = 0$. Часть этого множества определяется соотношениями

$$(p r^2 + \gamma) = 0, \quad \operatorname{grad}_{\varphi} \sigma_3 = 0.$$

Множество $\mathbb{O}$ точек, определяемых последним уравнением, представляет собой объединение трех экваториальных окружностей («тройной обрuch»), полученных пересечением сферы $p r^2 + \gamma = 0$ с координатными плоскостями $r_k = 0$.

Остальные точки данного множества определяются (при различных значениях параметров) уравнением $[\sigma_2, \sigma_3] = 0$, где $[\sigma_2, \sigma_3]$ — якобиан (скобка Пуассона) функций σ_2, σ_3 (по φ_1, φ_2).

Описание *bif*-раскладов можно провести посредством исследования функций двух переменных в областях с углами. Действительно, функция W после замены $r_k^2 = \eta_k$ превращается в полином третьей степени

$$\widehat{W} = s_1^3 + \varepsilon s_1^2 + \delta s_1 + p s_1 s_2 + \gamma s_2 + q s_3, \quad (2.39)$$

$$s_1 = \eta_1 + \eta_2 + \eta_3, \quad s_2 = \eta_1 \eta_2 + \eta_1 \eta_3 + \eta_2 \eta_3, \quad s_3 = \eta_1 \eta_2 \eta_3.$$

При $p = 0$ (и, следовательно, при достаточно малом p) исследование критических точек функции (2.39) в положительном октанте $\eta_k \geq 0$ сводится к исследованию функции

$$U = \tilde{p} s_2 + \tilde{q} s_3 + \text{const} \quad (2.40)$$

на треугольной области $s_1 := \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 = d_j$, $\eta_k \geq 0 \forall k, j = 1, 2$, где d_1 и d_2 — точки минимума и максимума полинома $s_1^3 + \varepsilon s_1^2 + \delta s_1$.

В прямоугольных координатах на плоскости $\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 = \text{const}$ (треугольная) область определения Ω функция U представляет собой ограниченный равносторонний треугольник. Расположим начало координат в центре этого треугольника, а одну из сторон сделаем параллельной второй координатной оси. Функция U приобретет в этих координатах (с учетом всех симметрий) форму возмущенной симметричной (относительно поворота плоскости на угол $\frac{2\pi}{3}$) эллиптической омбилики: $a \left(\frac{u_1^3}{3} - u_1 u_2^2 \right) + b (u_1^2 + u_2^2) + \text{const}$. Типичные линии уровня этой функции изображены на следующем рисунке.

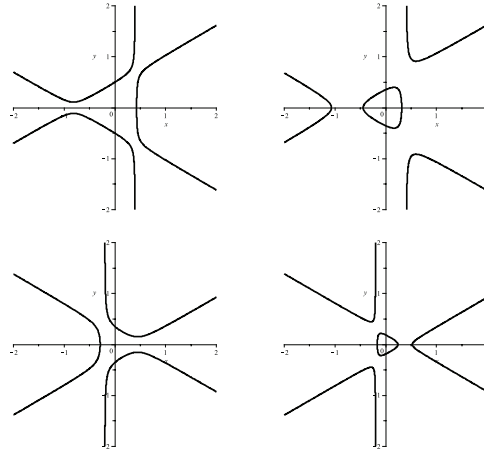


Рис. 8

Линии уровня возмущенной симметричной эллиптической омбилики.

Расклады критических точек U определяют расклады экстремалей функции W , которые можно представить комплексами на сфере. Им соответствуют следующие фрагменты клеточных комплексов, изображающих расклады критических точек в треугольной области. На рисунках «невидимые» ребра изображены пунктирными линиями (кроме ребер, расположенных на координатных линиях). Последний клеточный комплекс содер-

жит двумерные клетки, являющимися конусами над (изогнутыми) ребрами с вершинами в начале координат.

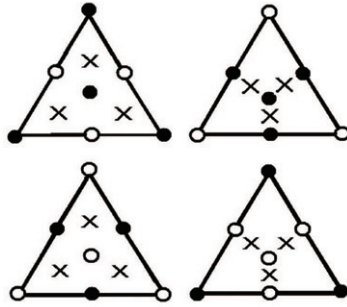


Рис. 9

Схематичное изображение критических точек на области U .

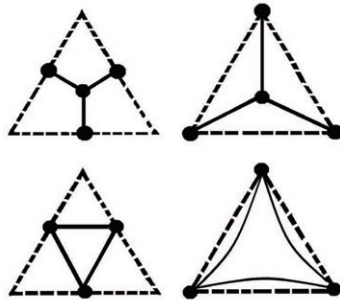


Рис. 10

Характеристические клеточные комплексы, кодирующие расположение критических точек.

На основе этих изображений фрагментов можно построить полные изображения трехмерных характеристических клеточных комплексов, соответствующих исходной ключевой функции. Например, первому комплексу соответствует следующий фрагмент общего 3-мерного характеристического комплекса (та его часть, которая принадлежит одному из координатных октантов в $\mathbb{R}^3$).

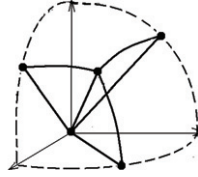


Рис. 11

Фрагмент характеристического $3d$ -комплекса.

2.9 Уравнение Кармана

2.9.1 Случай круглой пластины

Переход к ключевой функции позволяет использовать в вариационных задачах новейшие достижения из анализа гладких функций и компьютерных вычислительных технологий. Каждая реализация идеи «конечномерного усечения» исходного модельного уравнения сопряжена не только с необходимостью ее математического обоснования, но и с разработкой алгоритмов, позволяющих приближенно вычислять ключевую функцию и ее возмущения, и с подтверждением достоверности полученных численных результатов. Важную роль в таких применениях методов конечномерной редукции играют идеи и конструкции теории особенностей гладких функций [3].

Рассмотренная в данной работе нелокальная вычислительно-аналитическая процедура ранее была апробирована в случаях уравнения Дуффинга, уравнения колебаний маятника и уравнения Белецкого [28], [6]–[9], [40]. В настоящей работе описано применение этой процедуры (с необходимыми модификациями) к задаче о прогибах круглой упругой пластины при конечных закритических приращениях параметра сжатия пластины.

О решениях простейших задач ветвления решений уравнения Кармана в случае круглой пластины можно посмотреть в [13], [19]. Соответствующие аналитические результаты всех известных работ имеют локальный характер. При их получении применялась, как правило, локальная схема

Ляпунова-Шмидта (не вариационная) или галёркинская аппроксимация (уравнения Кáрмана).

В работах Ю.И. Сапронова и А.В. Гнездилова [21], [22] было установлено, что ключевая функция, отвечающая за ветвление осесимметричных конфигураций круглой упругой пластины при её равномерном (по контуру) сжатии в направлении нормалей, глобально продолжима на пространство ключевых переменных (аналогичный вопрос для неосесимметричных конфигураций и для пластин произвольной формы пока открыт). Этот факт был использован Т.И. Костиной [40] при решения задачи о нелокальных ветвях бифурцирующих решений уравнения Кáрмана. Ниже представлена разработка теоретической основы для численного решения этой задачи. За основу взята вычислительно-аналитическая процедура, опубликованная в [28] (общая абстрактная схема) и в [40]-[42] — при изучении колебаний спутника в плоскости эллиптической орбиты и прогибов круглой упругой пластины (для нагрузки, не превосходящей третьего критического значения).

2.9.2 Функционал энергии круглой упругой пластины и его усеечения

Формы упругих равновесий круглой пластины, равномерно сжатой по краю (вдоль нормалей), в модели Кармана описывается системой двух уравнений [19]

$$\Delta^2 w + \lambda \Delta w - [w, \phi] = \Delta^2 \phi + \frac{1}{2}[w, w] = 0, \quad (2.41)$$

в которой Δ — оператор Лапласа, $[w, \phi] = w_{xx}\phi_{yy} + w_{yy}\phi_{xx} - 2w_{xy}\phi_{xy}$, w — функция прогиба, ϕ — функция напряжения, λ — параметр нагрузки. Уравнение (2.41) дополняется краевыми условиями, отвечающими характеру закрепления края пластины. Рассмотрим случай жесткого закрепления:

$$\phi = \phi_x = \phi_y = w = w_x = w_y = 0|_{\partial\Omega}. \quad (2.42)$$

Здесь Ω — область определения функций w, ϕ , заданная в виде единичного круга и интерпретируемая как геометрическая форма ненагруженной пластины:

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Уравнение (2.41) при краевых условиях (2.42) является уравнением Эйлера-Лагранжа экстремалей функционала полной энергии

$$V(w, \phi, \lambda) = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} (|\Delta w|^2 - |\Delta \phi|^2 - \lambda |\nabla w|^2 - \phi[w, w]) dx dy.$$

После перехода к полярным координатам $x = r \cos(\varphi)$, $y = r \sin(\varphi)$ и «спуска» в пространство осесимметричных функций $w = w(r)$ получим интеграл энергии в виде $V = 2\pi \hat{V}$, где

$$\hat{V} = \frac{1}{2} \int_0^1 r \left(|\hat{\Delta} w|^2 - |\hat{\Delta} \phi|^2 - \lambda \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 + \frac{1}{2r} \frac{d\phi}{dr} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 \right) dr,$$

$$\hat{\Delta} = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr}.$$

После замены $v = \frac{dw}{dr}$, $\psi = \frac{d\phi}{dr}$ получим

$$U(v, \psi, \lambda) = \hat{V}(w, \phi, \lambda) =$$

$$\frac{1}{2} \int_0^1 r \left(\mathcal{A}(v)v - \mathcal{A}(\psi)\psi - \lambda v^2 + \frac{\psi v^2}{2r} \right) dr,$$

где

$$\mathcal{A} = -\frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \frac{1}{r^2} I$$

— дифференциальный оператор Бесселя.

Стандартным редуцирующим переходом к функционалу

$$\tilde{U}(v, \lambda) = \sup_{\psi} U(v, \psi, \lambda) =$$

$$\frac{1}{2} \int_0^1 r \left(\mathcal{A}(v)v - \lambda v^2 + \frac{1}{4} \mathcal{A}^{-1} \left(\frac{v^2}{r} \right) \frac{v^2}{r} \right) dr \quad (2.43)$$

избавляемся от переменной ψ .

Устойчивые осесимметричные конфигурации пластины соответствуют точкам локального минимума функционала (2.43).

Из краевых условий (2.42) и условия осевой симметрии следует, что v удовлетворяет граничным условиям

$$v(0) = v(1) = 0. \quad (2.44)$$

Если наложить ограничение на разность прогиба в срединной точке пластины (по сравнению с краем), то мы приходим к задаче на экстремум для функционала (2.43) при условии

$$\int_0^1 v dr = \text{const.}$$

Последняя задача сводится к задаче поиска экстремалей расширенного функционала (без ограничений)

$$\mathcal{U} := \tilde{U}(v, \lambda) + q \int_0^1 v dr, \quad q \in \mathbb{R}^1. \quad (2.45)$$

Обозначим через E пространство функций класса C^2 на отрезке $[0, 1]$, удовлетворяющих краевым условиям (3.9), а через $\mathcal{H}$ — пространство функций с суммируемым весовым квадратом на $[0, 1]$ и скалярным произведением $\langle u, v \rangle = \int_0^1 r u v dr$.

Очевидно, что функционал $\mathcal{U}$ является гладким на этом пространстве.

Теорема 2.4. ([21], [22]) Пусть $e_1, \dots, e_n$ — такой линейно независимый набор функций в E , что при $\lambda \leq l$, где l — некоторое положительное число, квадратичная форма

$$\langle (\mathcal{A} - \lambda I)v, v \rangle > 0, \quad v \neq 0, \quad v \in E \cap \text{Lin}(e_1, \dots, e_n)^\perp \quad (2.46)$$

(положительна на $E \cap \text{Lin}(e_1, \dots, e_n)^\perp$ — ортогональном дополнении к $\text{Lin}(e_1, \dots, e_n)$ в метрике $\langle u, v \rangle$ пространства $\mathcal{H}$). Тогда 1) функция

$$W(\xi, \lambda) = \inf_{v: \langle v, e_j \rangle = \xi_j, j=1, \dots, n} \mathcal{U}(v, \lambda), \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n), \quad \lambda \leq l,$$

является гладкой на $\mathbb{R}^n$; 2) существует взаимно однозначное соответствие между множествами критических точек функционала $\mathcal{U}$ и функции W , сохраняющее коранги и индексы Морса критических точек.

Доказательство имеется в [28].

Пусть

$$E_0 = E \bigcap \text{Lin}(e_1, \dots, e_n)^\perp, \quad F_0 = C([0, 1]) \bigcap \text{Lin}(e_1, \dots, e_n)^\perp.$$

Экстремаль $v = \Phi(\xi)$ функционала $\tilde{U}|_{E_\xi}$, где $E_\xi = \{v \in E : \langle v, e_j \rangle = \xi_j, j = 1, \dots, n\}$, задается уравнением

$$g(v, \lambda) = 0, \quad v \in E_\xi, \quad (2.47)$$

где g — отображение $E_\xi \rightarrow F_0$, заданное соответствием

$$v \mapsto f(v, \lambda) - \sum_{j=1}^n \langle f(v, \lambda), \tilde{e}_j \rangle \tilde{e}_j,$$

$$f(v, \lambda) := \mathcal{A}(v) - \lambda v + \frac{v}{2r} \mathcal{A}^{-1} \left(\frac{v^2}{r} \right) - q,$$

$\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n$ — любой ортонормированный базис в $\text{Lin}(e_1, \dots, e_n)$. Отображение g является локально диффеоморфно обратимым. Последнее вытекает из фредгольмовости g (индекса 0), положительности (2.46) и следующего утверждения

Для функционала $S(v) = \left\langle \mathcal{A}^{-1} \left(\frac{v^2}{r} \right), \frac{v^2}{r} \right\rangle$ выполняется соотношение (условие выпуклости):

$$\frac{d^2}{dv^2} S(v, \lambda)(h, h) \geq 0, \quad \forall v, h \in E, \quad \lambda < l.$$

Доказательство этого факта можно осуществить непосредственной проверкой. Сначала нужно заметить, что

$$\frac{d^2 S}{dv^2}(v, \lambda)(h, h) = \left\langle \mathcal{A}^{-1} \left(\frac{v^2}{r} \right), \frac{h^2}{r} \right\rangle + 2 \left\langle \mathcal{A}^{-1} \left(\frac{vh}{r} \right), \frac{vh}{r} \right\rangle. \quad (2.48)$$

Второе слагаемое здесь неотрицательно вследствие положительной определенности оператора $\mathcal{A}$. Положительность же первого слагаемого вытекает из следующего утверждения.

Теорема 2.5. *Оператор $\mathcal{A}^{-1} : F \longrightarrow E$ позитивен: $v(r) \geq 0 \forall r$, если $\mathcal{A}(v)(r) \geq 0 \forall r$.*

Из сформулированных выше утверждений вытекает единственность и гладкая зависимость решения $v = \varphi(\xi, \lambda)$ уравнения (2.47) от ξ и λ (если решение существует).

Теорема 2.6. *При каждом значении параметра λ , при котором выполнено условие (2.46), уравнение (2.47) разрешимо.*

Доказательство. Предположим противное:

$$\min \mathcal{A}(v)(r) \geq 0, \quad \min v(r) < 0.$$

Пусть минимум v достигается в точке $c \in (0, 1)$. Тогда $v_r(c) = 0$, $v(c) < 0$ и $\mathcal{A}(v)(c) = -v_{rr}(c) + \frac{v(c)}{c^2} \geq 0$. Следовательно, $v_{rr}(c) < 0$. Последнее противоречит минимальности значения $v(c)$.

Из сформулированных выше утверждений вытекает единственность и гладкая зависимость решения $v = \varphi(\xi, \lambda)$ уравнения (2.47) от ξ и λ (если решение существует).

Утверждение 2.1 *При каждом значении параметра λ , при котором выполнено условие (2.46), уравнение (2.47) разрешимо.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{H}^1$ — гильбертово пространство функций, полученное замыканием по норме $\|v\|_1 := \langle \mathcal{A}(v), v \rangle$ пространства гладких функций, удовлетворяющих условию (3.9.). И пусть $\langle u, v \rangle_1 := \langle \mathcal{A}(u), v \rangle$ — скалярное произведение в $\mathcal{H}^1$. Тогда для $\mathcal{U}$ имеем представление

$$\mathcal{U}(v, \lambda, q) = \frac{1}{2} \left(\|v\|_1 - \lambda \langle \mathcal{A}^{-1}(v), v \rangle_1 + \mathcal{S}(v) \right) + \langle \mathcal{A}^{-1}(v), \tilde{q} \rangle_1, \quad (2.49)$$

где

$$\mathcal{S}(v) = \frac{1}{4} \left\| \mathcal{A}^{-1} \left(\frac{v^2}{r} \right) \right\|_1^2.$$

Пусть $\mathcal{H}_\xi^1$ — замыкание в $\mathcal{H}^1$ аффинного подпространства E_ξ . Из положительности формы (2.46) вытекает коэрцитивность $\mathcal{U}$ в $\mathcal{H}_\xi^1$ (неограниченное возрастание $\mathcal{U}$ на бесконечности). Выпуклость и коэрцитивность $\mathcal{U}$

гарантируют существование экстремали $\Phi(\xi, \lambda, q)$ в $\mathcal{H}_\xi^1$. Как обычно (для таких задач), эта экстремаль находится на самом деле в E_ξ . «Подкачку» гладкости экстремали $v(r)$ можно произвести благодаря соотношению

$$v + \lambda \mathcal{A}^{-1}(v) + \mathcal{A}^{-1} \left(\frac{v}{2r} \mathcal{A}^{-1} \left(\frac{v^2}{r} \right) \right) = \sum_{j=1}^n (\mu_j + q \alpha_j) \hat{e}_j, \quad \hat{e}_j = \mathcal{A}^{-1}(e_j),$$

являющемуся уравнением Эйлера-Лагранжа для экстремалей (условных) рассмотренного функционала в $\mathcal{H}_\xi^1$.

Доказательство первого утверждения теоремы следует из того, что $W(\xi, \lambda, q) = \mathcal{U}(\Phi(\xi, \lambda, q), \lambda, q)$, где $\Phi(\xi, \lambda, q)$ — гладкая функция.

Второй пункт утверждения является локальным и вытекает из соответствующих теорем вариационной версии теории Ляпунова-Шмидта [28].

Теорема 2.7. *Для V , рассмотренном на соответствующем ему энергетическом пространстве $\mathcal{H}^1$, выполнено условие (L), состоящее из следующих требований:*

- 1) для градиента имеет место представление $f(x, \delta) = I + c(x, \delta)$, где c — вполне непрерывное отображение из $\mathcal{H}^1 \times \Delta$ в $\mathcal{H}^1$ (условие представимости градиента в форме Лере-Шаудера);
- 2) существует такая последовательность конечномерных подпространств

$$\{E_{n+m}\} = E_{n+0} = N \subset E_{n+1} \subset E_{n+2} \subset \dots \subset E_{n+m} \subset \dots,$$

что последовательность ортопроекторов $P_m : H_1 \rightarrow E_{n+m}$ сильно сходится к единице на пространстве $\mathcal{H}^1$;

- 3) ограничение $V|_{E_{n+m}}$ является коэрцитивной функцией.

Две последние теоремы позволяют реализовывать алгоритм нелокального вычисления ключевой функции, описанный во второй главе.

2.9.3 Построение приближений к ключевой функции от двух переменных

Пусть значение параметра λ не превосходит третьего критического значения [18], [19], и пусть e_1, e_2 — первые две собственные функции (нормированные в $\mathcal{H}^1$ функции Бесселя) линейной части уравнения Кáрманна,

выбранные из тех, для которых выполнены краевые условия. Положим $N = \text{Lin}(e_1, e_2)$. Ниже параметры λ, q будут отброшены (будут входить «по умолчанию»).

На основе сформулированных выше предложений можно утверждать, что при любом $u \in N$ существует $\inf_{v \in N^\perp} V(u + v)$. Таким образом, следуя схеме Ляпунова-Шмидта, можно разыскивать ключевую функцию в виде:

$$W(\xi) \equiv V(u + \Phi(\xi)), \quad u := \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2, \quad \Phi(\xi) \in N^\perp. \quad (2.50)$$

Основная трудность заключается в построении приближений $\tilde{\Phi}(\xi)$ к функции $\Phi(\xi)$. Одним из традиционных методов ее построения является метод кратчайшего спуска (по градиенту), в соответствии с которым последовательность приближений $\tilde{\Phi}(\xi)$ приводит к последовательности приближений ключевой функции $W_{(k)} = V(u + v_k)$. Внутри процесса спуска по градиенту можно использовать итерационный метод Ньютона [45]. Если на каждом шаге рассматривать (выпуклую) функцию $w(s) = V(u + v_k + s \nabla_k)$, $s \geq 0$, $\nabla_k = -\text{grad}V(u + v_k)$, то приближение к точке минимума приводит (по методу Ньютона) к итерациям

$$h_{k+1} = s_{k+1} \nabla_k, \quad s_k = \frac{\langle f_\lambda(u + v_k), \nabla_k \rangle_1}{\left\langle \frac{\partial f}{\partial x}(u + v_k) \nabla_k, \nabla_k \right\rangle_1}.$$

В [8] при построении приближений к ключевой функции использовались галеркинские усечения функционала энергии. Первым шагом в построении галеркинских приближений является выбор набора базисных функций в E , которые должны удовлетворять граничным условиям и образовывать полную систему в $\mathcal{H}$. В рассмотренной здесь задаче весьма удобно воспользоваться стандартной последовательностью функций Бесселя $\{e_k\}$ [18], [19], [72].

В итоге получим систему уравнений (нелинейная аппроксимация Ритца-Галеркина)

$$\left\langle f \left(\sum_{k=1}^N \xi_k e_k \right), e_j \right\rangle_1 = 0, \quad j = 1, \dots, N.$$

В результате указанных построений можно получить (сходящуюся) итерационную последовательность, позволяющую строить ключевую функцию с любой требуемой точностью. Соответствующие рассуждения по обоснованию сходимости итераций приведены во второй главе.

После получения приближенной ключевой функции $\widetilde{W}$ можно осуществить приближенное построение дискриминантного множества (*каустики*) — множества значений параметров (λ, q) , при которых существуют вырожденные критические точки. Каустика определяется системой уравнений:

$$\begin{cases} \text{grad } \widetilde{W}(\xi_1, \xi_2) = 0, \\ \text{Hessian } \widetilde{W}(\xi_1, \xi_2) = 0, \end{cases} \quad (2.51)$$

Вопрос структурной устойчивости (грубости) каустики, означающей стабилизацию ее топологического строения при усилении точности приближения, решается теми рассуждениями, которые были приведены в [6], [9].

После получения информации о строении каустики проще изучать *bif*-расклады экстремалей и взаимные примыкания раскладов экстремалей (соответствующих ячейкам регулярности — компонентам связности дополнения к каустике). Более подробному описанию результатов изучения геометрического строения каустики, линий уровней ключевой функции и прогибов пластины будет посвящена отдельная публикация.

2.9.4 Пример итерационного алгоритма полиномиального приближения к ключевой функции для уравнения Кармана.

Исходные данные

Исходное уравнение $v + g_\lambda(v) :=$

$$:= v + \lambda \mathcal{A}^{-1}(v) + \mathcal{A}^{-1} \left(\frac{v}{2r} \mathcal{A}^{-1} \left(\frac{v^2}{r} \right) \right) = \tilde{q}; \quad (2.52)$$

функционал действия

$$\mathcal{U}(v, \lambda, q) = \frac{1}{2} (\|v\|_1 - \lambda \langle \mathcal{A}^{-1}(v), v \rangle_1 + \mathcal{S}(v)) + \langle v, \tilde{q} \rangle_1; \quad (2.53)$$

$$u := \xi_1 e_1 + \xi_1 e_1, \quad v := Bw, \quad \tilde{q} := \mathcal{A}^{-1}q, \quad q := q_1 e_1 + q_2 e_2; \quad (2.54)$$

e_1, e_2 — нормированные (в $\mathcal{H}^1$) первая и вторая функции Бесселя (на $[0, 1]$).

