

ФГБОУ ВО
ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Сапронов Ю. И.

Избранные вопросы математического моделирования

*(Математические конструкции в анализе посткритических процессов.
Ветви посткритических состояний)*

1 семестр

Учебное пособие для аспирантов и студентов 3-6 курсов кафедры математического
моделирования математического факультета ВГУ (краткий конспект)

Воронеж — 2018

Сапронов Ю.И. Избранные вопросы математического моделирования (Математические конструкции в анализе посткритических процессов. Ветви посткритических состояний). Воронеж: ВГУ. 2018.— 55 с.

За более чем столетний период своего развития теория нелинейных уравнений математической физики собрала большое количество примеров успешного исследования модельных уравнений посредством упрощающих (редуцирующих) переходов. В конкретных разделах механики и физики были созданы процедуры перехода к упрощенным модельным уравнениям, таким как уравнения Гельмгольца, Джеффри-Гамеля (в гидродинамике), Дзялошинского (в теории сегнетоэлектрических фазовых переходов), модели КдФ, Клейна-Гордона, СГ и пр. в теории нелинейных волн.

Отдельные направления, связанные с идеей редукции, зародились и успешно развились в рамках «чистого» функционального анализа и при решении «вычислительных» задач. Широкую известность приобрели методы Бубнова, Галеркина, Петрова, Ритца (*при построении приближенных редукций к конечномерным уравнениям*), методы Пуанкаре, Ляпунова, Шмидта, Каччиополи, Лере и Шаудера (*при построении точных редукций к конечномерным уравнениям*).

Настоящее учебное пособие посвящено главным образом методам Пуанкаре, Ляпунова и Шмидта, применяемым к нелинейным начально-краевым задачам вариационного типа, моделирующим посткритические состояния разнообразных физических, биологических и социальных систем. В пособии представлены некоторые типичные примеры нелинейных модельных уравнений, а также приведены результаты построения приближенных аналитических решений избранных уравнений.

Аналитические приближения к решениям служат хорошей основой для компьютерного моделирования.

© Сапронов Ю.И., 2018

© Воронежский государственный университет

Содержание

Глоссарий (перечень основных названий и понятий) по курсу ИВММ-1	4
Тема №1. Математические модели. Избранные примеры	4
1.1. Понятие математической модели	4
1.2. Примеры модельных уравнений	5
1.2.1. Модель Дуффинга	5
1.2.2. Эйлеров стержень	6
1.2.3. Модель Навье-Стокса для течения жидкости	7
1.2.4. Вариационные задачи для ДУ четвертого порядка. Уравнение Фусса-Винклера-Циммермана	7
1.2.5. Прямоугольная пластина Кармана	10
1.2.6. Модель «реакция-диффузия»	11
Тема №2. Посткритический анализ первой краевой задачи для уравнения Дуффинга	12
2.1. Модель «уравнение Дуффинга»	12
2.2. Выпуклость функционала энергии уравнения Дуффинга	13
2.3. Пример приближенного вычисления ключевой функции и построения ее графика .	15
Тема №3. Математический маятник и эйлеров стержень (начальные сведения)	16
Тема №4. Абстрактные фредгольмовы уравнения	18
4.1. Общие сведения	19
4.2. Конечномерные редукции	20
Тема №5. Потенциальные фредгольмовы уравнения	25
5.1. Редуцирующая схема Пуанкаре	25
5.2. Редуцирующая схема Ляпунова-Шмидта	27
Тема №6. Общая задача о бифуркации экстремалей	28
6.1. Выпуклые функционалы и приближения Галеркина-Ритца	29
6.2. Потенциальные уравнения с параметрами	30
6.3. Общий взгляд на конечномерную редукцию в вариационной задаче	31
6.4. Локальная вариационная схема Ляпунова-Шмидта	32
6.5. Приближенное вычисление ключевой функции	34
6.6. Редукция в случае симметрии параллелепипеда (по модам бифуркации)	34
6.7. Редукция как разновидность нелинейной ритцевской аппроксимации	35
Тема №7. Математический маятник и эйлеров стержень (продолжение)	35
7.1 Применение метода Ляпунова-Шмидта	36
7.2 Применение метода Морса-Ботта	37
Тема №8. Прогибы сжатой балки на двойном упругом основании в обобщенной модели Власова-Леонтьева	40
8.1 Предварительные замечания	40
8.2 Случаи трехмодового вырождения	41
8.3 Построение главной части ключевой функции	42
8.4 Анализ ключевой функции посредством вторичной редукции	44
Тема №9. Вычисление поля скоростей в 3D-диффузоре	45
9.1 Функциональная редукция уравнения Навье-Стокса в конической области	45
9.2 Асимптотические представления ветвей решений редуцированного уравнения при малых углах раскрытия диффузора	47
9.3 Поле скоростей для угла раскрытия $\frac{1}{2}\pi$	49
9.4 Алгоритм вычисления поля скоростей посредством конечномерной редукции	50
Список литературы	53

Глоссарий (перечень основных названий и понятий) по курсу ИВММ-1

1. Математическая модель.
2. Модельное уравнение.
3. Краевые и начально-краевые задачи.
4. Краевые условия Дирихле, Неймана и смешанные краевые условия.
5. Вариационная краевая задача.
6. Функционал энергии.
7. Вариационная динамическая система.
8. Экстремаль функционала (критическая точка).
9. Выпуклые функции и функционалы.
10. Коэрцитивные функции и функционалы.
11. Градиент функции.
12. Градиент функционала.
13. Теорема Эберлейна-Шмюльяна.
14. Осциллятор Дуффинга.
15. Потенциал осциллятора Дуффинга.
16. Уравнение "реакция-диффузия".
17. Потенциал уравнения "реакция-диффузия".
18. Бифуркация экстремалей.
19. Ветви бифурцирующих экстремалей.
20. Устойчивая экстремаль.
21. Индекс Морса экстремали.
22. Ключевая функция Пуанкаре.
23. Ключевая функция Ляпунова-Шмидта.
24. Главная линейная часть модельного уравнения.
25. Моды бифуркации.
26. Аппроксимация Галеркина.
27. Приближенное вычисление ключевой функции.
28. Связывающее отображение.
29. Приближенное вычисление связывающего отображения.
30. Стандартная главная часть 1-модовой ключевой функции.
31. Стандартная главная часть 2-модовой ключевой функции.
32. Стандартная главная часть 3-модовой ключевой функции.

Тема №1.

Математические модели. Избранные примеры

1.1. Понятие математической модели

Математической моделью называют *комплекс математических представлений, дающий информацию о том или ином реальном предмете или явлении*. Иногда, более кратко, говорят о *математическом образе* реального предмета или явления.

Весьма распространенный вариант модели — комплекс представлений, сгруппированный вокруг краевой или начально-краевой задачи для ДУ, поэтому само ДУ часто и называется математической моделью.

Построение и исследование модели позволяет получать скрытую информацию о реальном явлении, а сам процесс построения и изучения математических моделей называется при этом *математическим моделированием*.

Связь модели с реальностью осуществляется посредством гипотез, идеализаций и упрощений. Таким образом, метод математического моделирования состоит в замене реального предмета исследования идеализированным объектом (математической моделью) с последующим изучением этого объекта.