Проектор

$$Q : x \mapsto y := \sum_{k=3}^m \langle x, e_k \rangle_1 e_k;$$

$e_3, e_4, \dots$ — последующие функции Бесселя.

Интегральный оператор, обратный к весовому 2-кратному дифференцированию по r ,

$$B : w := \sum_k \langle x, e_k \rangle_1 e_k \mapsto v := \sum_k \beta_k \langle x, e_k \rangle_1 e_k;$$

2.9.5 Операторное уравнение. Итерации

$$v = Q g_\lambda(u + v), \quad v \perp e_1, e_2,$$

$$g_\lambda(v) := \lambda B(v) + B G(v) - \tilde{q};$$

$$G(v) := \frac{v}{2r} B \left(\frac{v^2}{r} \right)$$

— кубический оператор.

$$v^{(k+1)} = Q g_\lambda(u + v^{(k)}).$$

2.9.6 Функции Бесселя

$$e_k(r) = d_k Bessel(\alpha_k r), \quad k = 1, 2 \dots;$$

где d_k — нормирующая константа (в $\mathcal{H}^1$), $\{\alpha_k\}$ — последовательность корней основной (первой) функции $Bessel(r)$ при краевых условиях (2.42) [72].

Последовательность первых девяти корней следующая (см. [72], стр. 561):

2, 404; 5, 520; 8, 654; 11, 792; 14, 931; 18, 076; 21, 212; 24, 353; 27, 494.

Здесь мы приведем лишь некоторые выборочные изображения, изготовленные в среде MAPLE.

На рисунках приведены изображения приближенно вычисленной ключевой функции и прогибов пластины (соответствующих критическим точкам редуцированного функционала энергии).

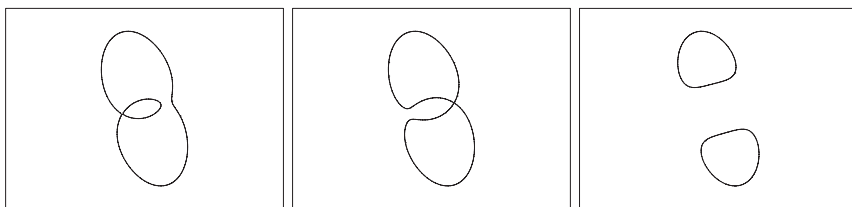


Рис. 12

Пример изображений линий уровня возмущенной ключевой функции (при наличии возмущения).

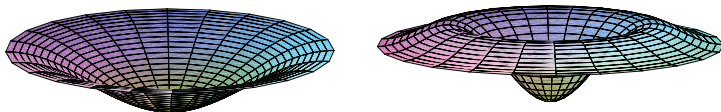


Рис. 13

Примеры изображений прогибов круглой пластины.

2.9.7 Уравнение Кармана в случае прямоугольной пластины

Равновесное состояние упругой прямолинейной пластины, продольно сжатой и шарнирно закрепленной на крае, описывается уравнениями Карма-

на (промасштабированными) [18], [19]:

$$\Delta^2 w - [w, \varphi] + \lambda w_{xx} = \Delta^2 \varphi + \frac{1}{2}[w, w] = 0 \quad (2.55)$$

при краевых условиях

$$w = \Delta w = \varphi = \Delta \varphi = 0|_{\partial\Omega_a}. \quad (2.56)$$

Через w и φ в этих уравнениях обозначены функции прогиба и напряжения пластины, Δ — гармонический оператор Лапласа,

$$[w, \varphi] := w_{xx}\varphi_{yy} + w_{yy}\varphi_{xx} - 2w_{xy}\varphi_{xy},$$

$$\Omega_a = [0, a] \times [0, 1],$$

λ — параметр нагрузки.

Пусть H^4 — пространство соболевских функций класса W_2^4 , удовлетворяющих (2.56). Уравнение (2.55) является уравнением Эйлера-Остроградского экстремалей функционала V

$$V(w, \varphi, \lambda) = \frac{1}{2} (|\Delta w|^2 - \lambda |w_x|^2 - |\Delta \varphi|^2 - \langle [w, w], \varphi \rangle) \quad (2.57)$$

на пространстве $H^4 \times H^4$. Здесь

$$|\varphi|^2 = \langle \varphi, \varphi \rangle := \int_{\Omega_a} \varphi^2(x, y) dx dy.$$

Как правило, исследование функционала (2.57) проводится через редукцию к функционалу $\tilde{V}$

$$\tilde{V} = \sup_{\varphi: \varphi \in H^4} V(w, \varphi, \lambda). \quad (2.58)$$

Маргинальное отображение $H^4 \longrightarrow H^4 \times H^4$, отвечающее данной редукции, задается соответствием

$$w \mapsto \left(w, -\frac{1}{2}\Delta^{-2}[w, w] \right)$$

Следовательно, для (2.58) имеет место представление

$$\hat{V}(w, \lambda) = \frac{1}{2} (|\Delta w|^2 - \lambda |w_x|^2) + \frac{1}{8} |\Delta^{-1}[w, w]|^2. \quad (2.59)$$

Через Δ^{-1} обозначается оператор Грина $\psi \mapsto \varphi$, где φ — решение уравнения Пуассона

$$\Delta\varphi = \psi, \quad \varphi|_{\partial\Omega_a} = 0.$$

В [17] установлено, что оператор Δ действует как изоморфизм из пространства функций гельдеровского класса $C^{2+\alpha}(\Omega_a)$, удовлетворяющих условию $\varphi|_{\partial\Omega_a} = 0$, на F_0 — подпространство функций ψ в пространстве $F = C^{0+\alpha}(\Omega_a)$, удовлетворяющих условию согласования:

$$\psi(0, 0) = \psi(a, 0) = \psi(0, 1) = \psi(a, 1).$$

Обозначим теперь через E банахово пространство $\{w \in H^4 : \Delta^2 w \in F\}$ с нормой

$$\|w\|_E = \|\Delta^2 w\|_{C^{0+\alpha}(\Omega_a)}.$$

Через функционал (2.59) в теории упругих оболочек оценивается устойчивость равновесных состояний: состояние устойчиво, если оно реализует точку локального минимума функционала (2.59). Потеря устойчивости прямолинейной формы равновесия ($w = 0$) происходит при переходе λ через критическое значение (верхнюю критическую нагрузку):

$$\lambda^*(a) = \sup \left\{ \bar{\lambda} : \frac{\partial^2 \hat{V}}{\partial w^2}(0, \lambda)(h, h) > 0, \quad \forall \lambda < \bar{\lambda}, \quad h \neq 0 \right\}.$$

Верхняя критическая нагрузка непрерывно и кусочно гладко зависит от длины a пластины. Разрыв производной $\lambda^*(a)$ происходит в точках $a_m = \sqrt{m(m+1)}$, $m = 1, 2, \dots$. При $a = a_m$ и $\lambda = \lambda_m := \lambda^*(a_m)$ в нуле теряется устойчивость по двум модам:

$$e_1 = 2 \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin(\pi y), \quad e_2 = 2 \sin\left(\frac{(m+1)\pi x}{a}\right) \sin(\pi y).$$

Анализ соответствующих закритических равновесий сводится к изучению критических точек ключевой функции

$$W(\xi, \lambda, a) := \inf_{v: v \in \mathcal{O}_*} V(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + v, \lambda), \quad \xi \in \mathcal{O}^2 \quad (2.60)$$

(при (λ, a) , достаточно близких к (λ_m, a_m)). Здесь $\mathcal{O}^2$ и $\mathcal{O}_*$ — достаточно малые окрестности нулей в $\mathbb{R}^2$ и $E_* = \{v \in E : \langle v, e_1 \rangle = \langle v, e_2 \rangle = 0\}$.

Локальный анализ (2.60) успешно осуществляется благодаря тому, что имеет место представление

$$W(\xi, \lambda, a) = \frac{1}{2} (\alpha_1(\lambda, a)\xi_1^2 + \alpha_2(\lambda, a)\xi_2^2) + \sum_{i,j=1}^2 h_{i,j}\xi_1^2\xi_2^2 + \dots$$

где α_1, α_2 — собственные значения оператора $\Delta^2 + \lambda \frac{\partial^2}{\partial x^2}$, отвечающие собственным векторам e_1, e_2 ,

$$h_{j,j} = \frac{1}{8} |\Delta^{-1}[e_j, e_j]|^2,$$

$$h_{1,2} = h_{2,1} = \frac{1}{8} (\langle \Delta^{-1}[e_1, e_1], \Delta^{-1}[e_2, e_2] \rangle + 2|\Delta^{-1}[e_1, e_2]|^2).$$

Компьютерные вычисления показывают, что при нескольких начальных значениях m выполняется неравенство

$$h_{1,2} > (h_{1,1}h_{2,2})^{1/2}, \quad (2.61)$$

благодаря которому можно осуществить полный локальный анализ бифуркации равновесий.

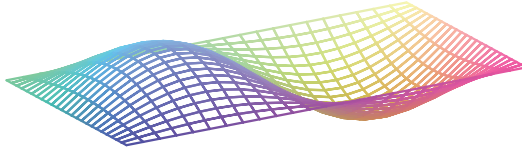


Рис. 14

Пример изображения прогиба прямоугольной пластины.

Замечание 2.1. Неравенство (2.61) означает положительную определенность формы

$$\sum_{i,j=1}^2 h_{i,j} \xi_i \xi_j$$

в положительной четверти плоскости $\mathbb{R}^2$. Вопрос о знакоопределенности этой формы при произвольном m пока остается открытым.

Замечание 2.2. Вопрос о существовании нелокальной редукции (гладкого продолжения ключевой функции (2.60) на конечную область при $\lambda > \lambda_1$) для прямоугольной пластины также открыт (в аналогичной ситуации для круглой пластины вопрос глобальной конечномерной редуцируемости решен положительно).

2.10 Моделирование диффузорных течений жидкост

Упрощенные варианты уравнения Навье-Стокса используются при изучении диффузорных течений, начиная с основополагающих работ Джефффри [80] и Гамеля [78] (1915 и 1917 гг.). Сведения по математическому моделированию на этой основе течений в плоском диффузоре можно найти в [1]-[2], [43], [49].

В задаче о динамике жидкости в диффузорах (плоском, объемном и диффузоре-улитке) допускается применение нелокальной редуцирующей схемы Ляпунова-Шмидта, посредством которой можно сколь угодно точно описывать динамику скоростей частиц жидкости в областях произвольных геометрических форм. При таком подходе извлекается и дополнительная информация о «качественных свойствах» течений, полученная на основе аналитических и геометрических свойств ключевых отображений и ключевых функций.

Базой вычислительного процесса в случае плоского диффузора часто является редукция к краевой задаче для ОДУ (посредством подстановки Гамеля для вихревой функции) с последующим использованием свойства

полной интегрируемости полученного ОДУ. Но, как известно, представление решений через эллиптические функции не удовлетворяет современным требованиям к точности приближений — вследствие недостаточной точности существующих таблиц значений эллиптических функций и интегралов. В работах [1] – [2] представлены результаты построения приближенных решений редуцированного уравнения на основе специальной версии метода ускоренной сходимости. В этих же работах дано обоснование необходимости применения приближенных методов к построению решений — в противовес методу использования точного аналитического решения в эллиптических функциях.

Наш подход основан в целом на двухшаговой редукции — функциональной редукции к краевой задаче для ОДУ с квадратичной нелинейностью (первый шаг) и редукция к конечномерному алгебраическому уравнению (второй шаг) — через нелинейную аппроксимацию Галеркина-Ритца по вариационной схеме Ляпунова-Шмидта.

Общая структура предложенного ниже алгоритма сохраняется при переходе к объемному диффузору и диффузору-улитке. В доработке нуждаются лишь отдельные блоки представленного алгоритма, что вызвано наличием аналитических препятствий, связанных с усложнением редуцирующих переходов.

2.10.1 Двумерная жидкость, уравнения Навье-Стокса и Гельмгольца

Обратимся к двумерному уравнению Навье-Стокса [43]

$$\dot{v} + \frac{\partial v}{\partial x} v = \nu \Delta(v) - \text{grad}(p). \quad (2.62)$$

Здесь $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ — двумерный лапласиан, $\frac{\partial v}{\partial x}$ — матрица Якоби вектора скорости $v = v(x_1, x_2, t)$ по компонентам точки $x = (x_1, x_2)$, $p = p(x_1, x_2, t)$ — давление. Искомое поле векторов скорости v считается заданным на некоторой ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ с гладкой границей и «стандартными» краевыми условиями.

В полярных координатах стационарное уравнение Навье-Стокса принимает следующий вид (см. [43]):

$$\left. \begin{aligned} (U \cdot \tilde{\nabla})u - \frac{v^2}{r} &= -\frac{\partial p}{\partial r} + \left(\tilde{\Delta}u - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{u}{r^2} \right), \\ (U \cdot \tilde{\nabla})v + \frac{uv}{r} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \left(\tilde{\Delta}v + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v}{r^2} \right), \end{aligned} \right\} \quad (2.63)$$

где

$$(U \cdot \tilde{\nabla}) = u \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad \tilde{\Delta} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

К уравнениям Навье-Стокса добавляется уравнение неразрывности

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Имеют место также следующие соотношения (в полярных координатах):

$$\text{grad} = \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right)^\top, \quad \text{sgrad} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, -\frac{\partial}{\partial r} \right)^\top.$$

В преобразованиях, упрощающих уравнение (2.62), используются следующие соотношения (устанавливаемые непосредственной проверкой):

$$\text{rot} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) = \text{grad}(\Delta \psi); \quad \text{rot} \left(\frac{\partial v}{\partial x} v \right) = [\psi, \Delta(\psi)].$$

Здесь $\text{rot}(v) := \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}$, $\psi(x_1, x_2, t)$ — так называемая вихревая функция, $[\psi, \varphi]$ — якобиан функций ψ, φ .

Условие неразрывности $\text{div}(v) = 0$ для двумерной жидкости в односвязной области приводит к тому, что решение обязано принимать следующий вид:

$$v := \text{sgrad}(\psi) = \left(-\frac{\partial \psi}{\partial x_2}, \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \right)^\top,$$

Для функции ψ естественно потребовать выполнение граничного условия

$$(n, \text{sgrad}(\psi)) \Big|_{\partial \Omega} = 0, \quad (2.64)$$

n — поле нормалей к границе области.

Пусть $u := \text{rot}(v) = \Delta(\psi)$, и $\dot{u} = \text{rot}(\dot{v}) = \Delta(\dot{\psi})$. Применив двумерный ротор к левой и правой частям уравнения (2.62), получим уравнение Гельмгольца ([43], стр. 406)

$$\Delta(\dot{\psi}) = [\Delta(\psi), \psi] + \nu \Delta^2(\psi). \quad (2.65)$$

2.10.2 Подстановка Гамеля и редукция к ОДУ

Анализ стационарного варианта

$$[\Delta(\psi), \psi] + \nu \Delta^2(\psi) = 0 \quad (2.66)$$

уравнения Гельмгольца (2.65) можно осуществить, используя редуцирующий переход к краевой задаче для ОДУ ([43], стр. 450-484). Наиболее известной редукцией является подстановка Гамеля, осуществляемая посредством сужения стационарного уравнения Гельмгольца на класс функций вида (см. [43], стр. 478) $\varphi = Q q(\theta)$. Ниже $Q := \int_0^\beta r u d\theta$ — поток жидкости через диффузор.

Используя соотношения

$$\begin{aligned} \Delta(\varphi) &= Q \frac{q''}{r^2}, & [\Delta(\varphi), \varphi] &= -Q^2 \frac{2q''q'}{r^4}, & \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(\frac{q''}{r^2} \right) &= \frac{6q''}{r^4}, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{q''}{r^2} \right) &= -\frac{2q''}{r^4}, & \frac{1}{r^2} \left(\frac{q''}{r^2} \right)'' &= \frac{q''''}{r^4} \end{aligned}$$

получим (после подстановки Гамеля) вместо (2.66) следующее ОДУ:

$$q'''' + 4q'' - 2\mathcal{R} q''q' = 0, \quad (2.67)$$

где $\mathcal{R} = \frac{Q}{\nu}$ — число Рейнольдса.

В случае плоского диффузора уравнение (2.67) дополняется краевыми условиями (см. (2.64))

$$q(0) = 0, \quad q(\beta) = 1, \quad q'(0) = q'(\beta) = 0.$$

Условие $q(\beta) = 1$ вытекает из того, что

$$\int_0^\beta q' d\theta = \frac{1}{Q} \int_0^\beta r u d\theta = 1$$

— (нормированный) поток через сечение диффузора окружностью $r = \text{const}$ (см. [1], [2]).

После масштабирования преобразования угловой переменной $\theta \rightarrow \beta\theta$ получим краевую задачу

$$q'''' + \lambda q'' - 2\tilde{\mathcal{R}} q''q' = 0, \quad (2.68)$$

$$q(0) = 0, \quad q(1) = 1, \quad q'(0) = q'(1) = 0, \quad (2.69)$$

где

$$\lambda = 4\beta^2, \quad \tilde{\mathcal{R}} = \beta\mathcal{R}.$$

Замечание 2.3. Нетрудно установить, что краевая задача (2.68) – (2.69) является вариационной: левая часть уравнения (2.68) является градиентом функционала

$$V = \int_0^1 L(q'', q') d\theta, \quad L(q'', q') = \frac{(q'')^2}{2} - \lambda \frac{(q')^2}{2} + \tilde{\mathcal{R}} \frac{(q')^3}{3}. \quad (2.70)$$

Таким образом, решения уравнения (2.68) являются экстремалами функционала (2.70) (при условии (2.69)). Следовательно, построение решений уравнения (2.68) можно осуществлять на основе локальной и нелокальной версий вариационного метода Ляпунова-Шмидта.

Замечание 2.4. В работах [1], [2] представлены результаты построения приближенных решений уравнения (2.68) на основе специальной версии метода ускоренной сходимости. В этих же работах дано обоснование необходимости применения приближенных методов к построению решений уравнения (2.68) — в противовес методу использования точного аналитического решения в эллиптических функциях. Такая возможность имеется вследствие интегрируемости уравнения (2.68). Представление решений через эллиптические функции не удовлетворяет современным требованиям к приближениям вследствие недостаточной точности ($10^{-4} - 10^{-6}$) существующих таблиц значений эллиптических функций и интегралов. Требуемая точность в современных прикладных задачах — $10^{-8} - 10^{-10}$ и выше.

После первичного интегрирования уравнения (2.68) и замены $q' = u$ получим краевую задачу

$$u'' + \lambda u - \tilde{\mathcal{R}} u^2 = c, \quad c = \text{const}, \quad (2.71)$$

$$u(0) = u(1) = 0, \quad (2.72)$$

при дополнительном интегральном ограничении

$$\int_0^1 u \, d\theta = 1. \quad (2.73)$$

Левая часть уравнения (2.71) является градиентом функционала

$$\int_0^1 \frac{1}{2} \left(((u')^2 - \lambda u^2) + \frac{1}{3} u^3 \right) d\theta \quad (2.74)$$

при краевых условиях (2.72). Этот функционал удобно рассматривать (см. [28]) на гильбертовом пространстве $H^1[0, 1]$, состоящем из абсолютно непрерывных функций, удовлетворяющих условию (2.72) и имеющих производную класса $L_2[0, 1]$. Скалярное произведение в $H^1[0, 1]$ задается соотношением $\langle u, v \rangle_1 = \int_0^1 u'v' \, d\theta$. Интегрирование уравнения (2.71) приводит следующему соотношению: $\frac{1}{2} ((u')^2 + \lambda u^2) + \frac{\bar{R}}{3} u^3 - cu = d$.

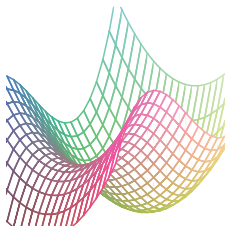


Рис. 15

График функции, равной интегралу уравнения (2.71)

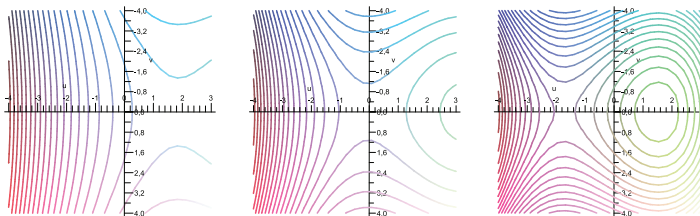


Рис. 16

Интегральные кривые уравнения (2.71) при различных значениях параметров

Изменение значений параметров приводит к изменению графика (рис. 15) и интегральных кривых (рис. 16), вплоть до слияния (на фазовом портрете рис. 16) локального минимума с седлом и их исчезновение после перехода вектора параметров $\lambda, \tilde{\mathcal{R}}, c$ через каустическую функцию $U = \frac{1}{2}(v^2 + \lambda u^2) + \frac{\tilde{\mathcal{R}}}{3}u^3 - cu$.

«Управляя» параметрами $\lambda, \tilde{\mathcal{R}}, c, d$, можно получить изображения всевозможных геометрических форм интегральных кривых и их расположений относительно системы координат u, v ($v := u'$) на фазовой плоскости. Рассматривая пересечения интегральными кривыми прямой $u = 0$, можно получить представление о тех фрагментах интегральных кривых, которые дают решение краевой задачи (2.71) – (2.72). Приближенные аналитические формулы для этих фрагментов можно получить, применив специальные вычислительные методы (например, методы использованные в [1], [2], [28], [42]).

2.10.3 Вариационный подход к анализу уравнения Джеффри-Гамеля. Случай нулевого значения числа Рейнольдса

Рассмотрим задачу (2.71) – (2.72) при $\tilde{\mathcal{R}} = 0$:

$$u'' + \lambda u = c, \quad u(0) = u(1) = 0, \quad \int_0^1 u \, d\theta = 1. \quad (2.75)$$

Решения задачи (2.75) являются критическими точками квадратичного функционала

$$\int_0^1 \frac{1}{2} ((u')^2 - \lambda u^2) \, d\theta \quad (2.76)$$

на гиперплоскости

$$\mathcal{M} = \{u \in H^1[0, 1] : \int_0^1 u \, d\theta = 1\} \quad (2.77)$$

в тройке $E = F = H = H^1[0, 1]$ (см. [28]).

Теорема 2.8. *Совокупность экстремалей сужения функционала (2.76) на гиперплоскость (2.77) есть объединение следующих серий векторов*

(при соответствующих значениях параметра λ):

$$s_{0,k} = \frac{\pi k}{2} \sin(\pi k \theta), \quad \lambda = \lambda_{0,k} := (\pi k)^2; \quad (\mathcal{S}_0)$$

$$s_{\varepsilon,k} = a(\varepsilon) \sigma_{\varepsilon}(\theta), \quad \sigma_{\varepsilon}(\theta) := \sin(\varepsilon + (\pi k - 2\varepsilon)\theta) - \sin(\varepsilon), \quad (\mathcal{S}_{\varepsilon})$$

$$\lambda = \lambda_{\varepsilon,k} := (\pi k - 2\varepsilon)^2; \quad k = 2m - 1, \quad m = 1, 2, \dots,$$

$a(\varepsilon)$ — величина, обратная к среднему значению функции $\sigma_{\varepsilon}(\theta)$;

$$s_{\varepsilon,2m} = \frac{1}{\sin(\varepsilon)} (\sin(2\pi m \theta - \varepsilon) + \sin(\varepsilon)) =$$

$$= \frac{1}{\sin(\varepsilon)} (\cos(\varepsilon) \sin(2\pi m \theta) + \sin(\varepsilon)(1 - \cos(2\pi m \theta))), \quad m = 1, 2, \dots, \quad (\mathcal{SC}_{\varepsilon})$$

$$\lambda = \lambda_{\varepsilon,2m} := (2\pi m)^2, \quad m = 1, 2, \dots;$$

$$f_{0,j} = 1 - \cos(2j\pi\theta), \quad \lambda = \mu_{0,j} := (2j\pi)^2; \quad (\mathcal{C}_0)$$

$$f_{\varepsilon,j} = b(\varepsilon) \rho_{\varepsilon}(\theta), \quad \rho_{\varepsilon}(\theta) = \cos(\varepsilon + 2(j\pi - \varepsilon)\theta) - \cos(\varepsilon), \quad (\mathcal{C}_{\varepsilon})$$

$$\lambda = \mu_{\varepsilon,j} := 4(j\pi - \varepsilon)^2, \quad j = 1, 2, \dots;$$

$b(\varepsilon)$ — величина, обратная к среднему значению функции $\rho_{\varepsilon}(\theta)$.

Доказательство проводится на основе общей формулы решений линейного неоднородного уравнения (2.75) с последующим подбором констант, соответствующих второму и третьему соотношениям в (2.75).

2.10.4 Случай ненулевого значения числа Рейнольдса. Нелокальная редукция Ляпунова-Шмидта

При малых значениях числа Рейнольдса экстремали функционала (2.74), суженного на гиперплоскость (2.77), можно вычислять как ветви экстремалей, зависящих от числа Рейнольдса, — посредством теории возмущений, основанной на непосредственном применении теоремы о неявной функции. При «конечных» значениях числа Рейнольдса возникает необходимость применения более мощных средств нелинейного анализа

[46], например, применения нелинейного метода Галеркина-Ритца по схеме Ляпунова-Шмидта.

Возможность нелокальной конечномерной редукции в краевой задаче (2.71) – (2.72) поясним сначала на простейшем примере: правая часть уравнения $x = \varepsilon(x - x^2 + x = 1)$ является сжимающим отображением $[-2, 2] \rightarrow [-2, 2]$ при достаточно малых значениях параметра ε . Зарождение свойства сжатия для отображения $x \rightarrow \varepsilon(x - x^2 + 1)$ отражено в следующих графиках.

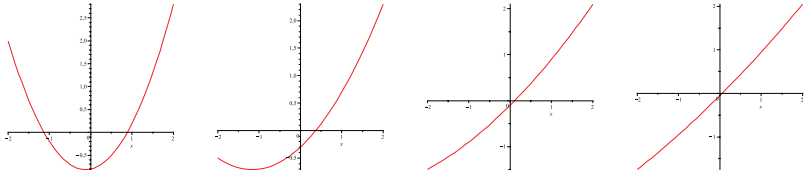


Рис. 17

Графики функции $f(x) = x - \varepsilon(x - x^2 + 1)$ при $\varepsilon = 0.8, 0.3, 0.1, 0.05$.

Аналогичный эффект сжимаемости имеет место и в случае общего операторного уравнения

$$x = \mathcal{B}(g(x, x) + \mathcal{C}x + c), \quad x \in F \quad (2.78)$$

в банаховом пространстве F , если норма $\|\mathcal{B}\|_F$ достаточно мала (здесь $g(x, x)$ — непрерывный квадратичный оператор $F \rightarrow F$, $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ — линейные непрерывные операторы $F \rightarrow F$, $c \in F$).

Свойство сжимаемости оператора $K(x) := \mathcal{B}(g(x, x) + \mathcal{C}x + c)$ позволяет разыскивать приближенные решения уравнения (2.78) посредством стандартных итераций $x_n = K(x_{n-1})$ [46].

Для осуществления нелокальной редукции Ляпунова-Шмидта в краевой задаче (2.71) – (2.72) запишем ее в виде операторного уравнения

$$f(w) := \mathcal{A}w - \lambda w + g(w, w) + c = 0, \quad w \in E, \quad (2.79)$$

где $E = C^2[0, 1] \cap \{w(0) = w(1) = 0\}$, $\mathcal{A} = -d^2/d\theta^2$, $g(w, w) := \tilde{\mathcal{R}} w^2$, $c = \text{const}$. Оператор f действует из E в $F = C[0, 1]$. Линейный оператор $\mathcal{A}$

является положительным и диагонализуемым:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} (\pi k)^2 \xi_k e_k, \quad (2.80)$$

$e_k = \frac{\sqrt{2}}{\pi k} \sin(\pi k \theta)$ — собственная функция оператора $\mathcal{A}$, отвечающая собственному значению $(\pi k)^2$. Заметим, что собственные функции e_k образуют ортонормированную систему в $H^1[0, 1]$.

Перепишем уравнение (2.79) в виде

$$w - \mathcal{A}^{-1}(g(w, w) + \lambda w - c), \quad w \in H^1[0, 1]. \quad (2.81)$$

Используя процедуру ортогонального разложения пространства в сумму подпространств, разобьем уравнение (2.81) в систему двух уравнений

$$\left. \begin{aligned} u - \mathcal{A}_1^{-1}(g_1(w, w)) + \lambda u - a &= 0, \\ v - \mathcal{A}_2^{-1}(g_2(w, w)) + \lambda v - b &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.82)$$

где $\mathcal{A}_1 := \mathcal{A}|_N$, $\mathcal{A}_2 := \mathcal{A}|_{N^\perp \cap E}$, $N := \text{Lin}(e_1, \dots, e_n)$, $w = u + v$, $u = \sum_{k=1}^n \xi_k e_k$, $v = \sum_{k=n+1}^{\infty} \xi_k e_k$, $a = \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k$, $b = \sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k e_k$, $\alpha_k = \langle c, e_k \rangle_1$. Второе уравнение системы (2.82) рассмотрим в пространстве функций $N^\perp \cap H^1[0, 1]$. Из спектральных свойств оператора $\mathcal{A}$ (см. (2.80)) вытекает, что при достаточно больших размерностях редукции n норма оператора $\mathcal{A}_2^{-1} : N^\perp \cap H^1 \rightarrow N^\perp \cap H^1$ становится малой и поэтому оператор $K(v) := \mathcal{A}_2^{-1}(g_2(u+v, u+v) + \lambda v - b)$ переводит некоторый шар $\|v\|_{H^1} \leq L$ (в $N^\perp \cap H^1$) в себя, являясь при этом сжимающим. То есть мы оказываемся в условиях второго замечания. Это означает, что решения второго уравнения системы (2.82) можно получать в аналитической форме

$$v = \Phi(u), \quad (2.83)$$

с любой наперед заданной точностью, посредством итераций $v_n = K(v_{n-1})$. Подставив выражение (2.83) в первое уравнение системы (2.82), получим так называемое ключевое уравнение

$$\tau(u) := f_1(u + \Phi(u)) = 0 \quad (2.84)$$

на конечномерном пространстве N . Все аналитические и топологические свойства исходного уравнения и его решений наследуются ключевым уравнением и его решениями [28]. Связь между решениями исходного и ключевого уравнений осуществляется формулой

$$w = u + \Phi(u).$$

Уравнение (2.84) является потенциальным с потенциалом (ключевой функцией)

$$W(u) := V(u + \Phi(u)), \quad u \in N.$$

Поиск и анализ экстремалей функционала V можно осуществлять посредством изучения экстремалей ключевой функции W . Вычисление функции W и анализ ее критических точек можно осуществлять по технологиям, изложенным в [6], [28], [42].

Заключительный этап предложенной здесь вычислительной схемы состоит в отборе тех решений задачи (2.71) – (2.72), для которых выполняется ограничение (2.73).

2.10.5 Области редуцируемости модельного уравнения

Посредством оценок размера образа отображения K и его константы Липшица можно точно указать область, на которой допускается конечномерная редукция уравнения $w = K(w)$.

Предварительно заметим, что имеют место следующие неравенства:

$$\|w\|_F \leq \|w\|_1 \quad \forall w \in H^1, \quad \|\mathcal{A}_2^{-1}(v)\|_1 \leq \frac{1}{\pi^2(n+1)^2} \|v\|_1 \quad \forall v \in N^\perp \cap H^1 \quad (2.85)$$

(см. (2.80)). Следовательно,

$$\|g(w.w)\|_1 = 2\sqrt{\int_0^1 (ww')^2 d\theta} \leq 2\|w\|_F \|w\|_1 \leq 2\|w\|_1^2. \quad (2.86)$$

Пусть $w \in T_L = \{w \in H^1[0, 1] : \|w\|_1 \leq L\}$. Из оценки (2.86) получаем

$$\|K(v)\|_1 = \|\mathcal{A}_2^{-1}(\lambda v + g_2(w.w) - b)\|_1 \leq \frac{1}{\pi^2(n+1)^2} (\lambda L + 2L^2 + \beta), \quad (2.87)$$

где $\beta = \|b\|_1$. Следовательно, если $\|K(v)\|_1 \leq L$, то оператор K переводит шар T_L в себя. Последнее утверждение справедливо в случае выполнения соотношения (см. (2.87))

$$\frac{1}{\pi^2(n+1)^2} (\lambda L + 2L^2 + \beta) \leq L$$

или

$$L^2 - pL + q \leq 0, \quad (2.88)$$

где $p = \frac{\pi^2(n+1)^2 - \lambda}{2}$, $q = \frac{\beta}{2}$. Для обеспечения свойства сжимаемости оператора $K : T_L \rightarrow T_L$ обратимся к оценке нормы разности значений K в произвольной паре точек v_1, v_2 :

$$\begin{aligned} \|K(v_2) - K(v_1)\|_1 &= \|\mathcal{A}_2^{-1}(\lambda(v_2 - v_1) + \mathcal{R}((u + v_2)^2 - (u + v_1)^2))\|_1 \leq \\ &\leq \frac{1}{\pi^2(n+1)^2} (\lambda + 4L) \|v_2 - v_1\|_1. \end{aligned}$$

Получаем то, что для обеспечения свойства сжимаемости K достаточно потребовать выполнения условия

$$\gamma := \frac{1}{\pi^2(n+1)^2} (\lambda + 4L) < 1, \quad (2.89)$$

или, что одно и тоже, условия

$$\lambda + 4L < \pi^2(n+1)^2. \quad (2.90)$$

Таким образом, установлено следующее утверждение:

Теорема 2.9. *При выполнении условий (2.88), (2.90) и при $\|u\|_1 \leq L$, оператор $K(v) := \mathcal{A}_2^{-1}(\mathcal{R}(u + v)^2 + \lambda v - b)$ переводит шар $T_L = \{v \in H^1[0, 1] : \|v\|_1 \leq L\}$ в себя и является сжимающим отображением $T_L \rightarrow T_L$.*

Замечание 2.5. *Константа γ (см. (2.89)) позволяет оценивать скорость сходимости итераций $v_{m+1}(u) = K(v_m(u))$ к редуцирующему отображению $\Phi(u)$:*

$$\|v_m(u) - \Phi(u)\|_1 \leq \gamma^m \frac{\mathcal{D}}{1 - \gamma}, \quad \mathcal{D} = \frac{RL + \beta}{\pi^2(n+1)^2}.$$

2.10.6 Примеры эпор скоростей стационарных течений, соответствующих экстремалам V

Ниже приведены примеры приближенно вычисленных эпор скоростей на окружности $r = 1$ для течений, близких к n -модовым, $n \leq 5$.

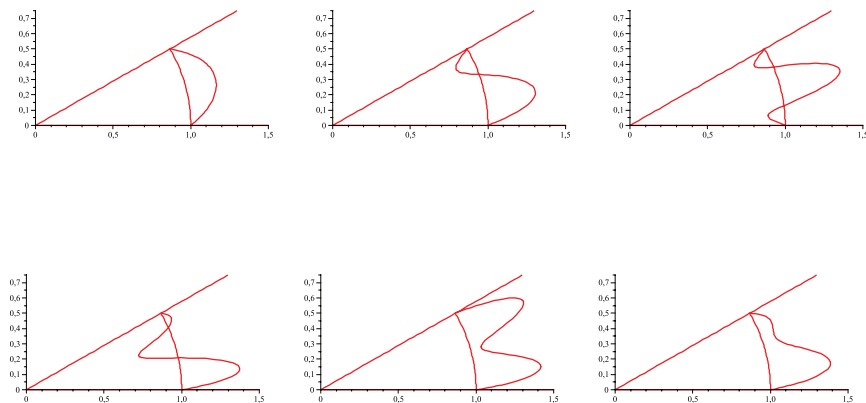


Рис. 18

Эпоры скоростей для течений, близких к n -модовым, $n \leq 5$.

Замечание 2.6. Вслед за вычислением поля скоростей можно вычислить давление непосредственно на основе (2.63) (уравнения Навье-Стокса в полярных координатах).

Глава 3

Дополнение

3.1 Элементы коммутативной алгебры

3.1.1 Коммутативные кольца

Определение 3.1. Коммутативным кольцом называется тройка $\{\mathcal{A}, +, \cdot\}$, в которой $\mathcal{A}$ — множество, а $+$ и $\cdot$ — фиксированные внутренние операции на $\mathcal{A}$, называемые сложением и умножением, для которых выполняются следующие соотношения (аксиомы кольца):

- 1) $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ — коммутативность сложения,
- 2) $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$ — ассоциативность сложения,
- 3) $\exists 0: 0 + a = a \quad \forall a$ — существование нуля (нейтрального по сложению элемента),
- 4) $\forall \alpha \exists \bar{\alpha}: \alpha + \bar{\alpha} = 0$ — существование противоположного по сложению элемента,
- 5) $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$ — коммутативность умножения,
- 6) $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$ — ассоциативность умножения,
- 7) $\exists 1: 1 \cdot a = a \quad \forall a$ — существование единицы (нейтрального по умножению элемента),
- 8) $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$ — дистрибутивность умножения относительно сложения.

В теории колец противоположный по сложению элемент $\bar{x}$ обозначается $-x$, а сумма $x + (-y)$ записывается в виде разности $x - y$.

Если в условиях предыдущего определения отменить аксиому 5 (коммутативность умножения) и аксиому 7 (существование единицы), а акси-

ому 9 дополнить соотношением

$$(\beta + \gamma) \cdot \alpha = \beta \cdot \alpha + \gamma \cdot \alpha$$

(правой дистрибутивностью), то получится определение (общего) кольца. Если сохранить аксиому 7, дополнив ее соотношением $\alpha \cdot 1 = \alpha$, то получится алгебраический объект, называемый кольцом с единицей. Каждое коммутативное кольцо является кольцом. Если достоверно известно, что в заданном кольце $\mathbb{A}$ имеются элементы α, β , для которых $\alpha \cdot \beta \neq \beta \cdot \alpha$, то это кольцо называется некоммутативным.

Пусть $\mathcal{A}$ — коммутативное кольцо (с операциями $\{+, \cdot\}$), а $\mathcal{B}$ — подмножество множества $\mathcal{A}$, замкнутое относительно операций сложения и умножения:

$$\alpha - \beta \in \mathcal{B}, \alpha \cdot \beta \in \mathcal{B} \quad \forall \alpha, \beta \in \mathcal{B}.$$

Тогда $\mathcal{B}$ называется *подкольцом* кольца $\mathcal{A}$. Если подкольцо $\mathcal{I}$ обладает *идеальным свойством*, заключенным в соотношении

$$\alpha \cdot x \in \mathcal{I} \quad \forall \alpha \in \mathcal{I} \quad \forall x \in \mathcal{A},$$

то $\mathcal{I}$ называется *идеалом* кольца $\mathcal{A}$.

На основе идеалов можно получать новые кольца, называемые факторкольцами. Факторкольцо по идеалу $\mathcal{I}$ получается посредством разбиения $\mathcal{A}$ на факторклассы по следующему отношению эквивалентности:

$$x \sim y \iff x - y \in \mathcal{I}. \quad (3.1)$$

(выполняются следующие три свойства: 1) $x \sim x \quad \forall x$, 2) $x \sim y \implies y \sim x$ и 3) $(x \sim y) \wedge (y \sim z) \implies x \sim z$).

Соотношение (3.1) иногда записывают в виде так называемого сравнения по $\text{mod } \mathcal{I}$:

$$x \equiv y \quad (\text{mod } \mathcal{I}).$$

Случай невыполнения соотношения (3.1) записывается в виде

$$x \not\equiv y \quad (\text{mod } \mathcal{I}).$$

Факторклассы по данному отношению эквивалентности называются также *классами вычетов* по $\text{mod } \mathcal{I}$. Факторкласс элемента x будем обозначать $[x]$. Множество всех факторклассов обозначается символом $\mathcal{A}/\mathcal{I}$. В $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ естественным образом индуцируются операции сложения и умножения:

$$[x] + [y] = [x + y], \quad [x] \cdot [y] = [x \cdot y]. \quad (3.2)$$

Определения «кольцевых» операций через соотношения (3.2) корректны (не зависят от выбора представителей x, y в факторклассах). Для определенных кольцевых операций в факторе $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ (см. соотношения (3.2)) выполняются такие же алгебраические свойства (аксиомы кольца), которые выполняются в кольце $\mathcal{A}$.

Идеал $\mathcal{I}$, порожденный одним элементом a ($\forall u \in \mathcal{I} \exists v, u = va$), называется *главным*, а идеал $\mathcal{I}$, порожденный конечным набором элементов $a_1, \dots, a_m$ ($\forall u \in \mathcal{I} \exists v_1, \dots, v_m, u = a_1v_1 + \dots + a_mv_m$), называется *конечно порожденным*. Коммутативное кольцо, в котором все идеалы конечно порождены, называются *нетеровыми*. Существуют нетеровы кольца, в которых все идеалы главные (например, кольцо целых чисел и кольцо многочленов одной переменной).

3.1.2 Кольцо целых чисел

Целое число m называется *делителем* (*множителем*) целого числа n , если $n = m \cdot q$ для некоторого $q \in \mathbb{Z}$. Делимость n на m обозначается символом $m|n$ (читается « m делит n »). Отличное от единицы положительное целое число p называется *простым*, если оно обладает лишь тривиальными делителями $\pm p, \pm 1$.

Нетривиальные делители называются *собственными делителями* числа.

Теорема 3.1. (основная теорема арифметики) Если $n \in \mathbb{Z}$ и $n > 1$, то n может быть записано в виде произведения простых чисел

$$n = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_l$$

и эта запись является единственной (если игнорировать порядок множителей).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы вытекает из свойств делимости:

$$k|m \wedge k|n \implies k|(m+n),$$

$$m|n \implies m|nq \quad \forall q \in \mathbb{Z}$$

и из следующего утверждения.

Теорема 3.2. (теорема о делении с остатком) Для любой пары $m, n \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$, найдется единственная пара $q, r \in \mathbb{Z}$ такая, что

$$0 \leq r < |m|,$$

$$n = mq + r.$$

Числа q и r из последней теоремы называются соответственно *частным* и *остатком* от деления n на m .

Каждое целое число n однозначно представляется в виде

$$n = \pm p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \cdot \dots \cdot p_k^{r_k}, \quad (3.3)$$

где $p_1, \dots, p_k$ — простые числа, $p_1 < \dots < p_k$, $r_j \in \mathbb{Z}$, $r_j > 0 \quad \forall j$. Разложение (3.3) называется *каноническим разложением целого числа на простые множители*.

Множество $q\mathbb{Z} = \{n \in \mathbb{Z} : n = q \cdot m, m \in \mathbb{Z}\}$ является идеалом в $\mathbb{Z}$. Идеалы вида $q\mathbb{Z}$ исчерпывают всю совокупность идеалов в кольце $\mathbb{Z}$. Докажите, что факторкольцо $\mathbb{Z}_p := \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ является полем тогда и только тогда, когда p — простое число.

Замечание 3.1. Таким образом, $\mathbb{Z}$ — кольцо главных идеалов.

3.1.3 Кольцо многочленов от одной переменной.

Существуют две точки зрения на многочлен. Согласно первой из них (формальной), многочлен — это алгебраическое выражение вида $f =$

$\sum_{j=0}^n a_j x^j$ (формальная сумма), в котором x — формальный символ, имеваемый *переменной*, а a_j — константы из некоторого поля $\mathbb{P}$.

Согласно второй точке зрения (неформальной), многочлен — это функция f , областью определения и областью значений которой является некоторое поле $\mathbb{P}$ и которая задается формулой $f(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j$. Мы будем придерживаться первой точки зрения. Термин «переменная» оставляет нам возможность использования и второго подхода: иногда мы будем подставлять вместо x конкретные константы α из поля $\mathbb{P}$ и писать $f(\alpha) = \sum_{j=0}^n a_j \alpha^j$. Элемент $f(\alpha)$ из заданного поля называется *значением многочлена f при $x = \alpha$* .

Если все константы a_j (*коэффициенты многочлена f*) принадлежат полю $\mathbb{P}$, то говорят, что многочлен f *задан над полем $\mathbb{P}$* .

Множество всех многочленов над полем $\mathbb{P}$ от переменной x обозначается $\mathbb{P}[x]$.

Элемент $\alpha \in \mathbb{P}$ называется *корнем* многочлена $f \in \mathbb{P}[x]$, если $f(\alpha) = 0$.

Основной задачей алгебры многочленов является *исследование всех корней* произвольного многочлена. Под исследованием корней подразумевается доказательство *существования корней*, оценка *количества корней*, описание *расположения корней* и разработка *алгоритмов точного или приближенного вычисления корней*.

Два многочлена $f(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j$ и $g(x) = \sum_{k=0}^m b_k x^k$ называются равными ($f = g$), если $a_j = b_j \quad \forall j$ ¹. Если старший коэффициент a_n многочлена $f(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j$ отличен от нуля, то целое число n называется *степенью* данного многочлена и обозначается $\deg(f)$.

Выражение вида ax^k называется *одночленом* или *мономом k -го порядка*. Многочлен, равный константе ($f \equiv a$, $a \neq 0$), имеет нулевую степень. Многочлен, равный нулю (который можно также записать в виде $f = 0 + 0x + \dots + 0x^n$), имеет степень, по определению равную $-\infty$.

Для многочленов естественным образом вводятся операции сложения

¹В случае $m < n$ в этих соотношениях предполагается, что $b_{m+j} = 0 \quad \forall j > 0$.

и умножения. Суммой многочленов $f = \sum_{j=0}^n a_j x^j$ и $g = \sum_{k=0}^m b_k x^k$ называется многочлен

$$h = \sum_{j=0}^p c_j x^j, \quad p = \max\{m, n\}, \quad c_j = a_j + b_j.$$

Если $n > m$, то при сложении f и g к многочлену g формально приписываются слагаемые $0x^k$, $m < k \leq n$. Отсутствие мономиального слагаемого в реальной записи произвольного многочлена необходимо воспринимать как ситуацию, равносильную его записи с нулевым коэффициентом при данном мономе. Если мономиальный коэффициент равен единице, то он при записи опускается. Вместо x^1 обычно записывают x , а вместо x^0 пишется 1. Пример: $x^4 + x - 1 = 0x^5 + 1x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 1x^1 + (-1)x^0$.

Произведением многочленов f и g называется многочлен

$$\varphi = \sum_{j=0}^{m+n} d_j x^j, \quad d_j = \sum_{k=0}^j a_k b_{j-k}.$$

Из определения произведения вытекает равенство

$$\deg(fg) = \deg(f) + \deg(g).$$

Ясно, что $\deg(f + g) \leq \max\{\deg(f), \deg(g)\}$.

Множество $\mathbb{P}[x]$ многочленов над полем $\mathbb{P}$ с введенными выше операциями сложения и умножения образуют коммутативное кольцо с единицей. Очевидно, что не существуют многочлены, обладающие обратными многочленами по умножению (кроме тривиального случая многочлена, равного ненулевой константе).

Кольцо $\mathbb{P}[x]$ является областью целостности (то есть в нем из каждого равенства $a \cdot b = 0$ следует $a = 0$ или $b = 0$).

Многочлен $g \in \mathbb{P}[x]$ называется *делителем* многочлена $f \in \mathbb{P}[x]$ (пишется $g|f$), если $f = gq$, $q \in \mathbb{P}[x]$. Очевидны следующие свойства делимости многочленов (над произвольным полем):

- 1) $h|g \wedge g|f \implies h|f$,
- 2) $h|g \wedge h|f \implies h|(g + f)$,
- 3) $h|g \implies h|gf \quad \forall f \in \mathbb{P}[x]$.

Известно, что для каждого $f \in \mathbb{P}[x]$ и каждого $\alpha \in \mathbb{P}$ найдутся $q \in \mathbb{P}[x]$ и $c \in \mathbb{P}$, такие, что

$$f = (x - \alpha)q + c. \quad (3.4)$$

Равенство (3.4) выполняется тогда и только тогда, когда $f(\alpha) = c$. Это равенство (3.4) однозначно определяет q и c .