Модельные уравнения в данном пособии связаны с теорией упругого равновесия, теорией фазовых переходов в кристаллах, гидродинамикой и динамикой концентраций. В их анализе используются методы теории краевых и начально-краевых задач для нелинейных дифференциальных уравнений — обыкновенных и с частными производными. В свою очередь, методы краевых и начально-краевых задач осуществляются в рамках функционального анализа: соответствующие задачи представляются в виде абстрактного фредгольмова операторного уравнения (см. [10], [28], [46], [58] и литературу в этих источниках) и анализируются средствами функционального анализа, бесконечномерной топологии и методов вычислений. Исследование операторных уравнений проводится через редукцию фредгольмова уравнения к конечномерному уравнению. Локальная конечномерная редукция впервые была предложена Ляпуновым (1906 г.) и Шмидтом (1908 г.). Идея нелокальной конечномерной редукции фредгольмова уравнения была предложена Р. Каччиополли (1932 г.) и использована им при введении топологической степени фредгольмова отображения. Варианты развития нелокального анализа фредгольмовых уравнений предлагались также в работах А.С. Шварца (1964 г.), С. Смейла (1965 г.), М.А. Красносельского, П.П. Забрейко (1969 г.), К.Д. Elworthy, А.Д. Tromba (1970 г.), Ю.Г. Борисовича, В.Г. Звягина, Ю.И. Сапронова (1970-77 гг.) и др. Идея глобального сведения анализа бесконечномерного фредгольмова уравнения к анализу конечномерного уравнения была предельно точно сформулирована и строго обоснована в монографии М.А. Красносельского и П.П. Забрейко «Геометрические методы нелинейного анализа» [46]. Позже, после появления современных быстродействующих компьютеров и мощных программных комплексов начали появляться и работы по развитию и применению численных методов нелокального бифуркационного анализа [6]-[8], [40]-[42], [36, 37], [48, 49].

1.2. Примеры модельных уравнений

Избранные классические математические модели представлены ниже уравнениями и краевыми условиями.

1.2.1. Модельное уравнение ДUFFинга.

$$\ddot{x} + \lambda x - x^3 = q(s), \quad x : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad (1)$$

— *уравнение прогиба упругой балки* (в строительной механике) или *элементарный нелинейный осциллятор* в теории колебаний [63]. Здесь $x(s)$ — функция средней линии балки, $q(s)$ — функция внешнего воздействия, суммирующая начальные деформации и влияние внешних силовых полей. В случае осциллятора $x(s)$ — параметр, характеризующий отклонение колебательной системы от состояния равновесия.

Данное уравнение дополняется, как правило, краевыми (граничными) условиями вида

$$x(0) = x(1) = 0 \quad (2)$$

— условие первого рода (условие Дирихле),

$$\dot{x}(0) = \dot{x}(1) = 0, \quad (3)$$

— условие второго рода (условие Неймана),

$$x(0) = \dot{x}(1) = 0 \quad (4)$$

— условие третьего рода (смешанное условие),

$$x(0) = \dot{x}(1) = 0 \quad (5)$$

— условие периодичности (периодическая краевая задача, осциллятор Дуффинга, нелинейный осциллятор и т.д.).

Ниже это уравнение будет использовано в качестве основной «учебной модели», на основе которой будут продемонстрированы основные методы посткритического анализа.

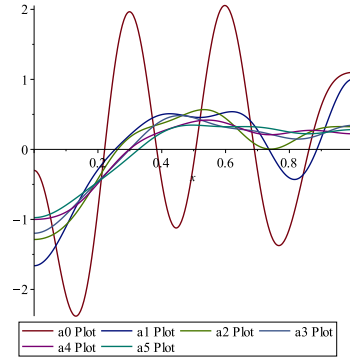


Рис. 1

Пример графического изображения приближенных решений модельного уравнения Дуффинга (полученный А.С. Коротких [36] в случае краевых условий Неймана)

1.2.2. Эйлеров стержень.

$$\ddot{x} + \lambda \sin x = q(s), \quad x : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad (6)$$

— *уравнение изгиба тонкого упругого стержня (эйлерова стержня)*, где $x(s)$ — угловая функция средней линии стержня (угол между касательной к средней линии и осью недеформированного стержня), $q(s)$ — функция несовершенства, суммирующая начальные деформации и влияние внешних силовых полей.

Данное уравнение дополняется, как правило, краевыми (граничными) условиями вида

$$x(0) = x(1) = 0 \quad (7)$$

— в случае жесткого закрепления концов стержня (с нулевым углом),

$$\dot{x}(0) = \dot{x}(1) = 0, \quad \int_0^1 \sin(x(s)) ds = 0, \quad (8)$$

— в случае шарнирного закрепления концов стержня,

$$x(0) = \dot{x}(1) = 0 \quad (9)$$

— в случае смешанного закрепления концов стержня (есть и др. случаи).

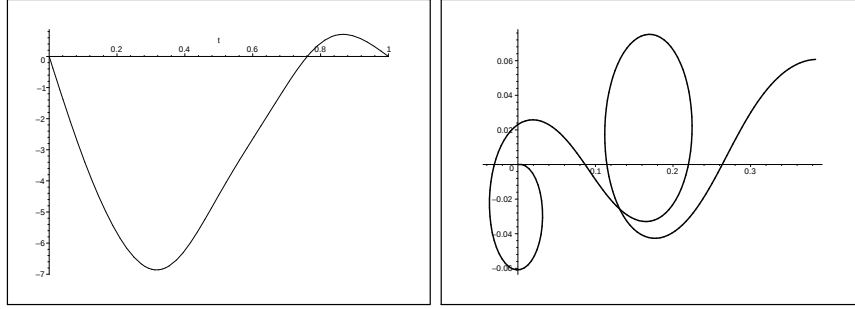


Рис. 2

Пример решения $x(s)$ модельного уравнения (фигура слева) и соответствующей ему конфигурации стержня (справа). Оба изображения получены А.Ю. Борзаковым

1.2.3. Модель Навье-Стокса для течения жидкости.

Течение жидкости в заданном объеме задается уравнением Навье-Стокса (в прямоугольной системе координат, для несжимаемой жидкости) [43]:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{v} = \nu \Delta \mathbf{v} - \text{grad } p. \quad (10)$$

Это уравнение дополняется соотношением (уравнением) неразрывности

$$\text{div } \mathbf{v} = 0 \quad (11)$$

и краевым условием прилипания жидкости на границе

$$v(x, t) = 0 \quad \forall x \in \partial U. \quad (12)$$

Здесь $v = v(x, t)$ — вектор скорости частицы жидкости, находящейся в точке $x = (x_1, x_2, x_3)^T \in U \subset \mathbb{R}^3$ (ограниченной области U трехмерного координатного пространства $\mathbb{R}^3$ с гладкой границей ∂U) в момент времени t , $v = (v_1, v_2, v_3)^T \in \mathbb{R}^3$, n — нормаль к границе ∂U .

Примеры исследования такого уравнения посредством упрощающих редукций можно найти в [1],[2],[23],[33],[43],[81].

1.2.4. Вариационные задачи для ДУ четвертого порядка. Уравнение Фусса-Винклера-Циммермана .

Стационарное уравнение СХ (Свифта-Хогенберга [85], [47]) формально совпадает с нелинейным уравнением прогибов балки на упругом основании. Подобные уравнения исследовали Ю.А. Митропольский, Б.И. Мосеев [57], Б.С. Бардин, С.Д. Фурта [5] и др. Линейное уравнение изгиба балки на упругом основании представляет собой широко известную модель Фусса-Винклера-Циммермана (ФВЦ), служащую, вплоть до настоящего времени, основой для большинства инженерных исследований устойчивости строительных сооружений [13]. Нелинейные обобщения модели типа ФВЦ начали рассматриваться сравнительно недавно [5],[13],[36],[37],[47], [85].