Следующее утверждение является следствием теоремы 3.4.

Теорема 3.3. (Безу) *Многочлен f делится на $x - \alpha$ (без остатка) тогда и только тогда, когда α — корень f .*

Из теоремы Безу моментально следует оценка количества корней многочлена его степенью.

Теорема 3.4. *Каждый многочлен степени $n > 0$ над любым полем $\mathbb{P}$ имеет не более n корней.*

Определение 3.2. *Говорят, что константа α является корнем кратности r ($r > 0$) многочлена f , если*

$$f = (x - \alpha)^r q, \quad q(\alpha) \neq 0.$$

В случае $r = 1$ корень α называется простым.

Если $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ — список всех имеющихся в $\mathbb{P}$ корней многочлена $f \in \mathbb{P}[x]$, составленный с условием, что каждый корень входит в него столько раз, какова его кратность, то говорят, что $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ — *набор всех корней f с учетом кратности.*

Теорема 3.5. *Каждый многочлен степени $n > 0$ над любым полем $\mathbb{P}$ имеет не более n корней с учетом кратности.*

Доказательство с очевидностью вытекает из теоремы Безу.

Теорема 3.6. (основная теорема алгебры) *Каждый многочлен степени $n > 0$ над полем $\mathbb{C}$ имеет хотя бы один комплексный корень.*

Теорема 3.7. *Каждый многочлен степени $n > 0$ над полем $\mathbb{C}$ имеет ровно n корней с учетом кратности.*

Замечание 3.2. *Если $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ — набор всех корней f , выписанных по одному разу (без учета кратности), то*

$$f = c(x - \beta_1)^{r_1}(x - \beta_2)^{r_2} \dots (x - \beta_m)^{r_m},$$

где r_j — кратность корня β_j .

Теорема 3.8. (о тождестве многочленов) *Если $f, g \in \mathbb{P}[x]$ — пара многочленов степени $< n$, для которых выполняется условие совпадения значений в n узлах:*

$$\exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{P} \ (\alpha_i \neq \alpha_j, \ \forall i, j : i \neq j) : \quad f(\alpha_j) = g(\alpha_j) \quad \forall j,$$

то $f = g$.

Доказательство. Рассмотрим многочлен $\varphi = f - g$. Степень φ меньше n и, с другой стороны, этот многочлен имеет не менее n корней: $\varphi(\alpha_j) = 0, \ \forall j$. Так как количество корней ненулевого многочлена не превосходит его степени, то остается сделать единственное оставшееся заключение: $\varphi = 0$ или $f = g$.

Теорема 3.9. (интерполяционная) *Для любого набора попарно различных констант $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{P}$ и любого набора констант $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ из этого же поля найдется единственный многочлен f степени $< n$, для которого:*

$$f(\alpha_j) = \beta_j, \quad \forall j.$$

Доказательство. Существование многочлена устанавливается предъявлением формулы (интерполяционной формулы Лагранжа):

$$f = \sum_{j=1}^n \beta_j \omega_j,$$

в которой ω_j — многочлен, определяемый соотношениями:

$$\omega_j(\alpha_k) = \delta_{jk} \quad ().$$

Последние соотношения однозначно определяют ω_j :

$$\omega_j = c_j(x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_{j-1})(x - \alpha_{j+1}) \dots (x - \alpha_n),$$

$$c_j = 1 / (\alpha_j - \alpha_1) \dots (\alpha_j - \alpha_{j-1})(\alpha_j - \alpha_{j+1}) \dots (\alpha_j - \alpha_n).$$

Окончательно имеем

$$f = \sum_{j=1}^n \beta_j \frac{(x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_{j-1})(x - \alpha_{j+1}) \dots (x - \alpha_n)}{(\alpha_j - \alpha_1) \dots (\alpha_j - \alpha_{j-1})(\alpha_j - \alpha_{j+1}) \dots (\alpha_j - \alpha_n)}.$$

Так как $\deg(\omega_j) = n - 1$, то $\deg(f) < n$.

Единственность f вытекает из теоремы о тождестве многочленов.

Теорема 3.10. Для любой пары $f, g \in \mathbb{P}[x]$, $g \neq 0$, найдется единственная пара $q, r \in \mathbb{P}[x]$, $\deg(r) < \deg(g)$, для которой

$$f = qg + r \quad (3.5)$$

Замечание 3.3. Многочлены q и r называются частным и остатком от деления f на g .

Доказательство. Существование пары q, r . Пусть $f(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j$ и $g(x) = \sum_{k=0}^m b_k x^k$, $a_n \neq 0$. Если $n < m$, то можно положить $q = 0$, $r = f$. Пусть $n \geq m$. Тогда рассмотрим многочлен $q_1 = \frac{a_n}{b_m} x^{n-m}$, для которого имеем $\deg(f - g q_1) < n$. Пусть $f_1 = \deg(f - g q_1)$. Если $\deg(f_1) < m$, то положим $q = q_1$, $r = f_1$ и прекращаем рассуждение. Если $\deg(f_1) \geq m$, то вновь повторяем предыдущее рассуждение с заменой f на f_1 . Получим многочлен q_2 , для которого $\deg(f_1 - g q_2) < \deg(f_1)$. И так далее. После нескольких шагов получаем два набора многочленов $q_1, \dots, q_p$ и $f_1, \dots, f_p$, для которых

$$\begin{cases} f &= g q_1 + f_1, & \deg(f_1) < \deg(f), \\ f_1 &= g q_2 + f_2, & \deg(f_2) < \deg(f_1), \\ \dots & \dots \\ f_{p-1} &= g q_p + f_p, & \deg(f_p) < \deg(f_{p-1}), \\ & & \deg(f_p) < m \end{cases} \quad (3.6)$$

(так как степени многочленов f_j убывают, то появится номер p , при котором $\deg(f_p) < m$).

Из системы равенств (3.6) получаем соотношение $f = gq + r$, $\deg(r) < m$, в котором $q = q_1 + \dots + q_p$, $r = f_p$.

Единственность пары q, r . Предположим противное: существует вторая пара $\tilde{q}, \tilde{r}$, для которой

$$f = g\tilde{q} + \tilde{r}, \quad \deg(\tilde{r}) < m.$$

Вычитая последнее равенство из равенства (3.5), получим

$$g(q - \tilde{q}) + (r - \tilde{r}) = 0$$

или

$$g(q - \tilde{q}) = (\tilde{r} - r) \tag{3.7}$$

Так как

$$\deg(\tilde{r} - r) \leq \max\{\deg(\tilde{r}), \deg(r)\} < \deg(g)$$

$$\deg(g(q - \tilde{q})) \geq \deg(g)$$

(если $q \neq \tilde{q}$), то равенство (3.7) выполняться не может. Полученное противоречие означает справедливость утверждения теоремы.

Определение 3.3. Многочлен $d \neq 0$ называется наибольшим общим делителем многочленов f, g ($d = (f, g)$), если d — общий делитель f и g , и d не является делителем любого другого общего делителя многочленов f и g ².

Теорема 3.11. Пусть $d = (f, g)$. Тогда найдется такая пара многочленов φ, ψ , что

$$\varphi f + \psi g = d. \tag{3.8}$$

²Если d является делителем другого многочлена $\tilde{d}$ той же степени, то $d = c\tilde{d}$, $c = \text{const.}$ Такие пары многочленов называются *ассоциированными* многочленами.

Доказательство основано на применении *алгоритма Евклида*, представляющего собой следующую систему соотношений:

$$\begin{cases} f &= g q_1 + r_1, & \deg(r_1) < \deg(g), \\ g &= r_1 q_2 + r_2, & \deg(r_2) < \deg(r_1), \\ \dots & & \dots \\ r_{n-2} &= r_{n-1} q_n + r_n, & \deg(r_n) < \deg(r_{n-1}), \\ r_{n-1} &= r_n q_{n+1}. \end{cases} \quad (3.9)$$

Здесь r_n — последний ненулевой остаток. Из системы равенств (3.9) следует, что r_n является линейной комбинацией предыдущих остатков r_{n-1} и r_{n-2} , которые в свою очередь линейно выражаются через «более ранние» остатки. «Поднимаясь» по системе (3.9), получим в итоге искомое представление r_n в виде линейной комбинации (3.8) исходных многочленов f, g .

Следующие утверждения являются следствиями теоремы 3.11.

Теорема 3.12. *Два любых наибольших общих делителя одной пары многочленов отличаются лишь постоянным множителем (то есть являются ассоциированными).*

Теорема 3.13. *Многочлены f, g являются взаимно простыми (то есть не имеющими общих множителей положительной степени) тогда и только тогда, когда для некоторой пары многочленов φ, ψ выполняется равенство*

$$\varphi f + \psi g = 1.$$

В равенстве (3.8) можно подобрать многочлены φ, ψ , удовлетворяющие требованиям

$$\deg(\varphi) < \deg(g), \quad \deg(\psi) < \deg(f).$$

Замечание 3.4. *Если $\varphi|fg$ и многочлен φ взаимно прост с множителем g , то $\varphi|f$. Многочлен φ взаимно прост с множителем $h = fg$, если φ взаимно прост с каждым из множителей f и g .*

Пусть теперь каждый из многочленов $f_1, \dots, f_n$ взаимно прост с каждым из многочленов $g_1, \dots, g_m$. Тогда $f_1 \cdot \dots \cdot f_n$ и $g_1 \cdot \dots \cdot g_m$ — взаимно простые многочлены.

Взаимно простые многочлены $f, g \in \mathbb{P}[x]$ не имеют в $\mathbb{P}$ общих корней: $f(\alpha) = 0 \implies g(\alpha) \neq 0, \alpha \in \mathbb{P}$.

Определение 3.4. *Отличный от константы многочлен $\varphi \in \mathbb{P}[x]$ называется неприводимым над $\mathbb{P}$, если он не имеет нетривиальных множителей в $\mathbb{P}[x]$. В противном случае многочлен называется приводимым.*

Пример: многочлен $f = x^4 - 2$ неприводим над $\mathbb{Q}$, но приводим над $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$. Над $\mathbb{R}$ он разлагается в произведение трех множителей (неприводимых):

$$f = (x^2 + 2^{\frac{1}{2}})(x - 2^{\frac{1}{4}})(x + 2^{\frac{1}{4}}),$$

а над $\mathbb{C}$ — в произведение четырех неприводимых множителей:

$$f = (x - i2^{\frac{1}{4}})(x + i2^{\frac{1}{4}})(x - 2^{\frac{1}{4}})(x + 2^{\frac{1}{4}}).$$

Теорема 3.14. *Любой полином $f \in \mathbb{P}[x]$ положительной степени может быть представлен в виде произведения неприводимых над $\mathbb{P}$ полиномов:*

$$f = g_1 \cdot \dots \cdot g_m. \quad (3.10)$$

Это представление является единственным (если игнорировать порядок множителей и не различать ассоциированные многочлены).

Доказательство. *Существование разложения (3.10). Любой приводимый полином может быть представлен в виде произведения*

$$f = \varphi_1 \cdot f_1, \quad 0 < \deg(\varphi_1) < \deg(f), \quad 0 < \deg(f_1) < \deg(f).$$

Если φ_1, f_1 — неприводимые многочлены, то данное разложение является искомым. Если нет, то нужно разложить в произведение нетривиальных

множителей соответствующий приводимый множитель и т.д. После конечного количества таких разложений получим искомое результирующее разложение многочлена f .

Единственность разложения (3.10). Предположим, от противного, что $f = g_1 \cdot \dots \cdot g_m$ и $f = h_1 \cdot \dots \cdot h_n$ — два различных разложения. Без ущерба для общности рассуждения можно предположить, что списки $\{g_1, \dots, g_m\}$ и $\{h_1, \dots, h_n\}$ не содержат общих многочленов (в противном случае можно произвести сокращение на общий множитель). Единственность теперь вытекает из следующего утверждения.

Лемма 3.1. *Пусть произведение $g_1 \cdot \dots \cdot g_m$ делится на неприводимый многочлен h . Тогда один из множителей g_j делится на h .*

Доказательство леммы. Если h не делит g_j , то h взаимно прост с g_j . Если h взаимно прост с каждым из многочленов g_j , то он взаимно прост и с их произведением и, следовательно, не является делителем этого произведения.

Замечание 3.5. *Разложение (3.10) можно переписать в виде*

$$f = c h_1^{k_1} \cdot \dots \cdot h_r^{k_r}, \quad c \in P, \quad (3.11)$$

где $h_1, \dots, h_r$ — попарно различные неприводимые и унитарные (то есть с единичными старшими коэффициентами) многочлены, $k_j > 0 \ \forall j$. Разложение (3.11) называется каноническим.

Теорема 3.15. *Для любого поля $\mathbb{P}$ в $\mathbb{P}[x]$ существует бесконечно много неприводимых многочленов.*

Доказательство. Пусть $\{g_1, \dots, g_m\}$ — набор неприводимых полиномов. Тогда полином $h = 1 + g_1 \cdot \dots \cdot g_m$ либо неприводим, либо делится на неприводимый полином g , не входящий в список $\{g_1, \dots, g_m\}$ (ибо в противном случае единица делилась бы на g). Таким образом, любой список неприводимых полиномов можно пополнить новым неприводимым полиномом.

Из предыдущих теорем вытекает следующее утверждение.

Теорема 3.16. $\mathbb{P}[x]$ — кольцо главных идеалов.

3.1.4 Кольцо многочленов от нескольких переменных.

Пусть зафиксировано поле $\mathbb{P}$ и заданы формальные символы $x_1, \dots, x_n$, именуемые в дальнейшем *переменными*. Выражение вида

$$f = \sum_{(k_1, \dots, k_n) \in K} a_{k_1 \dots k_n} x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n},$$

где K — конечное подмножество в $\mathbb{Z}_+^n = \underbrace{\mathbb{Z}_+ \times \dots \times \mathbb{Z}_+}_n$, $\mathbb{Z}_+ = \{n \in \mathbb{Z} : n \geq 0\}$, называется полиномом от n переменных.

Два полинома считаются равными, если равны соответствующие коэффициенты этих разложений. Выражение вида $\varphi = ax_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}$ называется *одночленом* или *мономом*.

Если ввести мультииндекс $k = (k_1, \dots, k_n)$, $k_j \in \mathbb{Z}_+$, и положить $x^k = x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}$, то для мономов и полиномов можно использовать более краткие записи ax^k и $\sum_{k \in K} a_k x^k$. Целое число $|k| = k_1 + \dots + k_n$ называется *порядком* или *степенью* монома ax^k . Число

$$\deg(f) := \max\{|k| : a_k \neq 0\}$$

называется *степенью полинома* $\sum_{k \in K} a_k x^k$.

После перехода к кратким (векторным) обозначениям действия над полиномами записываются аналогично действиям над полиномами от одной переменной.

Сложение и *умножение* полиномов определяются соотношениями

$$\begin{aligned} \sum_k a_k x^k + \sum_k b_k x^k &= \sum_k (a_k + b_k) x^k, \\ \left(\sum_k a_k x^k \right) \cdot \left(\sum_r b_r x^r \right) &= \sum_q c_q x^q, \\ c_q &= \sum_{k+r=q} a_k b_r. \end{aligned}$$

Соотношение $k + r = q$ здесь употребляется в векторном смысле: $k_j + r_j = q_j \quad \forall j$.

Замечание 3.6. Множество полиномов от переменных $x_1, \dots, x_n$ с введенными выше операциями сложения и умножения образуют коммутативное кольцо с единицей, обозначаемое $\mathbb{P}[x_1, \dots, x_n]$.

Говорят, что моном x^k старше монома x^s (пишется $x^k \succ x^s$), если $|k| > |s|$ или $|k| = |s|$ и $k - s = (0, \dots, 0, r, \dots, l)$, $r > 0$. Установленный таким образом порядок, называемый *d-лексикографическим*, выделяет в каждом многочлене единственный *старший моном*:

$$f = a_k x^k + \dots$$

Многоточием обозначен «остаток» полинома, включающий все остальные мономы (отличные от старшего): если остаток содержит моном $a_s x^s$ ($a_s \neq 0$), то $x^k \succ x^s$.

Если $a_k x^k$ и $b_s x^s$ — старшие мономы многочленов f и g , то $a_k b_s x^{k+s}$ — старший моном многочлена fg . При этом

$$\deg(fg) = \deg(f) + \deg(g), \quad \forall f, g \in \mathbb{P}[x_1, \dots, x_n].$$

Теорема 3.17. $\mathbb{P}[x_1, \dots, x_n]$ — нетерово кольцо.

Эта теорема является следствием теоремы Д.Гильберта о нулях многочленов [14].

3.1.5 Симметрические многочлены

Многочлен $f = \sum_{k \in K} a_k x^k \in \mathbb{P}[x_1, \dots, x_n]$ называется *симметрическим*, если он не изменяется при произвольной перестановке переменных. То есть

$$f(x_1, \dots, x_n) \equiv f(x_{\varphi(1)}, \dots, x_{\varphi(n)}) \quad \forall \varphi \in S_n$$

— при «неформальном рассмотрении» многочленов и

$$\sum_{k \in K} a_k x^k = \sum_{k \in K} a_k x^{\varphi(k)}, \quad \forall \varphi \in S_n$$

— при «формальном рассмотрении» многочленов (S_n — группа подстановок множества $\{1, \dots, n\}$).

Рассмотрим два основных примера симметрических полиномов.

1). Элементарные симметрические полиномы:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= x_1 + \dots + x_n, \\ \sigma_2 &= x_1 x_2 + \dots + x_{n-1} x_n, \\ &\dots \dots \\ \sigma_n &= x_1 \dots x_n.\end{aligned}$$

2). Суперпозиция с элементарными симметрическими полиномами:

$$f(x_1, \dots, x_n) = g(\sigma_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \sigma_n(x_1, \dots, x_n))$$

$$\forall g \in \mathbb{P}[x_1, \dots, x_n].$$

Замечание 3.7. Пусть σ_k — элементарный симметрический полином k -той степени. тогда $x_1 \dots x_k$ — его старший моном.

Если $a_k x^k$ — старший моном произвольного симметрического многочлена, то компоненты k не возрастают: $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_n$.

Теорема 3.18. (основная) Для любого симметрического полинома $f \in \mathbb{P}[x_1, \dots, x_n]$ найдется единственный полином $g \in \mathbb{P}[x_1, \dots, x_n]$, такой, что

$$f(x_1, \dots, x_n) = g(\sigma_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \sigma_n(x_1, \dots, x_n)).$$

Множество симметрических полиномов обозначается $\mathbb{P}_s[x_1, \dots, x_n]$.

Теорема 3.19. $\mathbb{P}_s[x_1, \dots, x_n]$ — нетерова кольцо.

3.1.6 Многочлены от двух переменных с поворотной симметрией

Говорят что, функция $V(z)$, $z \in \mathbb{C}$ обладает поворотной симметрией, если

$$V(z) = V(e^{\frac{2\pi i}{n}} z), \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

(n — фиксированное целое число).

Пусть $\{\omega_j\}$ — система корней n -ой степени из единицы. Рассмотрим многочлены

$$\Omega_1(z) = \prod_{j=0}^{n-1} (\omega_j, z), \quad z = x + iy \sim (x, y),$$

$$\Omega_2(z) = \prod_{j=0}^{n-1} (\tilde{\omega}_j, z), \quad \tilde{\omega}_j = \omega_j \cdot a, \quad |a| = 1,$$

$$a = e^{i\theta},$$

θ — любое фиксированное число $0 < \theta < \frac{2\pi}{n}$. Таким образом $\Omega_a(z) = \prod_{j=0}^{n-1} (a\omega_j, z)$. Очевидно, что многочлены Ω_1, Ω_2 обладают поворотной симметрией. В поворотной симметрии выделяют подслучая:

$n = 2m$ — четный порядок, $n = 2m + 1$ — нечетный порядок.

Лемма 3.2. Пусть $V(z)$ — однородный n -симметричный многочлен. Если $V(b) = 0$, то для некоторого a многочлен $V(z)$ делится без остатка на многочлен

$$\Omega_a(z) = \prod_{j=0}^{n-1} (a\omega_j, z),$$

то есть

$$V(z) = \Omega_a(z) \cdot g(z),$$

для некоторого a .

Доказательство. По условию $V(b) = 0$. Пусть $a = e^{i\theta}$ — такое комплексное число, что $\omega a \perp b$. Тогда $(\omega a, b) = 0$, то есть b — нуль многочлена $(\omega a, z)$, и многочлен

$$\Omega_a(z) = \prod_{j=0}^{n-1} (a\omega_j, z)$$

является делителем $V(z)$.

Лемма 3.3. Пусть $\Omega(z) = \prod_{j=0}^{n-1} (b\omega_j, z)$. Тогда существуют вещественные константы α и β такие, что

$$\Omega(z) \equiv \alpha\Omega_1(z) + \beta\Omega_2(z).$$

Доказательство. Если $b = 1$, то $\Omega(z) = \Omega_1(z)$. Если $b = a$, то $\Omega(z) = \Omega_2(z)$. Рассмотрим случай, когда $b \neq 1$ и $b \neq a$. Тогда найдется точка b^* , для которой $\Omega_1(b^*) \neq 0$, $\Omega_2(b^*) \neq 0$, $\Omega(b^*) = 0$. Пусть $\tilde{\alpha} = 1$, $\tilde{\beta} = -\frac{\Omega_1(b^*)}{\Omega_2(b^*)}$, тогда

$$\tilde{\alpha}\Omega_1(b^*) + \tilde{\beta}\Omega_2(b^*) = 0.$$

Рассмотрим функцию:

$$\tilde{\Omega}(z) = \tilde{\alpha}\Omega_1(z) + \tilde{\beta}\Omega_2(z).$$

$\tilde{\Omega}(z)$ — однородный полином, $\tilde{\Omega}(\Omega_z) = \tilde{\Omega}(z)$, $\forall z$, $\tilde{\Omega}(b^*) = 0$. Отсюда следует, что этот однородный многочлен представим в следующем виде (по лемме 3.1): $\tilde{\Omega}(z) = c\Omega(z)$. Положим $\alpha = \tilde{\alpha}/c$, $\beta = \tilde{\beta}/c$, тогда получим следующее тождество:

$$\Omega(z) \equiv \alpha\Omega_1(z) + \beta\Omega_2(z).$$

Случай нечетной симметрии

Пусть $n = 2m + 1$. Простейшие примеры многочленов с данной симметрией:

$$I_0 = x^2 + y^2 = |z|^2, \quad z = (x, y).$$

$$I_1 = \prod_{k=1}^n (\omega^k, z), \omega = e^{i\varphi}.$$

$$I_2 = I_1(az), a = \omega^k, \forall k, |a| = 1, \omega^k = e^{i\frac{2\pi}{n}k}.$$

Проверим симметричность этих многочленов:

$$I_0(\omega z) = (\omega x, \omega y) = (\omega \bar{\omega} x, y) = (x, y) = I_0(z);$$

$$I_1(\omega z) = \prod_{b=1}^n (\omega^b, z\omega) = \prod_{b=1}^n (\omega^b \bar{\omega}, z) =$$

$$= \prod_{b=1}^n (\omega^{b-1}, z) = \prod_{j=0}^{n-1} (\omega^j, z) = I_1(z);$$

$$I_2(z\omega) = \prod_{b=1}^n (\omega^b, \omega a z) =$$

$$= \prod_{b=1}^n (\omega^{b-1}, az) = \prod_{j=1}^{n-1} (\omega^j, az) = I_2(z).$$

Таким образом, I_0, I_1, I_2 — инварианты. Оказывается, что имеет место следующая

Теорема 3.20. I_0, I_1, I_2 — полная система инвариантов, то есть любой другой инвариант $V(z)$ алгебраически выражается через I_0, I_1, I_2 : существует многочлен $W(t_0, t_1, t_2)$, такой, что

$$V(z) = W(I_0(z), I_1(z), I_2(z)).$$

Доказательство. Покажем, что $V(z) = W(I_0(z), I_1(z), I_2(z))$. Для этого достаточно рассмотреть однородный многочлен

$$V^{(k)}(z) = \sum_{q=0}^k a_q^k x^q y^{k-q}.$$

1. $V^{(k)}(z)$ — инвариант, возьмем $k < n$, тогда k — четное, $k = 2r$.

Рассмотрим $V^{(k)}(z) - \lambda I_0^r(z) = W(z)$. Так как $\deg V^{(k)}(z) = 2r$ и $\deg I_0^r(z) = 2r$ — квадратичный многочлен степени r , то $\deg W(z) = 2r$. Возьмем произвольную точку $a \neq 0$ и подберем λ так, чтобы разность обращалась в нуль, тогда из того что:

$$W(a) = 0 \quad \deg W < n$$

следует, что $W \equiv 0$. Таким образом получим, что

$$V^{(k)}(z) = \lambda \cdot I_0^r(z).$$

2. Рассмотрим $V^{(k)}(z)$, при $k = 2m + 1$.

а) Пусть b , такое что $V(b) = 0$ и $I_1(b) = 0$, тогда существует c_1 , для которого выполняется равенство $V(z) = c_1 I_1(z)$.

б) Для $V(b) = 0$ и $I_2(b) = 0$ найдется c_2 , такое, что $V(z) = c_2 I_2(z)$.

в) Пусть $V(b) \neq 0$, $I_1(b) \neq 0$, $I_2(b) = 0$, пусть существует α , для которого выполняется равенство

$$V(b) + \alpha I_1(b) = 0.$$

Тогда по лемме 3.1 справедливо равенство $V(z) + \alpha I_1(z) = cI_2(z)$. Отсюда получаем

$$V(z) = cI_2(z) - \alpha I_1(z).$$

3. Рассмотрим $V^{(k)}(z)$ для $k > n$. Если k — четное, $k = 2r$, то $\forall b$ существует α такое, что выполняется равенство:

$$V^{(k)}(b) - \alpha I_0^{(r)}(b) = 0,$$

b — нуль многочлена $I_1(z)$. Тогда $V^{(k)}(z) - \alpha I_0^{(r)}(z) = I_1(z)W(z)$, следовательно, $\deg W(z) < k$. Далее для $W(z)$ проводятся аналогичные рассуждения.

Если k — нечетное, то существует b , для которого верно то, что $V(b) = 0$, тогда $V^{(k)}(z)$ делится без остатка на многочлен

$$\Omega_a(x, y) = \prod_{k=1}^n (a\omega^k, z).$$

Таким образом получаем, что:

$$V^{(k)}(z) = \Omega_a(z) \cdot W(z),$$

где

$$\Omega_a(z) = \prod_{k=1}^n (a\omega^k, z)$$

имеет вид

$$\Omega(z) \equiv \alpha I_1(z) + \beta I_2(z),$$

$\deg W(z) < k$ и проводя для $V^{(k)}(z)$ те же рассуждения, что и для $V^{(k)}(z)$, получим

$$V(z) = W(I_0(z), I_1(z), I_2(z)).$$

Таким образом, I_0, I_1, I_2 — полная система инвариантов.

Пример 3.1 Рассмотрим I_0, I_1, I_2 при $n = 3$.

$$I_0 = x^2 + y^2$$

$$I_1 = \prod_{k=1}^3 (\omega^k, z), \quad \omega = e^{i2\pi/3}, \quad \omega^k = e^{ik2\pi/3}$$

$$\begin{aligned}
I_1 &= (\omega_1, z) \cdot (\omega_2, z) \cdot (\omega_3, z) \\
\omega_1 &= e^{i2\pi/3} = \cos 2\pi/3 + i \sin 2\pi/3 = -1/2 + i\sqrt{3}/2 \\
(\omega_1, z) &= -x/2 + \sqrt{3}y/2 \\
\omega_2 &= e^{i4\pi/3} = -1/2 - \sqrt{3}i/2; \quad (\omega_2, z) = -x/2 - y\sqrt{3}/2. \\
\omega_3 &= 1, \quad (\omega_3, z) = x.
\end{aligned}$$

$$I_1 = (-x/2 + y\sqrt{3}/2) \cdot (-x/2 - \sqrt{3}y/2) \cdot x = x/4 \cdot (x^2 - 3y^2)$$

$$I_2 = y \cdot (-x + y\sqrt{3}) \cdot (-x - y\sqrt{3}) = y \cdot (x^2 - 3y^2)$$

Таким образом получим: $I_0 = x^2 + y^2$, $I_1 = x/4 \cdot (x^2) - 3y^2$,

$$I_2 = y \cdot (x^2 - 3y^2).$$

Случай четной симметрии $n = 2m$

Рассмотрим многочлен

$$\mathcal{I}_1(z) = \prod_{k=1}^m (\omega^k, z), \quad \omega^m = -1,$$

где ω — комплексное число. Справедлива следующая лемма.

Лемма 3.4. $\mathcal{I}_1(z)$ — полуинвариант, т.е. $\mathcal{I}_1(\omega z) = -\mathcal{I}_1(z)$.

Доказательство.

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_1(\omega z) &= (\omega, \omega z) \cdot (\omega^2, \omega z), \dots, (\omega^m, \omega z) = \\
&= (\omega \bar{\omega}, z) \cdot (\omega^2 \bar{\omega} z) \dots (\omega^m \bar{\omega}, z) = \\
&= (1, z) \cdot (\omega, z) \dots (\omega^{m-1}, z) = -(-1, z) \cdot (\omega, z) \dots (\omega^{m-1}, z) = \\
&= (-\omega, z) \dots (\omega^{m-1}, z) \cdot (\omega^m, z) = -\mathcal{I}_1(z).
\end{aligned}$$

Получим, что

$$\mathcal{I}_1(\omega z) = -\mathcal{I}_1(z).$$

Лемма 3.5. Пусть $\mathcal{I}_2(z) = \mathcal{I}_1(az)$, $a = e^{i\theta}$, $0 < \theta < \pi/n$, тогда $\mathcal{I}_2(z)$ — полуинвариант.

Доказательство. Покажем, что

$$\mathcal{I}_2(\omega z) = -\mathcal{I}_2(z).$$

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_2(\omega z) &= \mathcal{I}_1(\omega az) = (\omega, \omega az) \cdot (\omega^2, \omega az) \dots (\omega^m, \omega az) = \\ &= (\omega \bar{\omega}, az) \cdot (\omega^m \bar{\omega}, az) = (1, az) \cdot (\omega, az) \dots (\omega^{m-1}, az) = \\ &= -(\omega, az) \dots (\omega^{m-1}, az) \cdot (\omega^m, az) = -\mathcal{I}_1(az) = -\mathcal{I}_2(z).\end{aligned}$$

Получили, что $\mathcal{I}_2(z)$ — полуинвариант.

Таким образом мы получили набор многочленов

$$\mathcal{I}_1^2(z), \mathcal{I}_2^2(z), \mathcal{I}_1(z) \cdot \mathcal{I}_2(z),$$

которые являются инвариантными. Введем обозначения:

$$I_1 = \mathcal{I}_1^2(z), \quad I_2 = \mathcal{I}_2(z) \cdot \mathcal{I}_1(z).$$

Теорема 3.21. I_0, I_1, I_2 — полная система инвариантов.

Доказательство. Покажем, что $V(z) = W(I_0(z), I_1(z), I_2(z))$, где $V(z)$ — симметричный многочлен, $W(z)$ — несимметричный многочлен. Для этого рассмотрим однородный многочлен:

$$V^{(k)}(z) = \sum_{q=0}^k a_q^k x^q y^{k-q}.$$

1. Пусть $V^{(k)}(z)$ — инвариант и пусть $k < n$. Тогда k — четное, т.е. $k = 2r$. Справедливо следующее равенство

$$V^{(k)}(z) - \lambda I_0^{(r)}(z) = W(z).$$

Возьмем произвольную точку $a \neq 0$ и подберем λ так, чтобы $W(a) = 0$, тогда из того что

$$W(a) = 0 \quad \deg W < n$$

следует, что $W \equiv 0$. Следовательно, $V^{(k)}(z) = \text{const} \cdot I_0^{(r)}(z)$.

2. Рассмотрим $V^{(k)}(z)$, $k = 2m$. Тогда, существует b такое, что $V(b) = 0$ и $V^{(k)}(z)$ делится без остатка на многочлен

$$\Omega_a(x, y) = \prod_{k=1}^n (a\omega^k, z),$$

то есть

$$V^{(k)}(z) = \mathcal{I}(z) \cdot W(z),$$

где

$$\mathcal{I}(z) = c_1 \mathcal{I}_1 + c_2 \mathcal{I}_2.$$

$\mathcal{I}(z)$ — полуинвариант, следовательно, $W(z)$ также полуинвариант.

$$\deg W = \deg V - m = m.$$

Проводя аналогичные рассуждения и далее, получим

$$V(z) = W(I_0(z), I_1(z), I_2(z)).$$

3. Рассмотрим $V^{(k)}(z)$ для $k > n$. Если k — четное, $k = 2r$, то существует b и α , такие, что

$$V^{(k)}(b) - \alpha I_0^{(r)}(b) = 0.$$

Тогда имеет место следующее равенство

$$V^{(k)}(z) - \alpha I_0^{(r)}(z) = I_1(z) \cdot W(z).$$

$$\deg W(z) < k.$$

Если k — нечетное, то существует b такое, что $V(b) = 0$, тогда

$$V^{(k)}(z) = \mathcal{I}(z) \cdot W(z),$$

где

$$\mathcal{I}(z) = c_1 \mathcal{I}_1(z) + c_2 \mathcal{I}_2(z).$$

$\mathcal{I}(z), W(z)$ — полуинварианты. $\deg W(z) < k$, поэтому для $W(z)$ верны те же заключения, что и для $V^{(k)}(z)$ и т.д. Таким образом,

$$V(z) = W(I_0(z), I_1(z), I_2(z)).$$

Что и требовалось доказать.

Замечание 3.8. *Аналоги доказанных здесь теорем сформулированы (без доказательств) в [15].*

3.1.7 Кольцо формальных степенных рядов

Кольцо вещественных формальных степенных рядов $\mathbb{R}[[\xi_1, \dots, \xi_n]]$ было использовано при определении кратности отображения (см. [62]), это кольцо представляет собой совокупность формальных сумм вида

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}_+^n} a_k \xi^k$$

с вещественными коэффициентами a_k ($k = (k_1, \dots, k_n)$ — вектор с неотрицательными целочисленными компонентами). Эти суммы могут быть как бесконечными, так и конечными (в последнем случае они являются обычными многочленами). Сходимость рядов в случае бесконечных сумм не требуется.

Формальные степенные ряды являются естественным обобщением многочленов (многочлены бесконечной степени). Их можно складывать и умножать:

$$\begin{aligned} \sum_k a_k \xi^k + \sum_k b_k \xi^k &= \sum_k c_k \xi^k, \quad c_k = a_k + b_k, \\ \left(\sum_k a_k \xi^k \right) \cdot \left(\sum_r b_r \xi^r \right) &= \sum_m d_m \xi^m, \\ d_m &= \sum_{k+r=m} a_k b_r. \end{aligned}$$

Множество (формальных степенных рядов) $\mathbb{R}[[\xi_1, \dots, \xi_n]]$, рассмотренное вместе с этими операциями сложения и умножения, образуют так называемое *коммутативное кольцо с единицей*. Это кольцо является нетеровым.

Подкольцо $\mathfrak{M} := \langle \xi_1, \dots, \xi_n \rangle$ является (единственным) максимальным идеалом в $\mathbb{R}[[\xi_1, \dots, \xi_n]]$.

С каждым гладким отображением $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ в кольце $\mathbb{R}[[\xi_1, \dots, \xi_n]]$ связывается идеал $\mathfrak{A}(f)$, порожденный тейлоровскими разложениями компонент этого отображения в нуле $f_j = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^n} a_k^j \xi^k$. Фактор $\mathcal{Q}(f)$ кольца $\mathbb{R}[[\xi_1, \dots, \xi_n]]$ по идеалу $\mathfrak{A}(f)$ называется локальным кольцом особенности f в нуле.

3.2 Основы локального анализа отображений конечномерных пространств

3.2.1 Локальные диффеоморфизмы, регулярные и особые точки гладких отображений

Гладкой функцией на координатном пространстве $\mathbb{R}^n$ называется функция $z = V(\xi_1, \dots, \xi_n)$ вещественных переменных $\xi_1, \dots, \xi_n \in \mathbb{R}$ с вещественными значениями $\eta \in \mathbb{R}$ при условии существования в каждой точке a пространства $\mathbb{R}^n$ любых производных $\frac{\partial^{p_1+\dots+p_n} V}{\partial \xi_1^{p_1} \dots \partial \xi_n^{p_n}}(a)$ произвольного порядка $r = p_1 + \dots + p_n$. Соответственно, отображение

$$f : (\xi_1, \dots, \xi_n)^\top \longmapsto (f_1(\xi_1, \dots, \xi_n), \dots, f_n(\xi_1, \dots, \xi_n))^\top$$

называется гладким, если гладкими являются функции $f_k(\xi_1, \dots, \xi_n) \quad \forall k$.

Пусть $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ — гладкое преобразование, отображающее произвольную точку³ $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)^\top$ пространства $\mathbb{R}^n$ в точку $y = (\eta_1, \dots, \eta_n)^\top$, $\eta_k = f_k(\xi_1, \dots, \xi_n)$, $\forall k$. Точка $a \in \mathbb{R}^n$ называется *регулярной* для отображения f , если якобиан $J(f)(a)$ этого отображения в точке a отличен от нуля. В противном случае (равенства якобиана нулю) точка a называется *особой*.

Определение 3.5. Пусть отображение $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ устанавливает взаимно-однозначное соответствие между двумя открытыми подмножествами $\mathcal{O}$ и $\mathcal{U}$ в $\mathbb{R}^n$ (такие подмножества в дальнейшем будем называть областями) с условием, что отображение $\varphi : \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{U}$ и обратное к нему $\varphi^{-1} : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{O}$ являются гладкими. Тогда отображение φ называется диффеоморфизмом из области $\mathcal{O}$ на область $\mathcal{U}$.

Определение 3.6. Пусть известно, что отображение φ устанавливает диффеоморфное соответствие между некоторыми двумя областями $\mathcal{O}$ и $\mathcal{U}$, содержащими точки a и $b = \varphi(a)$, причем сами области

³В математической литературе принято обозначение точки ξ арифметического пространства $\mathbb{R}^n$ в виде координатного столбца или, что эквивалентно, строки со знаком транспонирования: $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)^\top$.

$\mathcal{O}, \mathcal{U}$ и их размеры не известны. Тогда отображение φ называется локальным диффеоморфизмом в точке a .

Каждый глобальный диффеоморфизм $\varphi : \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{U}$ является, безусловно, и локальным диффеоморфизмом в любой точке $a \in \mathcal{O}$. Обратное утверждение неверно, в чем можно убедиться на следующем примере:

$$\varphi : \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{U}, \varphi(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy), \mathcal{O} = \mathcal{U} = \mathbb{R}^2 \setminus 0$$

(φ задано операцией возведения в квадрат комплексного числа).

Во многих прикладных задачах часто требуется лишь локальная диффеоморфность рассматриваемых в них отображений. Это свойство легко проверяется.

Теорема 3.22. (критерий локальной диффеоморфности)

Гладкое отображение $\varphi : \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{U}$ тогда и только тогда является локальным диффеоморфизмом в точке a , когда его якобиан $J(\varphi)$ в этой точке отличен от нуля ($J(\varphi)(a) \neq 0$).

Доказательство этого широко известного утверждения можно найти во многих учебниках и монографиях по дифференциальному исчислению функций многих переменных или гладкой топологии (см., например, [12]).

Итак, если точка a регулярна, то существуют такие окрестности $\mathcal{O}$ и $\mathcal{U}$ точек a и $b = f(a)$, что f взаимно однозначно отображает $\mathcal{O}$ на $\mathcal{U}$ и при этом обратное отображение $f^{-1} : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{O}$ также является гладким (отображение f в этом случае является локальным диффеоморфизмом в точке a).

Поведение отображения в окрестности произвольной особой точки может оказаться весьма сложным. Полного описания всех возможных типов поведения до сих пор нет.

Известно, что в случае $n = 2$ достаточно изучить лишь простейшие из них — складки и сборки [3], так как только они могут появляться устойчиво (могут быть неустраиваемыми посредством малых полиномиальных

возмущений). Это открытие было сделано в 1955 году американским математиком Х. Уитни [3]), изучавшим поведение в целом гладких отображений многомерных пространств.

При гладком отображении плоской области в координатную плоскость образ окрестности каждой особой точки типа сборки покрывает окрестность образа этой точки (точка с особенностью сборки не может отображаться на граничную точку в образе плоской области, если она принадлежит внутренности области), а точки с особенностью складки могут отображаться на границу образа области. Множество особенностей типа складки и их образы образуют гладкие линии (линии складок). Причем отдельные компоненты этих линий могут «стыковаться» в отдельных точках, являющихся образами сборок. Состыкованные образы линий складок в малой окрестности любой точки стыка напоминают профиль острого пика или клюва.

Таким образом, имеет место следующее заключение: *граница образа области на плоскости (при гладком отображении) состоит из кусков линий, каждый из которых является либо образом части границы области, либо образом части линии складок.*

Линию особых точек Σ можно определять, таким образом, на основе уравнения (равенства нулю скалярного произведения)

$$\left(\frac{\partial f(t, s)}{\partial s}, \frac{1}{i} \frac{\partial f(t, s)}{\partial t} \right) = 0. \quad (3.12)$$

Посредством этого же соотношения можно определять аналитическую огибающую для s -семейства контуров $z = f_s(t) := f(t, s)$ [12] (каждое гладкое отображение $f : (s, t) \mapsto f_1(s, t) + if_2(s, t)$ можно истолковать как гладкое s -параметрическое семейство гладких кривых на комплексной плоскости, параметризованных переменной t и, наоборот, каждое такое семейство задает гладкое отображение из плоской области в комплексную плоскость).

Кривая, являющаяся огибающей для заданного s -параметрического семейства кривых, одновременно является множеством особых значений

отображения f . Если это отображение находится в общем положении, то множество его особых значений состоит из простых кривых, состыкованных в изолированных особых точках.

Аналогичные заключения справедливы и в случае отображения $f : M \rightarrow \mathbb{R}^2$, где M — гладкая поверхность с краем или без края. Точки типа складки или сборки определяются посредством введения локальных координат на поверхности (типы точек не изменяются при заменах координат). Следовательно, если M — гладкая поверхность без края, то граница $\partial f(M)$ полностью состоит из образов особых точек.

3.2.2 Алгебраические и геометрические объекты, привязанные к гладким отображениям, типы особенностей отображений, дискриминантные множества

Из теоремы о локальной диффеоморфности отображения в регулярной точке вытекает эквивалентное утверждение, известное под названием *теорема о неявной функции*.

Теорема 3.23. Пусть левая часть уравнения $f(\xi, \lambda) = 0$ задана гладким отображением $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, удовлетворяющим следующим условиям: 1) $f(0, 0) = 0$, 2) $\det \frac{\partial f}{\partial \xi}(0, 0) \neq 0$.

Тогда найдется такое гладкое отображение $\psi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, определенное на достаточно малой окрестности U нуля в $\mathbb{R}^m$, что 1) $\psi(0) = 0$, 2) $f(\psi(\lambda), \lambda) = 0 \forall \lambda \in U$, 3) отображение ψ является единственным, если оно удовлетворяет условиям 1), 2).

Данная теорема выявляет однократность регулярной точки: при произвольных малых возмущениях отображения $f(\cdot, 0)$ вблизи регулярного решения $\xi = 0$ уравнения $f(\xi, 0) = 0$ имеется ровно одно решение возмущенного уравнения $f(\xi, \lambda) = 0$. Сингулярные же точки являются многократными: при малых возмущениях $f(\xi, \lambda) = f(\cdot, 0) + \lambda H(\xi, \lambda)$ отображения $f(\cdot, 0)$ вблизи сингулярного решения $\xi = 0$ уравнения $f(\xi, 0) = 0$ может появляться более одного решения возмущенного уравнения $f(\xi, \lambda) = 0$.

Такие явления (рождение нескольких решений из одного решения) называются бифуркациями и представляют собой предмет активного исследования в нелинейном анализе и его приложениях.

Для строгого определения кратности нужно рассмотреть множество $\mathbb{R}[[\xi_1, \dots, \xi_n]]$ вещественных формальных степенных рядов, то есть формальных сумм вида $\sum_k a_k \xi^k$ с вещественными коэффициентами a_k , $k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ (компоненты k — неотрицательные целые числа). Эти суммы могут быть как бесконечными, так и конечными (в последнем случае они являются обычными многочленами). Сходимость рядов в случае бесконечных сумм не требуется. Формальные степенные ряды являются естественным обобщением многочленов (их можно рассматривать как многочлены бесконечной степени). Формальные степенные ряды можно складывать и умножать:

$$\begin{aligned} \sum_k a_k \xi^k + \sum_k b_k \xi^k &= \sum_k c_k \xi^k, \quad c_k = a_k + b_k, \\ \left(\sum_k a_k \xi^k \right) \cdot \left(\sum_k b_k \xi^k \right) &= \sum_k d_k \xi^k, \\ d_k &= \sum_{p+q=k} a_p b_q. \end{aligned}$$

Множество (формальных степенных рядов) $\mathbb{R}[[\xi_1, \dots, \xi_n]]$, рассмотренное вместе с этими операциями сложения и умножения, образуют так называемое *коммутативное кольцо с единицей*.

Классическими примерами коммутативных колец с единицами являются множество целых чисел $\mathbb{Z}$ и множество многочленов $\mathbb{R}[x]$ от одной переменной x , снабженные операциями естественных сложений и умножений. По сравнению с полями в коммутативных кольцах не выполняется аксиома о существовании обратного элемента по умножению. Такие «ослабленные» поля называются коммутативными кольцами.

Пусть $n = 2$. С каждым гладким отображением $\mathcal{F} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ в кольце $\mathbb{R}[[\xi_1, \xi_2]]$ связывается идеал, порожденный тейлоровскими разложениями

компонент этого отображения. А именно, пусть

$$\hat{\mathcal{F}}_1 = \sum_{p,q} a_{p,q} \xi_1^p \xi_2^q, \quad a_{p,q} = \frac{1}{p!q!} \frac{\partial^{p+q} \mathcal{F}_1}{\partial \xi_1^p \partial \xi_2^q}(0),$$

и

$$\hat{\mathcal{F}}_2 = \sum_{p,q} b_{p,q} \xi_1^p \xi_2^q, \quad b_{p,q} = \frac{1}{p!q!} \frac{\partial^{p+q} \mathcal{F}_2}{\partial \xi_1^p \partial \xi_2^q}(0).$$

Через $\mathfrak{S}$ обозначим подмножество в $\mathbb{R}[[\xi_1, \xi_2]]$, образованное выражениями вида $a\hat{\mathcal{F}}_1 + b\hat{\mathcal{F}}_2$, где a, b — произвольные степенные ряды. Легко проверить, что $\mathfrak{S}$ — идеал в $\mathbb{R}[[\xi_1, \xi_2]]$. Факторкольцо

$$Q = \mathbb{R}[[\xi_1, \xi_2]] / \mathfrak{S}$$

называется *локальным кольцом особенности $\mathcal{F}$ в нуле*. Его размерность (как вещественного линейного пространства) называется кратностью нулевой точки относительно отображения $\mathcal{F}$, которая обозначается $\mu(\mathcal{F}, 0)$. Кратности в ненулевых точках $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ (обозначаемые $\mu(\mathcal{F}, \alpha)$) определяются аналогичным образом — через кольцо формальных степенных рядов $\mathbb{R}[[\xi_1 - \alpha_1, \xi_2 - \alpha_2]]$ или, что эквивалентно, сведением к случаю начала координат заменой $\eta_1 = \xi_1 - \alpha_1$, $\eta_2 = \xi_1 - \alpha_2$.