Бифуркационный анализ периодических решений нелинейного уравнения, аналогичного типу ФВЦ, исследовалось в работах Б.М. Даринского и Ю.И. Сапронова [27], основное внимание в которых уделялось вопросу зарождения посткритических периодических структур в кристаллах. Прогибы неоднородных балок на упругом основании изучались Д.В. Костиным в работах [38, 39].

Нелинейная промасштабированная модель колебательного движения однородной балки на упругом основании задается уравнением (см. [5])

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \kappa \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \alpha w + w^3 = 0,$$

где w — прогиб балки (смещение точек средней линии упругой балки, расположенной вдоль оси x). Аналогичное уравнение возникает в теории кристаллов [30], в которой w — параметр порядка.

Первый шаг в изучении такой задачи — отыскание равновесных (стационарных) состояний, определяемых уравнением

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + \kappa \frac{d^2 w}{dx^2} + \alpha w + w^3 = 0, \quad (13)$$

которое ниже мы рассмотрим при стандартных краевых условиях

$$w(0) = w(1) = w''(0) = w''(1) = 0. \quad (14)$$

Начально-краевая задача с граничным условием (14) допускает 2-мерные вырождения.

Уравнение (13) является уравнением Эйлера-Пуассона для экстремалей функционала (действия)

$$V = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} \left(\left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 - \kappa \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 + \alpha w^2 \right) + \frac{w^4}{4} \right) dx. \quad (15)$$

Двумерное вырождение нулевой экстремали происходит при

$$\kappa = \kappa_1 := (p^2 + q^2)\pi^2, \quad \alpha = \alpha_1 := p^2 q^2 \pi^4, \quad p, q \in \mathbb{N},$$

со стандартными модами бифуркации (базисом ядра второго дифференциала)

$$e_1 = \sqrt{2} \sin(p\pi x), \quad e_2 = \sqrt{2} \sin(q\pi x).$$

Ниже предполагается, что $p = 1$, $q = 2$ и, соответственно, $\kappa_1 = 5\pi^2$, $\alpha_1 = 4\pi^4$ (эти значения являются наименьшими из тех, при которых происходит 2-мерное вырождение; в остальных случаях анализ аналогичен).

Редукция Ляпунова-Шмидта [27] к (ключевой) функции (двух переменных)

$$W(\xi, \delta) = \inf_{w: \langle w, e_1 \rangle = \xi_1, \langle w, e_2 \rangle = \xi_2} V(w, \alpha_1 + \delta_1, \kappa_1 + \delta_2), \quad (16)$$

$\xi = (\xi_1, \xi_2)$, $\delta = (\delta_1, \delta_2)$, сохраняет симметрию функционала действия. Так как функционал (15) инвариантен относительно инволюций J_1, J_2 :

$$J_2(p)(x) := p(1 - x), \quad J_1 := -J_2,$$

то и для функции (16) имеем

$$W(-\xi_1, \xi_2, \delta_1, \delta_2) = W(\xi_1, -\xi_2, \delta_1, \delta_2) = W(\xi_1, \xi_2, \delta_1, \delta_2)$$

(симметрию прямоугольника), из которой вытекает [27] справедливость асимптотического представления

$$W(\xi, \delta) = U(\xi, \delta) + o(|\xi|^4) + O(|\xi|^4)O(\delta),$$

где $U(\xi, \delta) = V(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2, \delta)$ — линейная ритцевская аппроксимация функционала V по модам e_1, e_2 . Таким образом, для ключевой функции имеет место асимптотическое представление

$$\frac{\lambda_1}{2} \xi_1^2 + \frac{\lambda_2}{2} \xi_2^2 + \frac{1}{4} (A \xi_1^4 + 2B \xi_1^2 \xi_2^2 + C \xi_2^4) + o(|\xi|^4) + O(|\xi|^4)O(\delta), \quad (17)$$

где

$$\lambda_1 = \delta_1 - \pi^2 \delta_2, \quad \lambda_2 = \delta_1 - 4\pi^2 \delta_2,$$

$$A = \int_0^1 e_1^4 dx = \frac{3}{2}, \quad B = \int_0^1 e_1^2 e_2^2 dx = 3, \quad C = \int_0^1 e_2^4 dx = \frac{3}{2}.$$

Сократив на множитель $3/2$, получим функцию (17) с нормализованной главной частью:

$$\widetilde{W}_0(\xi, \delta) = \widetilde{U}(\xi, \delta) + o(|\xi|^4) + O(|\xi|^4)O(\delta),$$

где

$$\widetilde{U}(\xi, \delta) = \frac{\tilde{\lambda}_1}{2} \xi_1^2 + \frac{\tilde{\lambda}_2}{2} \xi_2^2 + \frac{1}{4} (\xi_1^4 + 4\xi_1^2 \xi_2^2 + \xi_2^4).$$

«Геометрический сюжет» бифуркации критических точек и первые асимптотики ветвей бифурцирующих точек (по закритическим приращениям управляющих параметров) для функции $\widetilde{W}_0(\xi, \delta)$ полностью определяются ее главной частью $\widetilde{U}(\xi, \delta)$, которая представляет собой «возмущенную двумерную сборку» (с коэффициентом двойного отношения $a = 4$), четную по каждой переменной [27].

Пусть $\theta_1 = \tilde{\lambda}_1 - 2\tilde{\lambda}_2$, $\theta_2 = \tilde{\lambda}_2 - 2\tilde{\lambda}_1$. Так как матрица Гессе функции $\widetilde{U}$ представима в виде

$$\begin{pmatrix} \tilde{\lambda}_1 + 3\xi_1^2 + 2\xi_2^2 & 4\xi_1 \xi_2 \\ 4\xi_1 \xi_2 & \tilde{\lambda}_2 + 2\xi_1^2 + 3\xi_2^2 \end{pmatrix},$$

то, как нетрудно проверить, при $\theta_1 > 0$ и $\theta_2 > 0$ существуют четыре 2-модовые критические точки индекса 1. Все 1-модовые точки при этом являются точками локальных минимумов, а нуль — критической точкой индекса 2. Рождение 1-модовых критических точек происходит при переходах параметров $\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2$ в области отрицательных значений.

Каустика (бифуркационная диаграмма функций [4]) $\Sigma_{\widetilde{U}}$ функции $\widetilde{U}$ разбивает плоскость управляющих параметров на шесть зон

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \{\tilde{\lambda}_1 > 0, \tilde{\lambda}_2 > 0\}, \\ \omega_1 &= \{\tilde{\lambda}_1 < 0, \tilde{\lambda}_2 > 0\}, \\ \omega_2 &= \{\tilde{\lambda}_1 > 0, \tilde{\lambda}_2 < 0\}, \\ \omega_3 &= \{\tilde{\lambda}_1 < 0, \tilde{\lambda}_2 < 0, \theta_1 < 0, \theta_2 > 0\}, \\ \omega_4 &= \{\tilde{\lambda}_1 < 0, \tilde{\lambda}_2 < 0, \theta_1 > 0, \theta_2 < 0\}, \\ \omega_5 &= \{\tilde{\lambda}_1 < 0, \tilde{\lambda}_2 < 0, \theta_1 > 0, \theta_2 > 0\}. \end{aligned}$$

Каждой зоне соответствует свой расклад (*bif*-расклад) бифурцирующих критических точек: параметрам из зоны ω_0 отвечает случай единственной критической точки (точка минимума в нуле), для ω_1, ω_2 — пара симметрично расположенных (относительно нуля) 1-модовых точек минимума и седло в нуле, для ω_3, ω_4 — пара симметрично расположенных 1-модовых точек минимума, пара 1-модовых седел и точка локального

максимума в нуле, для ω_5 — четверка симметрично расположенных 1-модовых точек минимума, четверка 2-модовых седел и точка локального максимума в нуле.