Кратности особенностей типа складки и сборки равны соответственно 2 и 3. Кратность выражает степень вырождения отображения в особой точке. Характер же вырождения выражается алгебраической структурой локального кольца Q , в котором содержится большое количество информации и о локальной геометрической структуре отображения $\mathcal{F}$. Этот факт составляет основу для многих методов алгебраической геометрии и теории особенностей гладких отображений [3]. Структура локального кольца не изменяется при диффеоморфных заменах координат в образе и прообразе отображения. Интересно то, что 2-кратные и 3-кратные особенности однозначно определяют свое локальное кольцо. Но, начиная с кратности 4, разнообразие типов локальных колец начинает резко возрастать, что свидетельствует о разнообразии локальных геометрических типов поведения гладких отображений в особых точках одинаковой крат-

ности. Например, следующие отображения исчерпывают все типы локальных колец, отвечающих 4-кратным особым точкам:

$$(x, y^4 + xy^2), \quad (x^2, y^2), \quad (x^2 - y^2, xy). \quad (3.13)$$

Особенности этих отображений в начале координат имеют персональные названия: «ласточкин хвост», «гиперболическая омбилика» и «эллиптическая омбилика». Отображение (x^2, y^2) можно также записать в виде $(x^2 + y^2, xy)$ (обе эти формы сводятся друг к другу линейными обратимыми преобразованиями переменных). Отображения (3.13) представляют собой локальные нормальные аналитические формы гладких отображений плоскости в 4-кратных особых точках. Для особых точек более высоких кратностей появляются континуальные семейства типов локальных колец [3].

Для строгого определения кратности в многомерном случае нужно рассмотреть множество $\mathbb{R}[[\xi_1, \dots, \xi_n]]$ вещественных формальных степенных рядов от $\xi_1, \dots, \xi_n$. С каждым гладким отображением $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ связывается идеал $\mathfrak{F}$ в кольце $\mathbb{R}[[\xi_1, \dots, \xi_n]]$, порожденный тейлоровскими разложениями компонент этого отображения. Факторкольцо

$$Q = \mathbb{R}[[\xi_1, \dots, \xi_n]] / \mathfrak{F}$$

называется локальным кольцом особенности f в нуле. Его размерность (как вещественного линейного пространства) называется кратностью нулевой точки относительно отображения f , которая обозначается $\mu(f, 0)$. Кратности в ненулевых точках $a = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ (обозначаемые $\mu(f, a)$) определяются аналогичным образом — через кольцо формальных степенных рядов $\mathbb{R}[[\xi_1 - \alpha_1, \dots, \xi_n - \alpha_n]]$ или, что эквивалентно, сведением к случаю начала координат заменой $\eta_1 = \xi_1 - \alpha_1, \dots, \eta_n = \xi_n - \alpha_n$.

Дискриминантным множеством $\Sigma(\mathcal{O})$ уравнения $f(x, \lambda) = 0 \quad x \in \mathcal{O}$ называется совокупность тех значений $\lambda = \bar{\lambda}$, для которых данное уравнение имеет в $\mathcal{O}$ вырожденное решение $\bar{x}$:

$$f(\bar{x}, \bar{\lambda}) = 0, \quad \text{codim Im } \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{\lambda}) > 0$$

Пусть $\tilde{\Sigma}(\mathcal{O})_{\bar{\lambda}}$ — росток множества $\Sigma(\mathcal{O})$ в точке $\bar{\lambda}$. Тогда пересечение

$$\Sigma(\bar{x}, \bar{\lambda}) = \bigcap_{\mathcal{O}: \bar{x} \in \mathcal{O}} \tilde{\Sigma}(\mathcal{O})_{\bar{\lambda}}$$

называется бифуркационной диаграммой уравнения $f(x, \lambda) = 0$, $x \in \mathcal{O}$ в точке $(\bar{x}, \bar{\lambda})$.

Каждый диффеоморфизм $\varphi : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{U}$, очевидно, является локальным диффеоморфизмом в любой точке $a \in \mathcal{O}$. Обратное утверждение неверно.

3.2.3 Контактные преобразования и версальные деформации особенностей отображений

Более подробные изложения представленного здесь материала имеются в [3], [29], [62], [83].

Пусть $f(0) = g(0) = 0$. Отображения f и g называются V -эквивалентными в нуле, если существует локальный C^∞ -диффеоморфизм $\varphi : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ (диффеоморфно отображающий некоторую окрестность нуля в $\mathbb{R}^n$ на открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$) и локальное C^∞ — отображение $A : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathrm{GL}(n), \cdot)$ такие, что $g(x) = A(x)f(\varphi(x))$.

Последнее равенство предполагается выполненным для тех x , для которых A и φ определены.

Пусть $\theta(0) = \rho(0) = 0$. Отображения θ и ρ называются V -эквивалентными в нуле, если существует C^∞ -диффеоморфизм

$$\varphi : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$$

и локальное C^∞ -отображение

$$A : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathrm{GL}(n), \cdot)$$

такие, что $\rho(\xi) = A(\xi)\theta(\varphi(\xi))$ (последнее равенство предполагается выполненным для достаточно малых ξ , для которых заведомо определены A и φ).

Пусть $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ — пространство гладких ростков $(\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$. $\mathfrak{M}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) = \{\tilde{\theta} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) | \theta(0) = 0\}$, $\mathfrak{U}(\tilde{\theta})$ — подмодуль $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$,

где $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{E}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, порожденный ростками вида

$$H(\xi)\theta(\xi) + \frac{\partial\theta}{\partial\xi}(\xi)h(\xi),$$

где $\tilde{H} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n, L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n))$, $\tilde{h} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$

Если на $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ задать действие бесконечномерной группы контактных преобразований $(\tilde{A}, \tilde{\varphi})$ таких, что $\theta(\xi) \rightarrow A(\xi)\theta(\varphi(\xi))$, то фактор

$$Q(\theta, 0) = \mathcal{E}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) / \mathfrak{U}(\tilde{\theta})$$

называется локальным модулем особенности и число $\mathcal{T}(\theta, 0) = \dim Q(\theta, 0)$ называется коразмерностью (числом Тьюриной) особенности θ в нуле.

Пусть $\tilde{g}_1, \dots, \tilde{g}_T$ — набор отображений, ростки которых образуют базис в $Q(\theta, 0)$.

Тогда росток развертки

$$\theta(\xi, \lambda) = \theta(\xi) + \sum_{j=1}^T \lambda_j g_j(\xi)$$

в точке $(0, 0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^T$ называется миниверсальной деформацией особенности θ в нуле.

Оказывается, геометрический тип бифуркационной диаграммы не зависит от выбора миниверсальной деформации особенности: для любой пары миниверсальных деформаций найдется локальный диффеоморфизм (в нуле) баз деформаций, переводящий бифуркационную диаграмму первой деформации на бифуркационную диаграмму второй деформации [3].

Бифуркационная диаграмма (дискриминантное множество) этой развертки в нуле называется бифуркационной диаграммой особенности θ в нуле.

3.2.4 Боардмановские расширения идеалов и типы особенностей отображений в двумерном случае

Общее определение боардмановского расширения идеала можно найти в [3]. Здесь мы ограничимся рассмотрением отображений из $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^2$.

Пусть $\mathcal{E}$ — алгебра ростков в нуле гладких функций на координатной плоскости $\mathbb{R}^2$, $\mathfrak{A}$ — конечнопорожденный идеал в $\mathcal{E}$ с системой образующих $V_1, \dots, V_m$: $\mathfrak{A} = \langle V_1, \dots, V_m \rangle$. Боардмановским расширением $\widetilde{\mathfrak{A}}$ идеала $\mathfrak{A}$ называется идеал, порожденный множествами $\mathfrak{A}$ и $[\mathfrak{A}, \mathfrak{A}]$, где $[\mathfrak{A}, \mathfrak{A}]$ — множество функций вида

$$[u, v] := \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y}, \quad u, v \in \mathfrak{A}$$

($[u, v]$ — скобка Пуассона функций $u, v \in \mathfrak{A}$).

Рангом $\text{rk}(\mathfrak{A})$ идеала $\mathfrak{A}$ называется размерность подпространства

$$L(\mathfrak{A}) := \text{span}(\{\text{grad } V(0, 0)\})$$

в $\mathbb{R}^2$, $\text{crk}(\mathfrak{A}) := 2 - \text{rk}(\mathfrak{A})$. Для $\mathfrak{A} = \langle V_1, \dots, V_m \rangle$ имеем

$$\text{rk}(\mathfrak{A}) = \text{rk}(A),$$

где A — матрица Якоби функций V_j в нуле (образованная первыми производными V_j).

Пусть

$$\mathfrak{A}^1 = \widetilde{\mathfrak{A}}, \quad \mathfrak{A}^2 = \widetilde{\mathfrak{A}^1}, \quad \dots, \quad \mathfrak{A}^{k+1} = \widetilde{\mathfrak{A}^k}, \quad \dots$$

— последовательность боардмановских расширений. Числа

$$r_1 = \text{crk}(\mathfrak{A}), \quad r_2 = \text{crk}(\mathfrak{A}^1), \quad r_3 = \text{crk}(\mathfrak{A}^2), \quad \dots, \quad r_{k+1} = \text{crk}(\mathfrak{A}^k), \quad \dots$$

называются боардмановскими характеристиками идеала $\mathfrak{A}$ [3]. Очевидно, что $r_1 \geq r_2 \geq \dots \geq r_{k+1} \geq \dots$. Боардмановские характеристики инвариантны относительно выбора систем координат [3].

Говорят, что отображение $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ имеет особенность в нуле типа $\Sigma^{1, \dots, 1, 0}$ (в верхнем показателе k единиц), если для идеала, порожденного ростками (в нуле) компонент этого отображения выполнены соотношения

$$r_1 = \dots r_k = 1, \quad r_{k+1} = 0.$$

Например, идеалы $\langle x, y^2 \rangle$, $\langle x, y^3 \rangle$ и $\langle x, y^4 \rangle$ имеют в нуле особенности типов $\Sigma^{1, 0}$, $\Sigma^{1, 1, 0}$ и $\Sigma^{1, 1, 1, 0}$. Эти особенности носят имена «складка», «сборка» и «ласточкин хвост».

Если условие $r_{k+1} = 0$ отбросить, то используется обозначение $\Sigma^{1, \dots, 1}$.

3.2.5 Идентификация особенностей, условие трансверсальности к особенностям

Пусть для отображения $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f = (f_1, f_2)$, $f_1(0) = f_2(0) = 0$, выполнено условие

$$\text{grad } f_1(0) \neq 0. \quad (3.14)$$

Ясно, что в этом случае отображение f имеет в нуле особенность Σ^1 тогда и только тогда, когда в нуле

$$[f_1, f_2] = 0 \quad (\Sigma^1)$$

или, что эквивалентно,

$$\text{grad } f_1(0) \parallel \text{grad } f_2(0).$$

Используя последнее соотношение, нетрудно доказать (см. выше определение типов особых точек), что верны следующие утверждения.

Теорема 3.24. *Отображение f имеет в нуле особенность $\Sigma^{1,1}$ тогда и только тогда, когда в нуле выполнены следующие равенства:*

$$[f_1, f_2] = [f_1, [f_1, f_2]] = 0. \quad (\Sigma^{1,1})$$

Теорема 3.25. *Отображение f имеет в нуле особенность $\Sigma^{1,1,0}$, если в нуле*

$$[f_1, [f_1, [f_1, f_2]]] \neq 0$$

(при выполнении условий $(\Sigma^{1,1})$)

Теорема 3.26. *Отображение f имеет в нуле особенность $\Sigma^{1,1,1}$ тогда и только тогда, когда в нуле выполнены следующие равенства:*

$$[f_1, f_2] = [f_1, [f_1, f_2]] = [f_1, [f_1, [f_1, f_2]]] = 0. \quad (\Sigma^{1,1,1})$$

Теорема 3.27. *Отображение f имеет в нуле особенность $\Sigma^{1,1,1,0}$, если в нуле*

$$[f_1, [f_1, [f_1, [f_1, f_2]]]] \neq 0$$

(при выполнении условий $(\Sigma^{1,1,1})$)

Для определенности, здесь рассмотрена нулевая особая точка. Все приведенные выше соотношения и утверждения автоматически переносятся на ненулевые особые точки.

Доказательства этих утверждений нетрудно провести посредством редукции Ляпунова-Шмидта [29] к одномерному отображению

$$\beta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \beta(s) = f_2(\psi(s)),$$

где $\psi(s)$ — интегральная кривая гамильтоновой системы

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\frac{\partial f_1}{\partial x_2}, \\ \dot{x}_2 &= \frac{\partial f_1}{\partial x_1}. \end{aligned} \right\}$$

Кривая $x = \psi(s)$ задает параметризацию (вблизи нуля) множества решений уравнения $f_1(x) = 0$. Известно, что редукция сохраняет боардмановские характеристики особенности, то есть для f их можно вычислять посредством отображения β .

Теорема 3.28. *Имеет место равенство*

$$\frac{d^k \beta}{ds^k} = j^{(k+1)} \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

$$jde \, j^{(k+1)} = [f_1, j^{(k)}].$$

Доказательство вытекает из соотношений

$$\begin{aligned} \dot{\beta}(s) &= \frac{d}{ds} (f_2(\psi(s))) = \left(\text{grad } f_2(\psi(s)), \dot{\psi}(s) \right) = \\ &= \left(\text{grad } f_2(\psi(s)), \dot{\psi}(s) \right) = (\text{grad } f_2(\psi(s)), \text{sgrad } f_1(\psi(s))) = [f_1, f_2](\psi(s)) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left(j^{(k)}(\psi(s)) \right) &= \left(\text{grad } j^{(k)}(\psi(s)), \dot{\psi}(s) \right) = \\ &= \left(\text{grad } j^{(k)}(\psi(s)), \text{sgrad } f_1(\psi(s)) \right) = [f_1, j^{(k)}](\psi(s)) = j^{(k+1)}(\psi(s)). \end{aligned}$$

3.2.6 Боардмановские расширения идеалов и типы особенностей отображений в общем случае

Пусть $\mathcal{E}$ — алгебра ростков в нуле гладких функций на $\mathbb{R}^n$, $\mathfrak{A}$ — конечнопорожденный идеал в $\mathcal{E}$ с системой образующих $\tilde{V}_1, \dots, \tilde{V}_m$ — ростков функций $V_1(\xi), \dots, V_m(\xi) : \mathfrak{A} = \langle V_1, \dots, V_m \rangle$. Рангом $\text{rk } \mathfrak{A}$ идеала $\mathfrak{A}$ называется ранг матрицы Якоби $J(\xi)$ в нуле системы образующих $V_1, \dots, V_m$ (легко увидеть, что значение ранга не зависит от выбора системы образующих в идеале). Число $\text{crk } \mathfrak{A} := n - \text{rk } \mathfrak{A} = \text{crk } J$ называется корангом данного идеала.

Пусть $r = \text{rk } \mathfrak{A}$. Идеал $\mathcal{B}(\mathfrak{A})$, полученный расширением идеала $\mathfrak{A}$ посредством добавления к нему ростков всех миноров порядка $r+1$ матрицы $J(\xi)$, называется боардмановским расширением идеала $\mathfrak{A}$ (боардмановское расширение также не зависит от выбора образующих в $\mathfrak{A}$). Пусть

$$\mathfrak{A} \subseteq \mathcal{B}(\mathfrak{A}) \subseteq \dots \subseteq \mathcal{B}^p(\mathfrak{A}) \subseteq \dots$$

— последовательность боардмановских расширений $\mathcal{B}^{q+1}(\mathfrak{A}) := \mathcal{B}(\mathcal{B}^q(\mathfrak{A}))$. Тогда последовательность целых чисел

$$r \geq r_1 \geq \dots r_p \geq \dots, \quad r_q = \text{crk } \mathcal{B}^q(\mathfrak{A})$$

называется последовательностью боардмановских характеристик идеала $\mathfrak{A}$.

Если идеал $\mathfrak{A}$ порожден компонентами отображения $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, то последовательность боардмановских характеристик этого идеала называется последовательностью боардмановских характеристик в нуле отображения f .

Замечание 3.9. *Непосредственной проверкой можно убедиться, что последовательность боардмановских характеристик в нуле для произвольного отображения f не изменяется после гладких диффеоморфных замен координат в образе и прообразе.*

Замечание 3.10. Если f сохраняет первые r координат:

$$f(\xi) = (\xi_1, \dots, \xi_r, f_{r+1}(\xi), \dots, f_n(\xi)),$$

то, как нетрудно убедиться, бордмановские характеристики в нуле отображения f совпадают с бордмановскими характеристиками в нуле отображения $g : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^q$, $q = n - r$, $g_k(\eta) := f_{r+k}(0, \dots, 0, \eta_1, \dots, \eta_q)$.

3.2.7 Критические и регулярные точки гладких функций

Здесь мы кратко изложим важнейшие элементы локального анализа гладких функций. Более подробные сведения можно найти в [3], [11], [12], [62].

Точка $a \in \mathbb{R}^n$ называется *критической* для функции V , если

$$\frac{\partial V}{\partial \xi_j}(a) = 0 \quad \forall j.$$

Все прочие точки в $\mathbb{R}^n$ называются *регулярными* для V . Одна из главных задач анализа функций состоит в описании *поверхностей уровней* $\{V = c\}$ — подмножеств в $\mathbb{R}^n$, заданных уравнениями $V(x) = c$.

В случае плоскости ($n = 2$) разнообразные кривые линии, возникающие в прикладных задачах, часто можно рассматривать как линии уровней гладких функций. В этой связи представляет интерес локальная задача описания линии уровня $V(x) = c$, проходящей через заданную точку плоскости a ($V(a) = c$) в некоторой окрестности $\mathcal{O}$ этой точки. Для регулярных точек ответ чрезвычайно прост: малая часть линии уровня, проходящей через регулярную точку, представляет собой (в некоторой окрестности $\mathcal{O}$ заданной регулярной точки) «плавно деформированный» отрезок прямой. Для точной расшифровки последней фразы необходимо рассмотреть диффеоморфизмы. Две функции $z = f(x)$ и $z = g(x)$ называются *гладко эквивалентными*, если одна из них после некоторой диффеоморфной замены переменных $\varphi : (x) \mapsto \varphi(x)$ превращается во вторую. Гладко эквивалентные функции имеют одинаковые множества уровня: отождествляющий данные функции диффеоморфизм отображает $\{f = c\}$ на $\{g = c\} \forall c$.

Теорема 3.29. Если a — регулярная точка функции V , $V(a) = 0$, то существует локальный диффеоморфизм φ в точке a такой, что $\varphi(a) = 0$ и в некоторой окрестности начала координат выполняется тождество $V(\varphi^{-1}(x)) = \xi_1$.

Доказательство. Так как a — регулярная точка, то одна из первых производных этой функции в точке a отлична от нуля.

Пусть $\frac{\partial V}{\partial \xi_1}(a) \neq 0$. Для отображения $\psi : x \mapsto (V(x), \xi_2, \dots, \xi_n)$ ($x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$) имеем

$$J(a) := \det \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial \xi_1}(a) & \frac{\partial V}{\partial \xi_2}(a) & \frac{\partial V}{\partial \xi_3}(a) & \dots & \frac{\partial V}{\partial \xi_n}(a) \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \frac{\partial V}{\partial \xi_1}(a) \neq 0.$$

Следовательно, ψ — локальный диффеоморфизм в точке a , $\psi(a) = 0$. Очевидно, что $V(\psi^{-1}(x)) = \xi_1$.

Определение 3.7. Критическая точка a функции V называется морсовской (или невырожденной), если ее гессиан h в этой точке отличен от нуля⁴. В противном случае ($h(a) = 0$) критическая точка называется вырожденной.

Поведение функции в окрестности морсовской критической точки полностью определяется следующим утверждением.

Теорема 3.30. (Морс) Если a — морсовская критическая точка функции V , $V(a) = 0$, то существует локальный диффеоморфизм φ в точке a такой, что $\varphi(a) = 0$ и

$$V(\varphi^{-1}(x)) = \sum_{k=1}^n \sigma_k \xi_k^2, \quad |\sigma_j| = 1 \quad \forall j.$$

⁴Гессианом называется якобиан от градиента функции: $h(a) := \det H(a)$, $H(a) := \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \xi_j \partial \xi_k}(a) \right)$.

Доказательство этой теоремы не сложное, и его мы оставляем читателю. Заметим лишь, что его удобно проводить, опираясь на теилоровское разложение до второго порядка функции V с последующем приведением получаемой квадратичной формы (с переменными коэффициентами) к сумме квадратов. Теорема Морса является следствием более общей теоремы 3.32.

Каждая гладкая функция посредством малых полиномиальных возмущений (и даже посредством малых линейных возмущений) превращается в функцию, у которой все критические точки морсовские, а все критические значения попарно различны (разные критические значения принадлежат разным множествам уровня). Такие функции называются *морсовскими*. Превращение функции в морсовскую посредством выбора сколь угодно малого возмущения называется *морсовизацией* функции. Возможность осуществления морсовизации не означает бесполезность изучения вырожденных критических точек. Их необходимо изучать, например, потому, что расположение и характер вырожденных критических точек определяют геометрию линий уровня морсовизации функции. Кроме того, в гладких параметрических семействах функций вырожденные критические точки для функций, являющихся членами семейства, могут появляться устойчиво (не устранимы малыми возмущениями). То есть некоторые вырожденные критические точки в гладких семействах могут «передаваться» от одного члена семейства к другому, не исчезая для семейства в целом. Такая «коллективная» устойчивость особых точек выражается понятием коразмерности $cd(V, a)$ особой точки a функции V — положительным целым числом, равным минимальному числу параметров, необходимому для «коллективного» удержания особенности. Оказывается, что коразмерность особенности ровно на единицу меньше ее кратности: $cd(V, a) = \mu(V, a) - 1$. Пояснение к этому феномену будет дано в следующем разделе.

3.2.8 Конечнократные критические точки

Исследование поведения гладкой функции в окрестности произвольной вырожденной критической точки — безнадежно трудная задача. Несколько легче выглядят случаи *конечнократных* критических точек [3]. Под кратностью критической точки $a = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ гладкой функции $V(x)$ (обозначается $\mu(V, a)$) подразумевается кратность этой точки относительно отображения, порожденного градиентом данной функции. То есть

$$\mu(V, a) = \dim Q(V, a), \quad Q(V, a) = \mathbb{R}[[\xi_1 - \alpha_1, \dots, \xi_n - \alpha_n]] / \mathfrak{S},$$

$$\mathfrak{S} = \left\langle \frac{\partial V}{\partial \xi_1}, \dots, \frac{\partial V}{\partial \xi_n} \right\rangle$$

($\langle f_1, \dots, f_n \rangle$ — идеал, порожденный в кольце формальных степенных рядов $\mathbb{R}[[\xi_1 - \alpha_1, \dots, \xi_n - \alpha_n]]$ тейлоровскими разложениями функций f_k в точке a). Идеал $\left\langle \frac{\partial V}{\partial \xi_1}, \dots, \frac{\partial V}{\partial \xi_n} \right\rangle$ называется *якобиевым идеалом*, порожденным функцией V .

В теории особенностей гладких функций [3] установлено следующее утверждение:

Теорема 3.31. *1) Функция V , $V(a) = 0$, имеет в точке a 2-кратную особенность тогда и только тогда, когда после некоторой локальной диффеоморфной замены координат (в окрестности этой точки) функция приводится к виду*

$$\sum_{k=1}^{n-1} \sigma_k \xi_k^2 + \xi_n^3, \quad |\sigma_j| = 1 \quad \forall j.$$

(такие критические точки называются *складками*).

2) Функция V имеет в точке a 3-кратную особенность тогда и только тогда, когда после некоторой локальной диффеоморфной замены координат (в окрестности этой точки) функция приводится к виду

$$\sum_{k=1}^{n-1} \sigma_k \xi_k^2 + \sigma_n \xi_n^4, \quad |\sigma_j| = 1 \quad \forall j.$$

(такие критические точки называются *сборками*).

Оказывается, что только особенность типа складки имеет коразмерность, равную единице (такая и только такая особенность удерживается при возмущениях в однопараметрических семействах), и только особенность типа сборки имеет коразмерность, равную двум (особенность устойчиво появляется в двумерных семействах). Особенности коразмерности три встречаются трех типов: ласточкин хвост и две омбилики — гиперболическая и эллиптическая [3],[62]. Они соответственно имеют следующие нормальные формы:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \sigma_k \xi_k^2 + \xi_n^5, \quad |\sigma_j| = 1 \quad \forall j,$$

$$\sum_{k=1}^{n-2} \sigma_k \xi_k^2 + \xi_{n-1}^3 + \xi_n^3, \quad |\sigma_j| = 1 \quad \forall j$$

(или

$$\sum_{k=1}^{n-2} \sigma_k \xi_k^2 + \xi_{n-1}^3 + \xi_{n-1} \xi_n^2, \quad |\sigma_j| = 1 \quad \forall j),$$

$$\sum_{k=1}^{n-2} \sigma_k \xi_k^2 + \xi_{n-1}^3 - \xi_{n-1} \xi_n^2, \quad |\sigma_j| = 1 \quad \forall j),$$

Появление особенностей высокой коразмерности (кратности 4 и выше) может быть вызвано наличием большого числа управляющих параметров, а также нарушением симметрии функции при изменении управляющих параметров.

Особенность гладкой функции $V(x)$ в неморсовской точке a называется *одномерной*, если коранг ее матрицы Гессе в этой точке равен единице. В противном случае (коранг $= r \geq 3$) особенность называется *r -мерной*.

Строение конечнократных одномерных особенностей полностью описывается следующим утверждением.

Теорема 3.32. *Функция V , $V(a) = 0$, имеет в точке a μ -кратную одномерную особенность тогда и только тогда, когда после некоторой*

локальной диффеоморфной замены координат (в окрестности этой точки) функция приводится к виду

$$\sum_{k=1}^{n-1} \sigma_k \xi_k^2 + \sigma_n \xi_n^{\mu+1}, \quad |\sigma_j| = 1 \quad \forall j,$$

(такие критические точки называются высшими ласточкиными хвостами).

Лемма 3.6. (Адамар) Пусть $V(t, x_1, \dots, x_n)$ — гладкая функция на $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, для которой $V(0, x_1, \dots, x_n) = 0 \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Тогда найдется гладкая функция $W(t, x_1, \dots, x_n)$ на $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ такая, что

$$V(t, x_1, \dots, x_n) = tW(t, x_1, \dots, x_n) \quad \forall (t, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n.$$

Доказательство леммы вытекает из следующих соотношений

$$\begin{aligned} V(t, x_1, \dots, x_n) &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial s} V(st, x_1, \dots, x_n) ds = \\ &= t \int_0^1 \frac{\partial V}{\partial t}(st, x_1, \dots, x_n) ds = tW(t, x_1, \dots, x_n), \end{aligned}$$

где

$$W(t, x_1, \dots, x_n) = \int_0^1 \frac{\partial V}{\partial t}(st, x_1, \dots, x_n) ds.$$

Гладкость функции W вытекает из теорем о дифференцируемости интегралов по параметру.

Замечание 3.11. Легко проверить, что для функции W выполняется равенство

$$W(0, x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial V}{\partial t}(0, x_1, \dots, x_n).$$

Лемма 3.7. Пусть $V(t, x_1, \dots, x_n)$ — гладкая функция на $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, для которой

$$V(0, x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial V}{\partial t}(0, x_1, \dots, x_n) = 0$$

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Тогда найдется гладкая функция $U(t, x_1, \dots, x_n)$ на $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ такая, что

$$V(t, x_1, \dots, x_n) = t^2 U(t, x_1, \dots, x_n) \quad \forall (t, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n.$$

Доказательство этой леммы получается после 2-кратного применения предыдущей леммы.

Замечание 3.12. Легко проверить, что для функции U выполняется равенство

$$U(0, x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}(0, x_1, \dots, x_n).$$

Лемма 3.8. (о расщеплении особенности) Пусть для гладкой функции $V(t, x_1, \dots, x_n)$ на $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ выполняются следующие соотношения

$$\frac{\partial V}{\partial t}(0, 0, \dots, 0) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}(0, 0, \dots, 0) \neq 0.$$

Тогда найдется такая зависящая от $(x_1, \dots, x_n)$ локальная диффеоморфная замена переменных $t \mapsto s$ (в окрестности нуля), после которой функция W принимает следующий вид:

$$\pm s^2 + H(x_1, \dots, x_n).$$

Доказательство. Из теоремы о неявной функции следует существование гладкой функции $f(x_1, \dots, x_n)$ такой, что

$$\frac{\partial V}{\partial t}(f(x_1, \dots, x_n), x_1, \dots, x_n) = 0, \quad f(0, \dots, 0) = 0.$$

После замены $t = \tau + f(x_1, \dots, x_n)$ получим функцию

$$W(\tau, x_1, \dots, x_n) = V(\tau + f(x_1, \dots, x_n), x_1, \dots, x_n),$$

для которой $\frac{\partial W}{\partial \tau}(0, x_1, \dots, x_n) = 0$. Это же соотношение сохранится и для функции

$$U(\tau, x_1, \dots, x_n) = W(\tau, x_1, \dots, x_n) - W(0, x_1, \dots, x_n),$$

при этом будет выполняться и равенство $U(0, x_1, \dots, x_n) = 0$. Из леммы 3.7. получаем представление

$$U(\tau, x_1, \dots, x_n) = \tau^2 R(\tau, x_1, \dots, x_n).$$

После введения переменной $s = \tau \sqrt{|R(\tau, x_1, \dots, x_n)|}$ получаем соотношение $U(\tau, x_1, \dots, x_n) = \pm s^2$, из которого моментально следует искомое представление

$$V(t, x_1, \dots, x_n) = \pm s^2 + H(x_1, \dots, x_n),$$

где $H(x_1, \dots, x_n) = W(0, x_1, \dots, x_n) = V(f(x_1, \dots, x_n), x_1, \dots, x_n)$.

Доказательство теоремы 3.32. Применением леммы 3.8. функция V в условиях теоремы приводится к виду $\pm x^2 + H(y)$. Условие $\mu(V, 0) = r$ выполняется тогда и только тогда, когда $H(y) = y^{r+1}g(y)$, $g(0) \neq 0$. Введением переменной $u = y|g(y)|^{\frac{1}{r+1}}$ получаем искомое представление $V = \pm(x^2 \pm u^{r+1})$.

Замечание 3.13. В условиях теоремы Морса имеем $r = 1$. Следовательно, теорема 3.30. является частным случаем теоремы 3.32.

Анализ поведения гладких функций в окрестности двумерных конечнократных особенностей — существенно более сложная задача и к настоящему времени она также до конца не изучена. Но для небольших значений кратности получена полная классификация всех типов имеющихся особенностей и изучены поведения локальных (в окрестностях особых точек) морсовизаций функций [3].

В теории особенностей имеется направление, связанное с изучением функций, обладающих симметриями [60], [83], [90] (инвариантных относительно действий групп преобразований плоскости). Особенности функций в условиях групповой симметрии называются *эквивариантными* особенностями (или *G-эквивариантными*, если известна действующая группа G).

В вопросах аналитического строения профильных кривых для винтовых насосов важную роль играют функции V с *поворотной симметрией* (см. [34]):

$$V(z) = V(e^{\frac{2\pi i}{n}} z) \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad (3.15)$$

(n — фиксированное целое число). Соотношение (3.15) выполняется для функций, допускающих представление в виде

$$V(z) = W(I_0(z), I_1(z), I_2(z)) \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad (3.16)$$

$$I_0 = x^2 + y^2 = |z|^2, \quad z = (x, y).$$

$$I_1 = \prod_{k=1}^n (\omega^k, z), \quad \omega = e^{i\varphi}.$$

$$I_2 = I_1(az), \quad a = \omega^k, \quad \forall k, \quad |a| = 1, \quad \omega^k = e^{i\frac{2\pi}{n}k}, \\ \omega = e^{\frac{2\pi}{n}}.$$

Оказывается, что любой полином (от двух переменных), для которого выполняется соотношение поворотной симметрии (3.15), допускает представление (3.16) с единственным полиномом W . Данное утверждение доказывается аналогично теореме о симметрических многочленах. Многочлены I_0, I_1, I_2 здесь выполняют роль элементарных симметричных многочленов.

С каждой гладкой функцией $V(z)$ на комплексной плоскости связывается множество гладких функций

$$\{V_\varphi(z)\}_{\varphi \in \text{Diff}},$$

где Diff — группа диффеоморфных преобразований комплексной плоскости, $V_\varphi(z) = V(\varphi(z))$. Такие множества (полученные в результате действия группы на фиксированный элемент) называются орбитами. Группу Diff можно рассматривать как бесконечномерную группу Ли. При гладких действиях конечномерных групп Ли на конечномерных пространствах все орбиты являются гладкими многомерными поверхностями (подмногообразиями) и поэтому каждая точка орбиты имеет касательное к

орбите подпространство. Его коразмерность (определяемая как разность между размерностью объемлющего пространства и размерностью касательного подпространства) называется коразмерностью орбиты. Коразмерность равна минимальному количеству управляющих параметров для точки в объемлющем пространстве, необходимому для устойчивого (неустраняемого малым шевелением) пересечения орбиты управляемой точки. В классической механике коразмерность многообразия состояний совпадает с количеством независимых связей, наложенных на механическую систему и выделяющих заданное многообразие ее состояний (наложение независимых связей уменьшает размерность многообразия состояний на число, равное количеству связей).

Аналоги подобных понятий и конструкций имеются и в бесконечномерном случае (в функциональных пространствах). К сожалению, мы не имеем здесь возможности более точного описания соответствующей теории. Заметим лишь, что подмножество $O(V) \subset \mathbb{R}[[x, y]]$, состоящее из тейлоровских разложений в нуле для функций $V_\varphi(z) = V(\varphi(z))$, также называется орбитой и оно обладает многими свойствами обычных (конечномерных) орбит. В частности, для него определено касательное пространство, как множество T_V формальных степенных рядов вида

$$h(z) = \frac{d}{d\varepsilon} V(z + \varepsilon H(z))|_{\varepsilon=0} = (\text{grad } V(z), H(z))$$

(здесь H — произвольный степенной ряд с векторными (в $\mathbb{C}$) коэффициентами). Коразмерность T_V , определяемая как минимальная размерность подпространства в $\mathbb{R}[[x, y]]$, прямо дополняющего T_V до $\mathbb{R}[[x, y]]$, называется большой коразмерностью особенности V в нуле. Если к совокупности всех преобразований аргумента функции добавить преобразования сдвига значений функции, то орбита расширится на одно измерение, а коразмерность (расширенной) орбиты уменьшится на единицу. Эта величина (коразмерность расширенной орбиты) называется малой коразмерностью особенности или просто коразмерностью особенности V в нуле. Из описанных построений вытекает, что T_V совпадает с якобиевым идеалом в $\mathbb{R}[[x, y]]$, порожденным функцией V . Отсюда вытекает совпадение крат-

ности с большой коразмерностью или, соответственно, с коразмерностью, увеличенной на единицу.

3.2.9 Версальные деформации особенностей функций

Вопросы строения конечнократных особенностей функций и их морсовизаций естественно включаются в более общую теорию *деформаций особенностей*. Пусть функция V имеет в нуле конечнократную особенность. Под гладкой деформацией данной особенности подразумевается любое включение функции V в гладкое λ –параметрическое семейство гладких функций $U(z, \lambda)$, $U(z, 0) = V(z)$, определенных на некоторой окрестности нуля в $\mathbb{C}$, $\lambda \in \mathcal{U}$, $\mathcal{U}$ — некоторая окрестность нуля в $\mathbb{R}^m$. Среди всевозможных гладких деформаций выделяются так называемые *версальные* и *миниверсальные* деформации, играющие важную роль в общей теории деформаций. Это связано с тем, что версальные деформации содержат в себе все метаморфозы функции (перестройки линий уровня, расклейки и склейки особых точек, различные бифуркационные эффекты и т.д.), которые могут произойти при произвольном гладком деформировании функции.

Определение 3.8. Гладкая деформация $U(z, \lambda)$ функции $V(x)$ называется *версальной*, если факторклассы функций $\frac{\partial U}{\partial \lambda_k}(z, 0)$ (λ_k — координата λ , $k = 1, 2, \dots, m$) дают систему линейных образующих в локальном кольце особенности V в нуле (рассматриваемом как линейное пространство).

Замечание 3.14. Систему функций $\left\{ \frac{\partial U}{\partial \lambda_k}(z, 0), k = 1, 2, \dots, m \right\}$ иногда называют начальными скоростями деформации.

Определение 3.9. Гладкая деформация $U(z, \lambda)$ функции $V(x)$ называется *миниверсальной*, если факторклассы начальных скоростей данной деформации образуют (линейный) базис в локальном кольце особенности V в нуле.

Пример 3.2 Деформация

$$V(z) + \sum_{i=1}^{\mu} \lambda_k \omega_k(z), \quad (3.17)$$

где $\{\omega_k(z)\}$ — произвольный базис локального кольца особенности V в нуле, является миниверсальной.

Формула (3.17) дает наиболее простой и наиболее распространенный способ построения версальных деформаций. Обычно в качестве базисных функций $\{\omega_k(z)\}$ выбирают мономы (мономиальный базис локального кольца).

Пример 3.3 Для ранее рассмотренных простейших типов особенностей миниверсальными будут следующие деформации:

$$\begin{aligned} x^3 + y^2 + \lambda_1 x + \lambda_0, \quad x^4 + y^2 + \lambda_2 x^2 + \lambda_1 x + \lambda_0, \\ x^5 + y^2 + \lambda_3 x^3 + \lambda_2 x^2 + \lambda_1 x + \lambda_0, \\ x^3 \pm xy^2 + \lambda_3 x^2 + \lambda_2 y + \lambda_1 x + \lambda_0. \end{aligned}$$

Слово «версальный» является общей частью слов «трансверсальный» и «универсальный» [3], выражающих формально другие понятия, но имеющие прямое отношение к версальным деформациям. Первое из них означает, что отображение из $Diff \times \mathbb{R}^\mu$ в $\mathbb{R}[[\xi_1, \dots, \xi_n]]$, заданное соответствием

$$(\varphi, \lambda) \mapsto \hat{V}_\varphi(z) + \sum_{k=1}^{\mu} \lambda_k \omega_k(z), \quad (3.18)$$

где $\hat{V}_\varphi(z)$ — ряд Тейлора функции $V_\varphi(z) := V(\varphi(z))$ в нуле, является субмерсией в нуле (образ производной Гато совпадает с $\mathbb{R}[[\xi_1, \dots, \xi_n]]$). Второе понятие означает, что *любая гладкая деформация $W(z, \nu)$ функции V может быть получена из версальной деформации (3.18) посредством замены параметра и замены основного аргумента (зависящей от параметра)* :

$$W(z, \nu) = V(\varphi(z, \nu), \lambda(\nu)),$$

где $\varphi(\cdot, \nu)$ — гладкое семейство диффеоморфизмов (заданное на некоторой окрестности нуля), а $\lambda(\nu)$ — гладкое отображение, определенное в некоторой окрестности нуля пространства значений параметра ν . Причем $\varphi(\cdot, \nu)$ и $\lambda(\nu)$ определяются однозначно.

Посредством миниверсальных деформаций вводятся различные *бифуркационные диаграммы*, важнейшими среди которых являются *каустики*, *дискриминантные множества* и *множества Максвелла*. Как правило, функция V предварительно приводится (посредством подходящей замены координат) к полиномиальной нормальной форме (нормализация не является обязательной процедурой, но после ее проведения многое становится проще и удобней). В рамках алгебраического формализма теории особенностей накоплен определенный опыт построения полиномов, выражающих своей алгебраической формой типы (*архетипы*) особенностей гладких функций [3],[62].

Пусть λ принадлежит заданной области управления $\Lambda \subset \mathbb{R}^\mu$. Через $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$ обозначим «наблюдаемую» область (в ней и только в ней находятся изучаемые кривые). *Каустика* Σ — это совокупность тех управлений λ , при которых $V(\cdot, \lambda)$ имеет в $\mathcal{U}$ вырожденную критическую точку. *Дискриминантное множество* $\mathcal{D}$ — совокупность управлений λ , при которых $V(\cdot, \lambda)$ имеет в $\mathcal{U}$ критическую точку на нулевой линии уровня. *Множество Максвелла* Δ — совокупность управлений λ , при которых $V(\cdot, \lambda)$ принимает равные значения на паре различных критических точек.

При изучении критических точек и их локальных морсовизаций можно сократить на единицу количество параметров версальной деформации за счет рассмотрения лишь мономиальных образующих (в локальном кольце особенности) положительной степени (моном нулевой степени отбрасывается). Допустимость такой «экономии» связана, во-первых, с тем, что при дифференцировании постоянные слагаемые функции исчезают и поэтому они не играют никакой роли при определении критических точек и вычислении их кратности. Во-вторых, проистекающую при таком отбра-

сывании параметра потерю информации в вопросах, связанных с метаморфозами линий уровней, можно компенсировать расширением группы диффеоморфных преобразований аргумента функций посредством добавления преобразований постоянного сдвига значений функций.

Сокращенная на один параметр миниверсальная деформация называется ограниченной миниверсальной деформацией. Число входящих в нее управляющих параметров совпадает с коразмерностью особенности.

Замечание 3.15. В рассмотренных ранее примерах ограниченными миниверсальными деформациями будут следующие семейства $x^3 + y^2 + \lambda x$, $x^4 + y^2 + \lambda_2 x^2 + \lambda_1 x$, $x^5 + y^2 + \lambda_3 x^3 + \lambda_2 x^2 + \lambda_1 x$, $x^3 \pm xy^2 + \lambda_3 x^2 + \lambda_2 y + \lambda_1 x$.

Замечание 3.16. Геометрические структуры каустик и дискриминантных множеств также служат идентификаторами типов особенностей гладких функций [3], [11], [62]. Поэтому названия некоторых типов связаны с формами отвечающих им каустик (ласточкин хвост, вигвам, бабочка, кошелек и т.п.).

3.2.10 Типичные нормальные формы ключевых функций с двумерным и трехмерным вырождениями

Как отмечалось выше, кратности одномерных особенностей типа складки и сборки равны соответственно 2 и 3. Кратность выражает степень вырождения отображения в особой точке. Характер вырождения выражается алгебраической структурой локального кольца Q , в котором содержится большое количество информации и о локальной геометрической структуре отображения $\mathcal{F}$. Этот факт составляет основу для многих методов алгебраической геометрии и теории особенностей гладких отображений. Структура локального кольца не изменяется при диффеоморфных заменах координат в образе и прообразе отображения. Интересно то, что 2-кратные и 3-кратные особенности однозначно определяют свое локальное кольцо. Но начиная с кратности 4 количество типов локальных колец начинает резко возрастать, что свидетельствует о большом

разнообразии локальных геометрических типов поведения гладких отображений в особых точках фиксированной кратности. Например, следующие отображения исчерпывают все типы локальных колец, отвечающих 4-кратным особым точкам: $(x, y^4 + xy^2)$, (x^2, y^2) , $(x^2 - y^2, xy)$. Особенности этих отображений в начале координат имеют персональные названия: «ласточкин хвост», «гиперболическая омбилика» и «эллиптическая омбилика». Отображение (x^2, y^2) можно также записать в виде $(x^2 + y^2, xy)$ (обе эти формы сводятся друг к другу линейными обратимыми преобразованиями переменных). Отображения представляют собой нормальные аналитические локальные формы гладких отображений плоскости (в 4-кратных особых точках). Для особых точек более высоких кратностей появляются континуальные семейства типов локальных колец. Названия некоторых особенностей (ласточкин хвост, вигвам, бабочка, кошелек и т.п.) связаны с геометрической структурой каустик и дискриминантных множеств, которые могут служить идентификаторами особенностей.

Для ограниченной миниверсальной деформации одномерной сборки

$$V = x^4 - \delta x^2 + \varepsilon x$$

каустика является кривой, носящей названия «клов» или «шип». Ее параметризация легко выводится из соотношений $V' = V'' = 0$, определяющих вырожденную особую точку, то есть из уравнений

$$4x^3 - 2\delta x + \varepsilon = 6x^2 - \delta = 0.$$

Из этих соотношений получаем (локальную) параметризацию каустики

$$\delta = 6t^2, \quad \varepsilon = 8t^3.$$

Ее графическое изображение следующее:

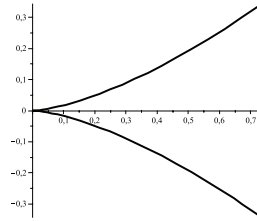


Рис. 19

Простейшая каустика — «клюв»

Для ограниченной миниверсальной деформации ласточкина хвоста

$$V = x^5 + \delta_3 x^3 + \delta_2 x^2 + \delta_1 x$$

каустику можно представить в виде множества сингулярных значений отображения «ласточкин хвост»

$$(t_1, t_2, t_3)^\top \mapsto (t_1, t_2, 5t_3^4 + 3t_2t_3^2 + 2t_1t_3)^\top.$$

Соответствующие изображения сечений $\delta_3 = \text{const}$ каустики ласточкина хвоста выглядят следующим образом:

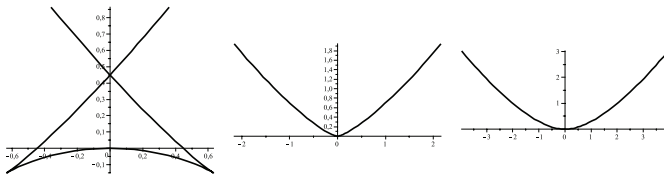


Рис. 20

Сечения каустики ласточкина хвоста при отрицательном, нулевом и положительном значениях δ_3 .

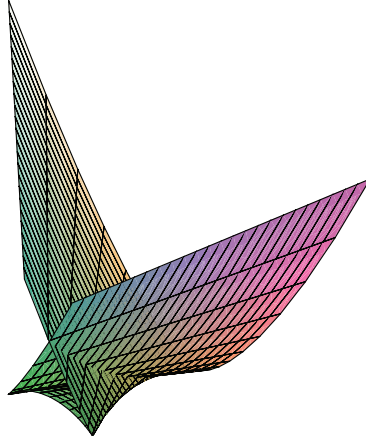


Рис. 21

Каустика «ласточкин хвост»

Параметризация сечения $\delta_3 = c$: $\delta_1 = 3cs^2 + 15s^4$, $\delta_2 = -3cs - 10s^3$.

При изучении двухмодовых прогибов упругих систем появляются (после нормализации) ключевые функции вида:

$$x^4 + 2ax^2y^2 + y^4 + q_1x^2y + q_2xy^2 + \delta_1x^2 + \delta_2y^2 + 2\delta_3xy + \varepsilon_1x + \varepsilon_2y,$$

q_i , δ_j , ε_k — малые вещественные параметры, $a > -1$, $a \neq 1$. Особенность многочлена $x^4 + 2ax^2y^2 + y^4$ называется «двумерной сборкой».

Ниже приведены некоторые из характерных графиков и линий уровней возмущенной двумерной сборки.