При обходе плоскости управляющих параметров против часовой стрелки вокруг нуля, начиная с зоны ω_0 , соответствующие метаморфозы линий уровней и распределений критических точек изображены на следующей диаграмме:

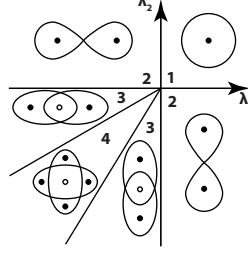


Рис. 3

Метаморфозы характерных линий уровней

В этом случае появляются те и только те расклады бифурцирующих критических точек (*bif*-расклады), которым соответствуют следующие целочисленные векторы: $(1, 0, 0)$, $(2, 1, 0)$, $(2, 2, 1)$, $(4, 4, 1)$ (в раскладе (l_0, l_1, l_2) компонента l_k равна количеству критических точек с индексом Морса, равным k).

1.2.5. Пластина Кáрмана.

Изгиб тонкой прямоугольной упругой пластины описывается уравнениями Кáрмана [16], [17]

$$\Delta^2 w - [w, \varphi] + \lambda w_{xx} = \Delta^2 \varphi + \frac{1}{2} [w, w] = 0 \quad (18)$$

при краевых условиях

$$w = \Delta w = \varphi = \Delta \varphi = 0|_{\partial \Omega_a}. \quad (19)$$

Более точно, приведенные выше промасштабированные уравнения Кáрмана описывают состояние упругой прямолинейной пластины, продольно сжатой и свободно опертой на крае.

Через w и φ в этих уравнениях обозначены функции прогиба и напряжения пластины, Δ — гармонический оператор Лапласа,

$$[w, \varphi] := w_{xx} \varphi_{yy} + w_{yy} \varphi_{xx} - 2w_{xy} \varphi_{xy},$$

$$\Omega_a = [0, a] \times [0, 1],$$

λ — параметр нагрузки (сжатия пластины).

В случае круглой пластины уравнение Кáрмана допускает функциональную редукцию к ОДУ от радиальной координаты (из полярных координат точки пластины), что позволяет построить приближение к ключевой функции на основе аппроксимации Галеркина по системе функций Бесселя (см. [32], [41]).

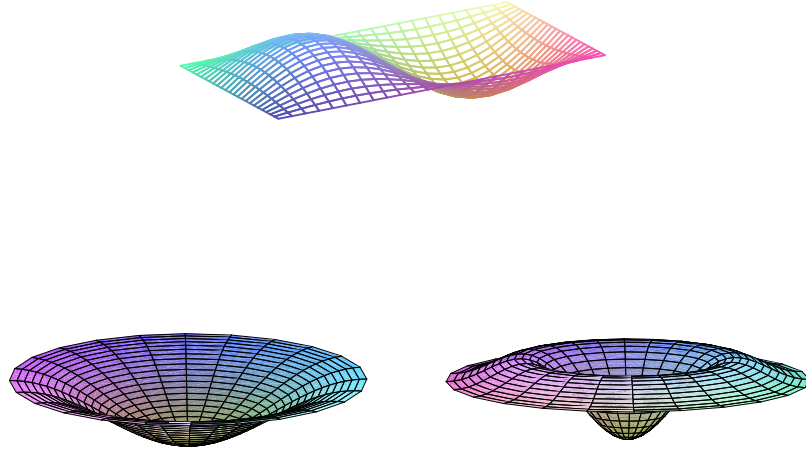


Рис. 4

Примеры изображений прогибов прямоугольной и круглой пластин.

1.2.6. Модель «реакция-диффузия».

Известно, что структурные изменения вещества изучаются посредством специальным образом подобранных модельных дифференциальных уравнений [19], [30], [54], [61], [64]. Например, при изучении динамики спонтанного разделения фаз (бинарного) вещества (сплава), при исследовании стабильных распределений концентраций вещества и т.п. часто используется градиентная динамическая система типа «реакция-диффузия»

$$\dot{w} = -\text{grad} (V(w) - C[w]) = \Delta w + \lambda w - w^3 - C, \quad (20)$$

в которой $w = w(x, t)$ — относительная концентрация фракции вещества, $x \in U \subset \mathbb{R}^2$,

$$V(w) := \iint_U \left(\frac{|\nabla w|^2}{2} - \lambda \frac{w^2}{2} + \frac{w^4}{4} \right) dx_1 dx_2$$

— интеграл энергии, U — область, занятая веществом, t — время. Как правило, разыскиваются такие решения $w = w(x, t)$, для которых выполнено *граничное условие Неймана*

$$\frac{\partial w(x, t)}{\partial n} = 0 \quad \forall x \in \partial U,$$

где ∂U — граница области U , n — векторное поле нормалей к границе.

Первоочередной интерес представляют стационарные состояния — решения $w = w(x)$ стационарного уравнения

$$\Delta w + \lambda w - w^3 - C, \quad C = \text{const},$$

или, что одно и то же, экстремали (критические точки) функционала

$$\bar{V}(w) := V(w) - C[w],$$

где $[w] := \iint_U w dx_1 dx_2$ — среднее значение w .

Тема №2.

Посткритический анализ первой краевой задачи для уравнения Дуффинга

2.1. Модель «уравнение Дуффинга».

Простой и одновременно характерный пример посткритического анализа дает краевая задача первого рода для уравнения Дуффинга. Это уравнение обладает *свойством универсальности*, так как, во-первых, оно охватывает значительное количество реальных систем, в которое входят упругая балка, нелинейный осциллятор, кристалл (вытянутый вдоль одной из осей симметрии), разновидности нелинейных волн и пр., во-вторых, оно позволяет предельно четко и строго отследить применение вариационной схемы Ляпунова-Шмидта.

Итак, рассмотрим случай упругой балки со свободно опертыми концами. Прогибы балки соответствуют решениям уравнения

$$\ddot{x} + \lambda x - x^3 = q(s), \quad (21)$$

при краевых условиях (7). Функция $q(s)$ отвечает за суммарное воздействие внешних факторов и начальных несовершенств (искривлений).

Положим $E = \{x \in C^2([0, 1], \mathbb{R}) : x(0) = x(1) = 0\}$, $F = C([0, 1], \mathbb{R})$, $H = L_2([0, 1], \mathbb{R})$. Скалярное произведение в H будем обозначать $\langle \cdot, \cdot \rangle$: $\langle x, y \rangle = \int_0^1 x(t) y(t) dt$.

Левая часть (21), взятая со знаком минус, задает гладкое фредгольмово отображение индекса 0 из E в F , которое является антиградиентом в тройке пространств $\{E, F, H\}$ гладкого на E функционала энергии

$$V(x) = \int_0^1 \left(\frac{\dot{x}^2}{2} + \lambda \frac{x^2}{2} - \frac{\dot{x}^4}{4} \right) dt. \quad (22)$$

Обозначим e_k функцию

$$\sqrt{2} \sin(\pi k t), \quad k \in \mathbb{N},$$

эти функции образуют полную ортонормированную систему в H и представляют собой систему так называемых *мод прогиба*. Эти функции являются собственными векторами оператора $\frac{d^2}{ds^2}$ (при краевых условиях первого рода).

Если $\lambda \leq (\pi(n+1))^2$, то квадратичная форма

$$\int_0^1 (\dot{x}^2 - \lambda x^2) dt$$

положительна на ортогональном дополнении в H к подпространству (линейной оболочке) $E^n := \text{Lin}(e_1, \dots, e_n)$. Пусть

$$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)^\top \in \mathbb{R}^n, \quad l(\xi) = \sum_j \xi_j e_j \in E^n,$$

$$\tilde{E} = \{x \in E : \langle x, e_j \rangle = 0, j = 1, \dots, n\} = E \cap (E^n)^\perp,$$

$$\tilde{E}_\xi = \{x \in E : \langle x, e_j \rangle = \xi_j, j = 1, \dots, n\} = l(\xi) + \tilde{E}.$$

Теорема 1. *Функционал V имеет единственную невырожденную условно критическую точку в слое $\tilde{E}_\xi$.*

Для доказательства этого утверждения достаточно рассмотреть энергетическое гильбертово пространство H^1 , полученное замыканием E в норме, порожденной скалярным произведением $\langle x, y \rangle_1 = \langle \dot{x}, \dot{y} \rangle = \langle -\ddot{x}, y \rangle$. Пусть H_ξ^1 — замыкание $\tilde{E}_\xi$ в H^1 . Функционал V является выпуклым и коэрцитивным на аффинном подпространстве H_ξ^1 , что гарантирует существование единственной условной экстремали v_ξ в H_ξ^1 . На самом же деле, $v_\xi \in \tilde{E}_\xi$. «Подкачку гладкости» позволяет произвести соотношение, являющееся уравнением Эйлера-Лагранжа для условных экстремалей функционала V в $\mathcal{H}_\xi^1$. Из этого следует, что v_ξ принадлежит классу C^2 .

Из фредгольмовости с нулевым индексом отображения $\nabla_H V : E \rightarrow F$ следует гладкость так называемой ключевой функции Ляпунова-Шмидта

$$W_{LS}(\xi) = V(l(\xi) + v_\xi) = \inf_{v \in \tilde{E}} V(l(\xi) + v) = \inf_{x \in \tilde{E}_\xi} V(x).$$

Аналогичные построения можно провести и в случае маятника, заменив все использованные выше функциональные пространства на аналогичные пространства для периодических функций.

Следует отметить, что периодические краевые задачи для неоднородного уравнения Дуффинга в случае двух нелокальных ключевых параметров ранее изучал своих работах А.Ю. Борзаков [6]-[8].

Общая схема его рассуждений выглядит следующим образом. Пусть $\lambda \leq 9\pi^2$ (не превосходит третьего критического значения) и

$$E = \text{Lin}(e_1, e_2) + E^{\infty-2},$$

— ортогональное разложение, где $E^{\infty-2}$ — ортогональное дополнение к $\text{Lin}(e_1, e_2)$ (подпространство всех функций, у которых коэффициенты Фурье по e_1, e_2 равно нулю). При $\lambda \leq 9\pi^2$ функционал действия является выпуклым на $E^{\infty-2}$, а его условный градиент послойно собственный.

Таким образом, для отыскания и изучения периодических решений уравнения (34) можно применить глобальную ключевую функцию

$$W(\xi) = \inf_{v \perp e_1, e_2} V(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + v).$$

А.Ю. Борзаков установил, что эту функцию можно сколь угодно точно вычислять посредством комбинирования ритцевских аппроксимаций с редукцией Пуанкаре-Ляпунова-Шмидта.

2.2. Выпуклость функционала энергии уравнения Дуффинга

Ниже приведена сводка основных формул, из которых следует выпуклость функционала Дуффинга V при докритических значениях параметра. А также выпуклость V на подпространстве $E^{\infty-m}$, ортогонально дополняющем линейную оболочку «главных» мод $e_1, \dots, e_m$, по которым допускается вырождение (при $\lambda \leq (m+1)^2$).

Модельное уравнение Дуффинга:

$$\ddot{x} + \lambda x - x^3 = q(s), \quad x : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}. \quad (23)$$

Граничные условия 1 рода (условия Дирихле):

$$x(0) = x(1) = 0. \quad (24)$$

Потенциал (функционал энергии):

$$V(x) = \int_0^1 \left(\frac{\dot{x}^2}{2} - \lambda \frac{x^2}{2} + \frac{\dot{x}^4}{4} + qx \right) dt. \quad (25)$$

Первая вариация (первый дифференциал) функционала энергии:

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x)(h) = \int_0^1 \left(\dot{x} \dot{h} - \lambda x h + x^3 h + q \right) dt = \quad (26)$$

$$= \int_0^1 \left(-\ddot{x} h - \lambda x h + x^3 h + q h \right) dt = - \int_0^1 \left(\ddot{x} + \lambda x - x^3 - q \right) dt = -\langle g, h \rangle, \quad (27)$$

где

$$g = \ddot{x} + \lambda x - x^3 - q \quad (28)$$

— антиградиент функционала V (градиент со знаком «минус»).

Уравнение Дуффинга в градиентной форме:

$$g = 0. \quad (29)$$

Вторая вариация (второй дифференциал) функционала энергии:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(x)(h, h) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial V}{\partial x}(x)(h) \right) (h) = \quad (30)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^1 \left(\dot{x} \dot{h} - \lambda x h + x^3 h + q \right) dt \right) (h) = \int_0^1 \left(\dot{h}^2 - \lambda h^2 + 3x^2 h^2 \right) dt. \quad (31)$$

Так как слагаемое $\int_0^1 3x^2 h^2 dt$ является положительным квадратичным функционалом для каждого $x \neq 0$, то положительность второй вариации подтверждается положительностью квадратичного функционала

$$\int_0^1 (\dot{h}^2 - \lambda h^2) dt,$$

имеющей место при выполнении ограничения $\lambda < \pi^2$. Последнее вытекает из широко известного неравенства Пуанкаре-Виртингера

$$\int_0^1 \dot{h}^2 dt \geq \pi^2 \int_0^1 h^2 dt,$$

справедливого при выполнении граничных условий (24) для h .

Из выпуклости функционала V и его очевидной коэрцитивности на энергетическом пространстве $H^1 = \{x \in W_1^2[0, 1], x(0) = x(1) = 0\}$ вытекает существование и единственность критической точки V , автоматически являющейся его точкой глобального минимума.

Если наложить более широкое условие $\lambda < (m+1)^2\pi^2$, то тогда функционал $V(\sum_{k=1}^m \xi_k e_k + v)$, $v \in E^{\infty-m}$ будет выпуклым и коэрцитивным на подпространстве $E^{\infty-m} = \{v \in E : v \perp e_k, k = 1, \dots, m \text{ при каждом фиксированном векторе } u = \sum_{k=1}^m \xi_k e_k\}$. Следовательно, этот функционал имеет единственную критическую точку $v = \Phi(\xi_1, \dots, \xi_m, \lambda, q)$ в $E^{\infty-m}$ и в этой точке достигается глобально минимальное значение функционала $W(\sum_{k=1}^m \xi_k e_k + v)$, по v .