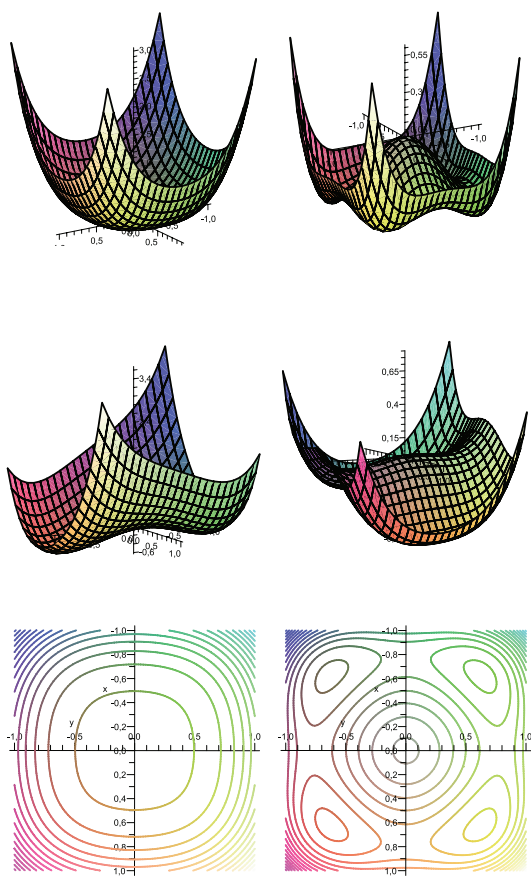


Рис. 22

Графики и линии уровней возмущенной двумерной сборки

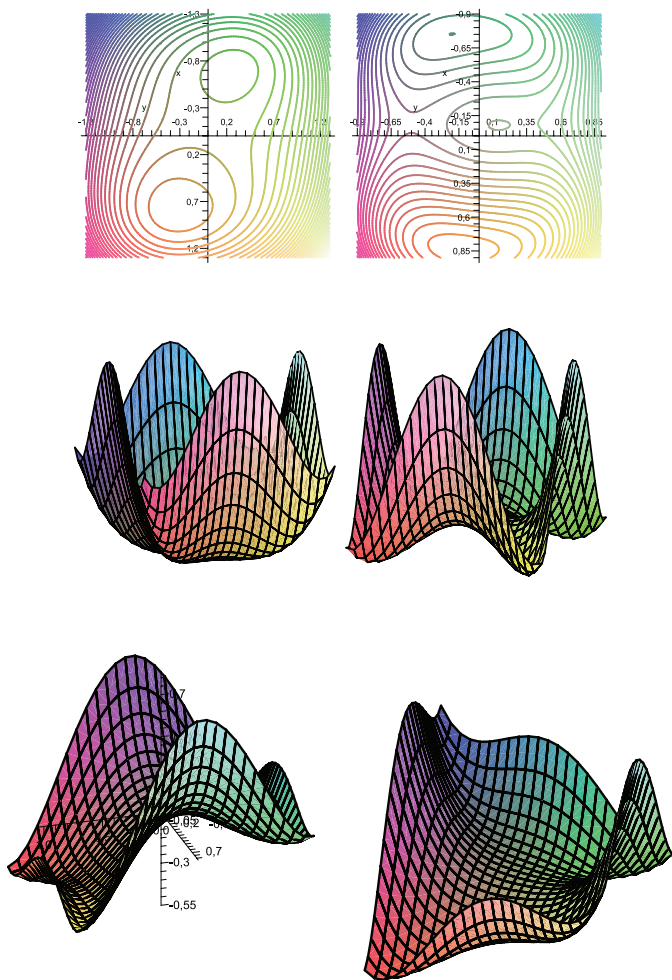


Рис. 23

Графики и линии уровней возмущенной двумерной сборки (продолжение)

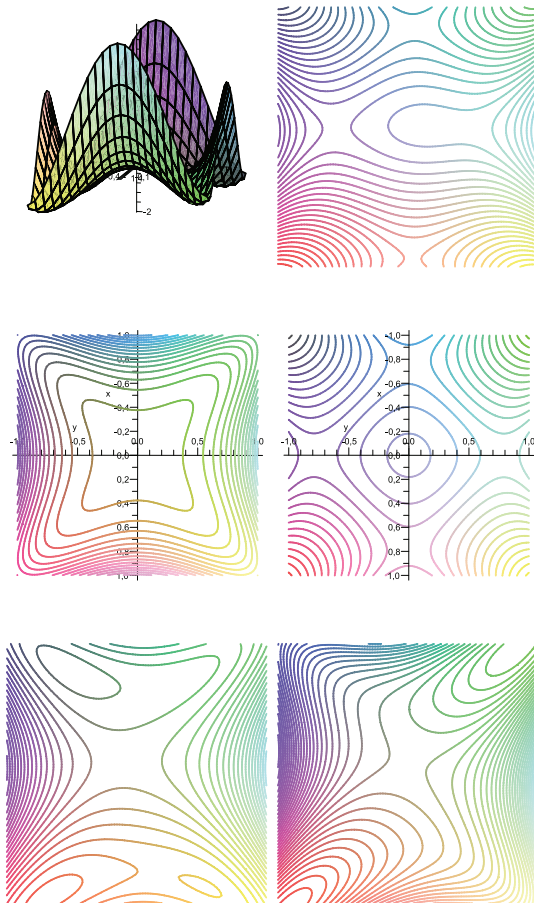


Рис. 24

Графики и линии уровней возмущенной двумерной сборки (окончание)

Известно, что функции с особенностями многомерной сборки — наиболее часто встречаемый тип ключевой функции в задачах посткритического анализа упругих систем и фазовых переходов [20], [24], [28], [64].

Напомним, что гладкая функция W на гладком конечномерном многообразии M имеет в критической точке $a \in M$ *особенность типа m -мерной сборки* [65], если в некоторой локальной системе координат с цен-

тром в точке a функция W допускает представление в виде

$$\sum_{i,j,k,l} \alpha_{ijkl} x_i x_j x_k x_l + o(\|x\|^4) + \sum_r \sigma_r y_r^2,$$

$$x = (x_1, \dots, x_m), \quad y = (y_1, \dots, y_{n-m}), \quad |\sigma_r| = 1,$$

с условием, что начало координат в $\mathbb{C}^m$ является изолированной стационарной точкой для комплексного продолжения кватернионной части $W^{(4)}$ этой функции. На кватернионную часть обычно накладывается условие «выживаемости» (условие Ландау-Хиггса), состоящее в требовании строгой минимальности нулевого значения полинома $W^{(4)}$. Если $M = \mathbb{R}^m$, $a = 0$, и функция W четная, то полином $W^{(4)}$ является дифференциалом Портеуса функции W (при критических значениях параметров):

$$W^{(4)}(\xi) = \lim_{t \rightarrow 0} t^{-4} W \left(t \sum_{j=1}^m \xi_j e_j \right),$$

$e_1, \dots, e_m$ — базис ядра второго дифференциала W . Особенности такого типа встречаются в задачах описания устойчивых состояний упругих материалов [18] и стабильных фаз сегнетоэлектрических кристаллов [30].

Число бифурцирующих из нуля стационарных точек функции W нечетно и не превосходит 3^m (этому числу равна кратность нулевой стационарной точки кватернионной формы общего положения). Из положительной определенности $W^{(4)}$ следует, что при возмущениях W вблизи нуля появляется не более одной точки локального максимума [24]. В этом случае ключевая функция допускает представление в виде

$$W(\xi, \lambda) = \text{const} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \alpha_j(\delta) \xi_j^2 + W_R^{(4)}(\xi) + O(|\lambda|)O(|\xi|^4) + O(|\xi|^6),$$

В случае четного потенциала с дополнительной симметрией параллелепипеда имеем (см. (1.36), (1.37))

$$W_R^{(4)}(\xi) = \sum_{k=1}^m V_0^{(4)}(e_k) \xi_k^4 + 6 \sum_{1 \leq i < j \leq m} \mathcal{V}_0^{(4)}(e_i, e_i, e_j, e_j) \xi_i^2 \xi_j^2,$$

где $\mathcal{V}_0^{(4)}(x, y, z, t)$ — симметричная 4-линейная форма, для которой

$$V_0^{(4)}(x) = \mathcal{V}_0^{(4)}(x, x, x, x).$$

При $n = 3$ получаем, после соответствующих масштабирующих преобразований переменных, кватричную часть в виде

$$\sum_{k=1}^3 \xi_k^4 + \sum_{1 \leq i < j \leq 3} b_{i,j} \xi_i^2 \xi_j^2,$$

Бифуркации экстремалей при деформациях трехмерных сборок с симметрией параллелепипеда изучены в [23]. Некоторые более общие случаи рассмотрены в [24], [28], [35].

Литература

- [1] Л.Д. Акуленко, С.А. Кумакшев. Бифуркация основного стационарного течения вязкой жидкости в плоском диффузоре // Изв. РАН. МЖГ. 2005. № 3. - С. 25-36.
- [2] Акуленко Л.Д., Кумакшев С.А. Бифуркация многомодовых течений вязкой жидкости в плоском диффузоре // ПММ. 2008. Т. 72. Вып. 3. - С. 431-441.
- [3] Арнольд В.И., Варченко А.Н., Гусейн-Заде С.М. Особенности дифференцируемых отображений // М.: МЦНМО. 2004. - 672 с.
- [4] Бардин Б.С., Фурта С.Д. Локальная теория существования периодических волновых движений бесконечной балки на нелинейно упругом основании// Актуальные проблемы классической и небесной механики. М.: Эльф. - 1998. - С.13-22.
- [5] Белецкий В.В. Движение искусственного спутника вокруг центра масс // М. : Наука 1965. - 416 с.
- [6] Борзаков А.Ю., Лемешко А.А., Сапронов Ю.И. Нелинейные ритмические аппроксимации и визуализации бифуркаций экстремалей // Вестник ВГУ. Сер. физ., матем. Воронеж: изд. ВГУ. 2003, вып. 2. - С. 100-112.
- [7] Борзаков А.Ю. Применение методов конечномерной редукции к глобальному анализу краевых задач на примере уравнения Дуффинга // Сборник трудов математического факультета ВГУ. 2004. Вып.8. С. 1-12.

- [8] Борзаков А.Ю. Редукции в нелокальном анализе вариационных краевых задач и уравнение колебаний маятника // Семинар по глобальному и стохастическому анализу. Воронеж: ВГУ. - 2005, Вып.1. - С. 34-44.
- [9] Борзаков А.Ю., Костина Т.И., Сапронов Ю.И. К нелокальному бифуркационному анализу вариационных краевых задач // Математические модели и операторные уравнения. Сборник научных статей под редакцией В.А. Костина и Ю.И. Сапронова. Том 6 - Воронеж: ВорГУ, 2009. - С. 8-23.
- [10] Борисович Ю.Г., Звягин В.Г., Сапронов Ю.И. Нелинейные фредгольмовы отображения и теория Лере-Шаудера // Успехи матем. наук. 1977. Т.32, вып.4. С. 3-54.
- [11] Брекер Т., Ландер. Л. Дифференцируемые ростки и катастрофы // М.: Мир, 1977. - 208 с.
- [12] Брус Дж., Джиблин. П. Кривые и особенности: Геометрическое введение в теорию особенностей // М.: Мир, 1988. - 262 с.
- [13] Вайнберг М.М., Треногин В.А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений // М.: Наука. 1969. - 528 с.
- [14] Ван дер Варден Б.Л. Алгебра // М. : Наука, 1979. - 624 с.
- [15] Винберг Э.Б. Симметрия многочленов // М.: МЦНМО, 2001. - 24с.
- [16] Власов В.З., Леонтьев Н.Н. Балки, плиты и оболочки на упругом основании // М.: Физматгиз, 1960. 491 с.
- [17] Волков Е.А. О решении краевых задач для уравнения Пуассона в прямоугольнике // Докл. АН СССР. 1962. - 147, № 2. - С. 13-16
- [18] Вольмир А.С. Гибкие пластины и оболочки // М.: Гостехиздат. 1956.
- [19] Ворович И.И. Математические проблемы нелинейной теории пологих оболочек // М.: Наука. 1989. - 376 с.

- [20] Гилмор Р. Прикладная теория катастроф // М.: Мир, 1984. Т. 1.- 350 с.; Т. 2. - 285 с.
- [21] Гнездилов А.В., Сапронов Ю.И. Нелокальные конечномерные редукции в теории изгиба тонких упругих пластин // Понтрягинские чтения - V. Тезисы докладов. Воронеж: Изд. ВГУ, 1994. - С. 37.
- [22] Гнездилов А.В., Сапронов Ю.И. Осесимметрическая конечномерная редукция для круглой упругой пластины // Материалы конференции по функциональному анализу и математической физике, посвященной 80-летию С.Г.Крейна. Воронеж: ВГУ, 1997. - С. 32-36.
- [23] Гнездилов А.В. Бифуркации критических торцов для функционалов с 3-круговой симметрией // Функц. анализ, 2000. Т. 34, вып. 1. - С. 83-86.
- [24] Даринский Б.М., Сапронов Ю.И. Бифуркации экстремалей вблизи особенности многомерной сборки // Известия ВУЗов. Математика. Т.2. Казань: Форт-Диалог, 1997. - С. 35-46.
- [25] Даринский Б.М., Сапронов Ю.И., Шалимов В.Л. К термодинамической теории сегнетоэлектрических фазовых переходов в кристаллах // Кристаллография. - 1999. - Т.44, № 4. - С. 1-5.
- [26] Darinskii M.M., Sapronov Yu.I., Shalimov V.V. Phase transitions in crystals characterized by polarization and deformation components of the order parameter // Ferroelectrics. - 2002. V. 265. - P. 31-42.
- [27] Даринский Б.М., Сапронов Ю.И. Дискриминантные множества и расклады бифурцирующих решений фредгольмовых уравнений // Современная математика и ее приложения. - Тбилиси. 2003. Т.7. - С.72-86.
- [28] Даринский Б.М., Сапронов Ю.И., Царев С.Л. Бифуркации экстремалей фредгольмовых функционалов // Современная математика. Фундаментальные направления. Том 12 (2004) - С. 3-140.

- [29] Зачепа В.Р. , Сапронов Ю.И. Локальный анализ фредгольмовых уравнений // Воронежский госуниверситет. Воронеж 2002.
- [30] Изюмов Ю.А., Сыромятников В.И. Фазовые переходы и симметрия кристаллов // М:Наука. 1984. - 247 с.
- [31] Иллс Дж. Основания глобального анализа // Успехи матем. наук. 1969. Т.24, №3. - С. 157-210.
- [32] Иллс Дж. Фредгольмовы структуры // Успехи матем. наук. - 1971. Т.26, №6. - С. 213-240.
- [33] Иосида К. Функциональный анализ // М.: «Мир», 1967. — 617 с.
- [34] Ковалева М.И., Костина Т.И., Сапронов Ю.И. Огибающие кривые, точки возврата и бифуркационный анализ нелинейных задач // Воронеж: ВУНЦ ВВС «ВВА», 2015. - 242 с.
- [35] Колесникова И.В. Двухмодовые ветвления экстремалей гладких функционалов в точках минимума с однородными особенностями шестого порядка // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. Саратов: СГУ, 2009. - Т.9, вып.2. – С.25-30.
- [36] Колесникова И.В., Даринский Б.М., Сапронов Ю.И. Ветвление фаз кристалла, определяемых термодинамическим потенциалом шестого порядка // Системы управления и информационные технологии. Москва-Воронеж, 2009. № 1(35). – С. 72-76.
- [37] Колесникова И.В., Сапронов Ю.И., Уварова Н.С. Максимальные расклады бифурцирующих экстремалей гладкого функционала из угловой точки минимума с омбилической особенностью // Вестник ВГУ, 2013, сер.: физ., мат., № 2. - С. 205-211.
- [38] Костин Д.В. Применение формулы Маслова для асимптотического решения одной задачи об упругих деформациях // Матем. заметки, 2008. Т. 83, № 1. - С. 50-60.

- [39] Костин Д.В. Об одной схеме анализа двухмодовых прогибов слабо неоднородной упругой балки // Доклады Академии наук. 2008, Т. 418, № 4, - С. 295-299
- [40] Костина Т.И. Анализ ветвления периодических решений уравнения Белецкого посредством вариационного метода Ляпунова-Шмидта // Математические модели и операторные уравнения. Том 5, часть 1. Воронеж: изд. ВГУ, 2008. - С. 98-103.
- [41] Костина Т.И., Сапронов Ю.И. Вычисление и применение ключевой функции в задаче о нелокальных прогибах круглой упругой пластины // Математические модели и операторные уравнения. Сборник научных статей под редакцией В.А. Костина и Ю.И. Сапронова. Том 7. Воронеж: изд. ВГУ, 2011. - С. 79-88.
- [42] Костина Т.И. Нелокальное вычисление ключевых функций в задаче о периодических решениях вариационных уравнений // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика, №1. 2011 - С. 181-186.
- [43] Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидродинамика, ч. 2 // М.: Физматгиз, 1963. - 728 стр.
- [44] Красносельский М.А., Бобылев Н.А., Мухамадиев Э.М. Об одной схеме исследования вырожденных экстремалей функционалов классического вариационного исчисления // ДАН СССР. - 1978. - Т. 240, №3. - С. 530-533.
- [45] Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П., Рутницкий Я.Б., Стеценко В.Я. Приближенное решение операторных уравнений // М.: Наука, 1969. - 456 с.
- [46] Красносельский М.А., Забрейко П.П. Геометрические методы нелинейного анализа // М.: Наука. 1975. - 512 с.

- [47] Кулагин Н.Е., Лерман Л.М., Шмакова Т.Г. Фронты, бегущие фронты и их устойчивость в обобщенном уравнении Свифта-Хоенберга // ЖВМ, 2008, том 48, № 4, с. 693-712
- [48] Лайнс М., Гласс А. Сегнетоэлектрики и родственные им материалы // М.: Мир. 1981. - 736 с.
- [49] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т VI. Гидродинамика. // М.: Наука, 1986. - 736 с.
- [50] Лемешко А.А. О равномерной сходимости с производными галеркинских приближений к решениям уравнений с параметрами // Математические модели и операторные уравнения. Том 2. Воронеж: изд. ВГУ, 2003. - С. 94-103.
- [51] Лемешко А.А. Об равномерной сходимости ньютоновских приближений к решениям уравнений с параметрами // Сборник трудов молодых ученых математического факультета ВГУ, Воронеж: ВГУ, 2003. - С.74-83.
- [52] Логинов Б.В. Теория ветвления нелинейных уравнений в условиях групповой инвариантности // Ташкент.: Фан, 1985. - 184 с.
- [53] Ляпунов А.М. Sur les figures d'équilibre peu differentes des ellipsoides d'une masse liquide homogene donee d'un mouvement de rotation, p.1 // Зап. Акад. наук, С.-Петербург. 1906.
- [54] Ляв А. Математическая теория упругости // М.-Л.: НКТП СССР. 1935. - 674 с.
- [55] Мазер Дж.Н. Конечная определенность гладких отображений // Математика, 1970. Т. 14, № 1. - С. 145-175.
- [56] Милнор Дж. Теория Морса // М.: Мир, 1965.
- [57] Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике // М.: Наука, 1970. - 512 с.

- [58] Мітропольський Ю.О., Мосеєнков Б.І. Дослідження коливань в системах з розподіленими параметрами (асимптотичні методи) // Видавництво Київського університету. 1961. - 123 п.
- [59] Ниренберг Л. Лекции по нелинейному функциональному анализу // М.: Мир, 1977. - 232 с.
- [60] Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям // М.: Мир, 1989. - 639 с.
- [61] Постников М.М. Введение в теорию Морса // М.: Наука, 1971. - 568 с.
- [62] Постон Т., Стюарт И. Теория катастроф и ее приложения // М.: Мир, 1980. - 608 с.
- [63] Пуанкаре А. Избранные труды в трех томах Том 2. Новые методы небесной механики. Топология. Теория чисел. // М.: Наука, 1972. - 1000 с.
- [64] Сапронов Ю.И. Полурегулярные угловые особенности гладких функций // Матем. сборник. 1989. Т.180, N 10. - С. 1299-1310.
- [65] Сапронов Ю.И. Конечномерные редукции в гладких экстремальных задачах // Успехи матем. наук. 1996. Т. 51, №1. - С. 101-132.
- [66] Сапронов Ю.И. Нелокальные конечномерные редукции в вариационных краевых задачах // Математические заметки. 1991. Т.49, вып.1. - С.94-103.
- [67] Сапронов Ю. И., Царев С.Л. Глобальное сравнение конечномерных редукций в гладких вариационных задачах // Матем. заметки. - 2000. Т. 58, №5. - С. 745-754.
- [68] Сапронова Т.Ю. О разрушении компактных критических орбит инвариантных фредгольмовых функционалов при несимметричных возмущениях // Труды математического факультета. Новая серия. - Воронеж: изд. ВГУ. 1997. - N2(18). - С. 54-58.

- [69] Сапронова Т.Ю. Квазиинвариантные подмногообразия фредгольмовых функционалов // Сборник статей аспирантов и студентов математического факультета ВГУ. Воронеж: изд. 1999. - С. 150-155.
- [70] Сидоров Н.А. Ветвление решений нелинейных уравнений с потенциальными системами разветвления // В кн.: Дифференциальные и интегральные уравнения. - Иркутск: Изд. Иркутского университета, 1980. - Вып.7. - С. 136-155.
- [71] Скрипов В.П., Скрипов А.В. Спинодальный распад (Фазовый переход с участием неустойчивых состояний) // УФН. Т.123, вып.2. 1979. - С. 193-231.
- [72] Смирнов В.И. Курс высшей математики. Том 2 // М.: Наука, 1974. - 656 с.
- [73] Толедано Ж.-К., Толедано П. Теория Ландау фазовых переходов // М.: Мир. 1994. - 461 с.
- [74] Царев С.Л. Один вариант леммы Морса и его приложения к нелинейным вариационным задачам // В кн.: Топологические методы нелинейного анализа. - Воронеж: Изд. ВГУ, 2000. - С. 132-136.
- [75] Cacciopoli R. Un principio di inversioni per le corrispondenze funzionali e sue applicazioni alla equazione a derivate parziali // Rend. Acc. Lincei. - 1932. V.16. - P. 390-395, P. 484-489.
- [76] Cacciopoli R. Sulle corrispondenze funzionali inverse diramate: teoria generale e applicazioni ad alcune equazioni non-lineari e al problema di Plateau // Rend. Acc. Lincei. - 1936. V.24. - P. 258-263, P. 416-421.
- [77] Cahn J.W., Hilliard J.E. Free energy of a nonuniform system. I. Interfacial free energy // J. Chem. Phys. 1958. Vol. 28. - P. 258-267.
- [78] Hamel G. Spiralförmige Bewegungen zäher Flüssigkeiten // Jahresber. Dtsch. Math. Ver. 1917. Bd 25. - S. 34-60.

- [79] Ishibashi Y.J. Phenomenological theory of domain walls // Ferroelectrics.
- 1989. V.98. - P.193-205.
- [80] Jeffery G.B. The two-dimensional steady motion of a viscous fluid // Phil.
Mag. 1915. Ser.6. V.29, № 172. - P. 455-465.
- [81] Marsden J.E. Qualitative Methods in Bifurcation Theory // Bull. Amer.
Math. Soc. - 1978. V.84, № 6.
- [82] Marsden J.E. On the Geometry of the Liapunow-Schmidt procedure//
Lect. Notes in Math. - 1979. V.755. - P.77-82.
- [83] Poénaru V. Singularités C^∞ en Présence de Symétrie // Lecture Notes
in Mathematics. V.510, chapter II. - N.-Y.: Springer-Verlag, 1976. - P.
61-89.
- [84] Smale S. An infinite dimensional version of Sard's theorem// Amer. J.
Math. 1965. v.87. - P. 861-866.
- [85] Schmidt E. Zur Theorie linearen und nichtlinearen Integralgleichungen,
Theil 3: Über die Auflösung der nichtlinearen Integralgleichungen und
Verzweigung ihrer Lösungen// Math. Ann. 1908. V.65. - P. 370-399.
- [86] Siersma D. Singularities of Functions on Boundaries, Corners, etc //
Quart. J. Oxford Ser. 1981. V.32, N 125. - P. 119-127.
- [87] Swift J., Hohenberg P.S. Hydrodynamic fluctuations at the convective
instability // Phys. Rev. 1977. V. A15. P. 319-328.
- [88] Thompson J.M.T., Hunt G. W., A General Theory of Elastic Stability.
John Wiley & Sons, 1973, 322 p.
- [89] Thompson J.M.T. Advances in Shell Buckling: Theory and Experiments
// International Journal of Bifurcation and Chaos, Vol. 25, No. 1 (2015)
- 25 p.
- [90] Wall C.T.C. A Note on Symmetry of Singularities // Bull. London Math.
Soc. 1980. V. 12. - P.169-175.

Люблю книги
ljubljuknigi.ru



yes
I want more books!

Покупайте Ваши книги быстро и без посредников он-лайн - в одном из самых быстрорастущих книжных он-лайн магазинов!
Мы используем экологически безопасную технологию "Печать-на-Заказ".

Покупайте Ваши книги на
www.ljubljuknigi.ru

Buy your books fast and straightforward online - at one of the world's fastest growing online book stores! Environmentally sound due to Print-on-Demand technologies.

Buy your books online at
www.ljubljuknigi.ru

OmniScriptum Marketing DEU GmbH
Heinrich-Böcking-Str. 6-8
D - 66121 Saarbrücken
Telefax: +49 681 93 81 567-9

info@omniscrptum.com
www.omniscrptum.com

OMNIScriptum