Функция

$$W(\xi_1, \dots, \xi_m, \lambda, q) := \inf_v V\left(\sum_{k=1}^m \xi_k e_k + v\right) = V\left(\sum_{k=1}^m \xi_k e_k + \Phi(\xi_1, \dots, \xi_m, \lambda, q)\right) \quad (32)$$

называется ключевой. Эта функция полностью отвечает за ветви критических точек функционала V : *существует взаимно однозначное соответствие между критическими точками V и W , сохраняющее значения индекса Морса критических точек. Это соответствие осуществляется «связывающим» отображением Φ :*

$$(\xi_1, \dots, \xi_m) \mapsto \Phi(\xi_1, \dots, \xi_m, \lambda, q).$$

В практических задачах ключевая функция и связывающее отображение вычисляются приближенно на основе аппроксимирующей процедуры Галеркина-Ритца. А именно, сначала вычисляется функция Ритца (ритцевская аппроксимация функционала)

$$V_R(\xi_1, \dots, \xi_m, \xi_{m+1}, \dots, \xi_n, \lambda, q),$$

а затем осуществляется редукция Пуанкаре — переход к функции

$$\widetilde{W}(\xi_1, \dots, \xi_m, \lambda, q) := \inf_{\xi_{m+1}, \dots, \xi_n} V_R(\xi_1, \dots, \xi_m, \xi_{m+1}, \dots, \xi_n, \lambda, q), \quad (33)$$

являющейся аппроксимацией ключевой функции (32).

2.3. Пример приближенного вычисления ключевой функции и построения ее графика

Ниже представлен фрагмент типичной программы вычисления (в MAPLE) второй итерации приближенного построения ключевой функции от двух ключевых переменных, и приведена программа построения графика:

$$\begin{aligned} e[1] &:= \sqrt{2} * \sin(t); \quad e[2] := \sqrt{2} * \sin(2 * t); \quad e[3] := \sqrt{2} * \sin(3 * t); \\ e[4] &:= \sqrt{2} * \sin(4 * t); \quad e[5] := \sqrt{2} * \sin(5 * t); \\ S[1] &:= \text{sum}(\xi[k] * e[k], k = 1..5); \quad 1; \quad S[2] := S[1]^2; \quad S[4] := S[2]^2; \\ V[4] &:= \text{int}(S[4], t = 0.. \pi); \\ \text{digits} &:= 4; \quad \lambda := 7; \quad \sigma := 0.5; \quad q[1] := 0.1; \quad q[2] := 0.2; \\ \delta[1] &:= 1 - \lambda; \quad 1; \quad \delta[2] := 4 - \lambda; \quad 1; \quad \delta[3] := 9 - \lambda; \quad 1; \quad \delta[4] := 16 - \lambda; \quad 1; \quad \delta[5] := 25 - \lambda; \\ \xi &= (\xi[1], \xi[2], \xi[3], \xi[4], \xi[5]); \\ V[2] &:= \text{sum}(\delta[k] * \xi[k]^2, k = 1..5); \\ W_R &:= V[4] + (1/2) * V[2] + q[1] * \xi[1] + q[2] * \xi[2]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g[1] &:= \text{diff}(W_R, \xi[1]); \quad g[2] := \text{diff}(W_R, \xi[2]); \quad g[3] := \text{diff}(W_R, \xi[3]); \\
g[4] &:= \text{diff}(W_R, \xi[4]); \quad g[5] := \text{diff}(W_R, \xi[5]); \\
g &:= (g[1], g[2], g[3], g[4], g[5]); \quad a1 := (\xi[1], \xi[2], 0, 0, 0); \\
g1 &:= \text{subs}(\xi[1] = a1[1], \xi[2] = a1[2], \xi[3] = a1[3], \xi[4] = a1[4], \xi[5] = a1[5], g); \\
W1 &:= \text{subs}(\xi[1] = a1[1], \xi[2] = a1[2], \xi[3] = a1[3], \xi[4] = a1[4], \xi[5] = a1[5], W_R) + \\
&\quad + q[1] * \xi[1] + q[2] * \xi[2]; \quad a2 := a1 - \sigma * g1; \\
W2 &:= \text{subs}(\xi[1] = a2[1], \xi[2] = a2[2], \xi[3] = a2[3], \xi[4] = a2[4], \xi[5] = a2[5], W_R) + \\
&\quad + q[1] * \xi[1] + q[2] * \xi[2]; \\
\text{plot3d}(W2, \xi[1] = -1..1, \xi[2] = -1..1, \text{grid} = [50, 50], \text{axes} = \text{normal}, \\
&\quad \text{style} = \text{contour}, \text{thickness} = 2, \text{orientation} = [-90, 0], \text{contours} = 80);
\end{aligned}$$

Некоторые из полученных изображений ключевых функций представлены на следующих графических изображениях линий уровней (в плоскости ключевых переменных ξ_1, ξ_2):

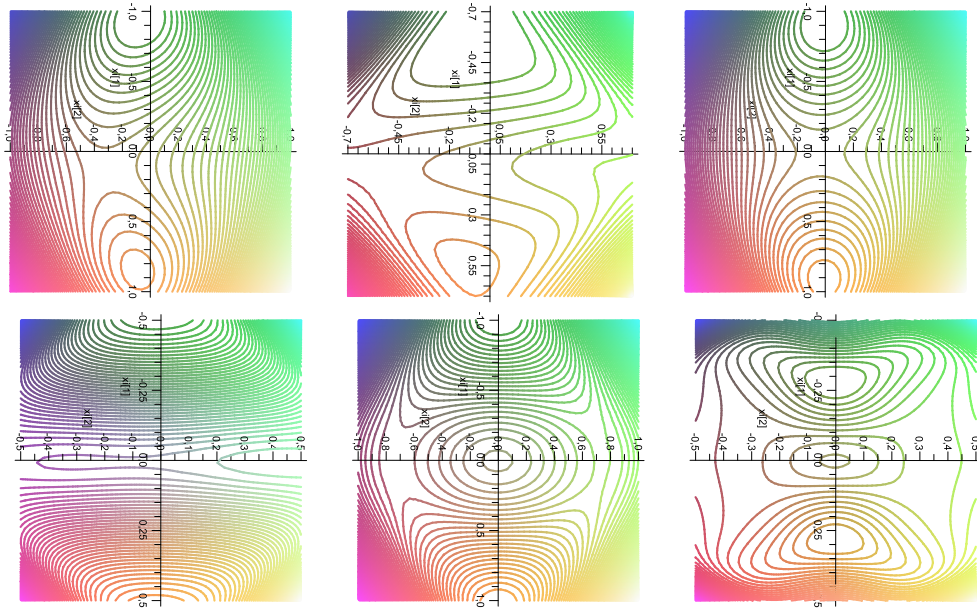


Рис. 5

Линии уровней ключевой функции при некоторых избранных значениях параметров λ, q_j .

Тема №3.

Математический маятник и эйлеров стержень (начальные сведения)

Классический пример математического моделирования дает задача о прогибах тонкого упругого стержня или, как часто говорят, эйлера стержня [59].

Это уравнение обладает *свойством универсальности*: им охватывается значительное количество реальных систем, в которое входят упругий стержень, маятник, кристалл (вытянутый вдоль одной из осей симметрии), некоторые разновидности нелинейных волн и пр.

Рассмотрим более подробно случай идеального (без начальных несовершенств) упругого стержня с жестко закрепленными концами (с нулевым углом). Его прогибы соответствуют решениям уравнения

$$\ddot{x} + \lambda \sin x = 0 \quad (34)$$

при краевых условиях (7). Положим $E = \{x \in C^2([0, 1], \mathbb{R}) : x(0) = x(1) = 0\}$, $F = C([0, 1], \mathbb{R})$, $H = L_2([0, 1], \mathbb{R})$. Скалярное произведение в H будем обозначать $\langle \cdot, \cdot \rangle$: $\langle x, y \rangle = \int_0^1 x(t) y(t) dt$. Левая часть (34), взятая со знаком минус, задает гладкое фредгольмово отображение индекса 0 из E в F , которое является градиентом в тройке пространств $\{E, F, H\}$ гладкого на E функционала энергии

$$V(x) = \int_0^1 \left(\frac{\dot{x}^2}{2} + \lambda \cos(x) \right) dt. \quad (35)$$

Как и выше, обозначим e_k функцию

$$\sqrt{2} \sin(\pi k t), \quad k \in \mathbb{N},$$

такие функции образуют полную ортонормированную систему в H и представляют собой систему так называемых *мод прогиба*. Эти функции являются собственными векторами для оператора $\frac{d^2}{ds^2}$ при краевых условиях жесткого закрепления.

Если $\lambda \leq (\pi(n+1))^2$, то квадратичная форма

$$\int_0^1 (\dot{x}^2 - \lambda x^2) dt$$

положительна на ортогональном дополнении в H к подпространству (линейной оболочке) $E^n := \text{Lin}(e_1, \dots, e_n)$. Пусть

$$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)^\top \in \mathbb{R}^n, \quad l(\xi) = \sum_j \xi_j e_j \in E^n,$$

$$\tilde{E} = \{x \in E : \langle x, e_j \rangle = 0, j = 1, \dots, n\} = E \cap (E^n)^\perp,$$

$$\tilde{E}_\xi = \{x \in E : \langle x, e_j \rangle = \xi_j, j = 1, \dots, n\} = l(\xi) + \tilde{E}.$$

Теорема 2. *Функционал V имеет единственную невырожденную условно критическую точку в слое $\tilde{E}_\xi$.*

Для доказательства этого утверждения достаточно рассмотреть энергетическое гильбертово пространство H^1 , полученное замыканием E в норме, порожденной скалярным произведением $\langle x, y \rangle_1 = \langle \dot{x}, \dot{y} \rangle = \langle -\ddot{x}, y \rangle$. Пусть H_ξ^1 — замыкание $\tilde{E}_\xi$ в H^1 . Функционал V является выпуклым и коэрцитивным на аффинном подпространстве

H_ξ^1 , что гарантирует существование единственной условной экстремали v_ξ в H_ξ^1 . На самом же деле, $v_\xi \in \tilde{E}_\xi$. «Подкачку гладкости» позволяет произвести соотношение, являющееся уравнением Эйлера-Лагранжа для условных экстремалей функционала V в $\mathcal{H}_\xi^1$. Из этого следует, что v_ξ принадлежит классу C^2 .

Из фредгольмовости с нулевым индексом отображения $\nabla_H V : E \rightarrow F$ следует гладкость так называемой ключевой функции Ляпунова-Шмидта

$$W_{LS}(\xi) = V(l(\xi) + v_\xi) = \inf_{v \in \tilde{E}} V(l(\xi) + v) = \inf_{x \in \tilde{E}_\xi} V(x).$$

Аналогичные построения можно провести и в случае маятника, заменив все использованные выше функциональные пространства на аналогичные пространства для периодических функций.

Следует отметить, что периодические краевые задачи для неоднородного уравнения колебаний маятника в случае двух нелокальных ключевых параметров и с использованием вариационного характера уравнения ранее изучал своих работах А.Ю. Борзаков [6]-[8].

Общая схема его рассуждений выглядит следующим образом. Пусть $E = \Pi_{2\pi}^2$ — пространство периодических дважды непрерывно дифференцируемых функций, $F = \Pi_{2\pi}^0$ — пространство непрерывных периодических функций и пусть $f : E \rightarrow F$ — отображение, заданное левой частью уравнения (34). Пусть, далее, $1 < \lambda < 4$ и

$$E = \text{Lin}(e_0, e_1, e_2) + E^{\infty-3},$$

— ортогональное разложение, где $E^{\infty-3}$ — ортогональное дополнение к $\text{Lin}(e_0, e_1, e_2)$ (подпространство всех функций, у которых коэффициенты Фурье по e_0, e_1, e_2 равно нулю). При $\lambda < 4$ функционал действия является выпуклым на $E^{\infty-3}$, а его условный градиент послойно собственный.

Таким образом, для отыскания и изучения периодических решений уравнения (34) можно применить глобальную ключевую функцию

$$W(\xi) = \inf_{v \perp e_0, e_1, e_2} V(\xi_0 + \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + v).$$

А.Ю. Борзаков установил, что эту функцию можно сколь угодно точно вычислять посредством комбинирования ритцевских аппроксимаций с редукцией Пуанкаре-Ляпунова-Шмидта. Свои результаты он использовал при построении приближенных решений периодической краевой задачи для неоднородного уравнения колебаний маятника и при приближенном построении каустик, соответствующих этим задачам.

Т.И. Костина распространила развитую А.Ю. Борзаковым методику исследований на более общие уравнения — уравнение Белецкого (уравнения колебаний спутника на эллиптической орбите), уравнение Кáрмана в случае круглой пластины и др. Свои исследования она довела до построения алгоритмов приближенного вычисления глобальных ключевых функций (для двух ключевых переменных), приближенного вычисления критических точек этих функций и построения приближенных аналитических решений исходных модельных краевых задач. Кроме того, в ряде случаев ей удалось создать и апробировать алгоритмы построения нелокальных каустик [40]-[42].

Тема №4.

Абстрактные фредгольмовы уравнения

4.1. Общие сведения

По поводу трактовки модельных уравнений в виде абстрактного операторного уравнения

$$f(x) = b, \quad x \in E, \quad b \in F,$$

в котором f — гладкое фредгольмово отображение некоторого банахова пространства E в некоторое банахово пространство F можно посмотреть в [10], [27], [58]). Ниже будет рассматриваться пара абстрактных банаховых пространств E, F .

Важнейшее свойство фредгольмовых уравнений заключено в том, что его сводится к исследованию конечномерного уравнения

$$\theta(\xi) = \beta, \quad \xi \in M, \quad \beta \in N,$$

где M, N — конечномерные многообразия. Переход к конечномерному уравнению называется *конечномерной редукцией*.

Для изложения основ теории фредгольмовых уравнений необходимо предварительно рассмотреть линейные фредгольмовы уравнения.

4.1.1. Линейные фредгольмовы операторы

Определение 1. *Линейный непрерывный оператор $A : E \rightarrow F$ называется фредгольмовым, если*

$$\dim \operatorname{Ker} A < \infty, \quad \dim(\operatorname{Coker} A) := \dim(F/\operatorname{Im} A) < \infty.$$

Число

$$\dim(\operatorname{Ker} A) - \dim(\operatorname{Coker} A)$$

называется (аналитическим) индексом фредгольмова оператора A и обозначается $\operatorname{ind} A$.

Из определения следует, что образ $\operatorname{Im} A$ замкнут в F , и A изоморфно отображает любое подпространство, прямо дополняющее $\operatorname{Ker} A$ (в E), на $\operatorname{Im} A$.

Лемма 1. *Если $L_1 : E_1 \rightarrow E_2$, $L_2 : E_2 \rightarrow E_3$ — фредгольмовы операторы, то и оператор $L_2 L_1 : E_1 \rightarrow E_3$ фредгольмов. При этом $\operatorname{ind}(L_2 L_1) = \operatorname{ind}(L_1) + \operatorname{ind}(L_2)$.*

В теории краевых задач фредгольмовость удобно проверять на основе следующего утверждения.

Теорема 3. (критерий фредгольмовости) *Оператор $A : E \rightarrow F$ является фредгольмовым индекса 0 тогда и только тогда, когда*

$$A = T + K,$$

где $T : E \rightarrow F$ — изоморфизм, $K : E \rightarrow F$ — вполне непрерывный оператор.

4.1.2. Фредгольмовы отображения

Определение 2. *Гладкое отображение $f : \mathcal{U} \rightarrow F$, где $\mathcal{U}$ — открытое подмножество в E , называется фредгольмовым, если его производная Фреше $\frac{\partial f}{\partial x}(x) : E \rightarrow F$ является фредгольмовым оператором в каждой точке $x \in \mathcal{U}$.*

Индексом нелинейного фредгольмова отображения f , определенного на связной области, называется индекс линейного оператора $\frac{\partial f}{\partial x}(x)$:

$$\text{ind } f := \text{ind } \frac{\partial f}{\partial x}(x)$$

(если область связная, то индекс $\frac{\partial f}{\partial x}(x)$ не зависит от x).

В дальнейшем предполагается, что $f : \Omega \longrightarrow F$ — нелинейное фредгольмово отображение и $\text{ind } f = 0$. Уравнение

$$f(x) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (36)$$

при этом называется *фредгольмовым*.

4.1.3. Потенциальные уравнения

Если для гладкого отображения $f : \Omega \longrightarrow F$ существует такой гладкий функционал $V : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$, что $f = \text{grad}_{\mathcal{H}} V$ или, эквивалентно,

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x) h = \langle f(x), h \rangle_{\mathcal{H}}, \quad \forall x \in \Omega, \quad h \in E$$

($\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}}$ — скалярное произведение в заранее заданном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$), то отображение f называется *потенциальным* (предполагается, что E непрерывно вложено в F , F непрерывно вложено в $\mathcal{H}$ и E плотно в $\mathcal{H}$). Функционал V при этом называется *потенциалом* отображения f , а уравнение (36) также называется *потенциальным*.

Если V — потенциал f на Ω , то уравнение

$$\text{grad}_{\mathcal{H}} V(x) = 0 \quad x \in \Omega, \quad (37)$$

называется *уравнением Эйлера* экстремалей (критических точек) функционала V . Точка $a \in \Omega$ называется критической для функционала V , если

$$\frac{\partial V}{\partial x}(a) h = \langle f(a), h \rangle_{\mathcal{H}} = 0 \quad \forall h \in E.$$

Последнее соотношение равносильно уравнению (37) (вследствие плотности E в $\mathcal{H}$). Таким образом, множество решений уравнения (37) и множество критических точек функционала V совпадают. Это означает, что построение решений уравнения (36) можно заменить построением критических точек функционала V . Переход от уравнения (36) к уравнению (37) называется *вариационным методом*.

Функционал V называется фредгольмовым, если его градиент задает фредгольмово отображение.

4.2. Конечномерные редукции

Ниже изложен подход, находящийся на стыке теорий Каччиополи и Лере-Шаудера.

4.2.1. LS -приводимые отображения

Из теоремы о неявной функции и леммы Шмидта [12] вытекает следующее утверждение: для каждого фредгольмова отображения $f : \Omega \longrightarrow F$ нулевого индекса и для каждой точки $a \in \Omega$ можно подобрать такое отображение $k : \mathcal{O}(a) \longrightarrow F$ со значениями в конечномерном подпространстве ($\mathcal{O}(a)$ — некоторая открытая окрестность точки a в Ω), что отображение $\varphi = f + k$ диффеоморфно отображает $\mathcal{O}(a)$ на

некоторое открытое подмножество U в F . Из этого утверждения вытекает, что каждое фредгольмово отображение диффеоморфной заменой аргумента локально приводится к виду

$$\tilde{f} = f \cdot \varphi^{-1} = I + \tilde{k}, \quad (38)$$

где $\tilde{k} = -k \cdot \varphi^{-1}$ — отображение со значениями в конечномерном подпространстве. Отображение вида $I + \tilde{k}$ называется отображением в форме Лере-Шаудера или, более кратко, LS -отображением. Диффеоморфизм φ называется LS -приводящим для f на $\mathcal{O}(a)$. В [10] сформулировано условие LS -приводимости фредгольмова отображения в окрестности компактного подмногообразия $\mathcal{X} \subset \Omega$.¹

4.2.2. Редукция Каччиополи

Существует вариант изучения фредгольмова отображения, основанный на редуцирующей схеме Р. Каччиополли [77], [78] (см. также [10]). В локальном случае схему Каччиополли можно рассматривать как разновидность схемы Ляпунова-Шмидта.

Теорема 4. (Ю.И. Сапронов, [10]) Пусть $f : \Omega \rightarrow F$ — фредгольмово отображение и пусть K — компакт в E . Тогда найдутся такие окрестность $\mathcal{O}$ компакта K и прямое разложение $F = F_1 \dot{+} L$, $\dim L < \infty$, что отображение $P \cdot f : \mathcal{O} \rightarrow F_1$, где $P : F \rightarrow F_1$ — проекция (параллельно L), является субмерсией в точках $\mathcal{O}$.

Из этой теоремы следует, что изучение фредгольмова уравнения можно проводить по схеме Каччиополи — через редукцию к конечномерному уравнению [10]

$$\theta(\xi) = 0, \quad \xi \in M,$$

в котором $\theta = P \cdot f|_M$, M — гладкое n -мерное (редуцирующее) подмногообразие в $\mathcal{O}$, P — проектор на конечномерное подпространство в F , $M = f^{-1}(\text{Im } P)$. В этой схеме предполагается, что отображение f на $\mathcal{O}$ трансверсально к $\text{Im } P$.

Схема Каччиополи и ее обобщения позволяют исследовать ветви бифурцирующих решений уравнений с параметрами, включая случаи разрушений непрерывных симметрий.

4.2.3. Метод Ляпунова-Шмидта (локальная схема)

Конкретные задачи математической физики требуют не только доказательства возможности конечномерного редуцирования, но и конструктивной реализации редуцирующей схемы.

Описываемая ниже конструкция имеет алгоритмический характер и широко используется в приложениях под общим названием «метод Ляпунова-Шмидта». Основа метода создана в работах [51], [83].

Пусть E, F — вещественные банаховы пространства, $f : E \rightarrow F$ — нелинейное фредгольмово отображение, $\text{ind } f = 0$. Пусть, далее, зафиксированы прямые разложения

$$E = E^n \dot{+} E^{\infty-n}, \quad F = F^n \dot{+} F^{\infty-n},$$

где E^n и F^n — n -мерные попространства в E и F соответственно, а $E^{\infty-n}$ и $F^{\infty-n}$ — произвольные прямые дополнения к E^n и F^n в E и F .

¹Вопрос об описании условий LS -приводимости фредгольмова отображения в окрестности компактного подмножества был поставлен М.А.Красносельским (1969 г.) в связи с построением теории топологической степени для нелинейных операторов общего вида.

Если $e_1, e_2, \dots, e_n$ — базис E^n , то для каждого вектора $x \in E$ имеет место разложение

$$x = u + v, \quad u = \sum_{i=1}^n \xi_i e_i, \quad v \in E^{\infty-n}.$$

Если $e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*$ — базис F^n , то

$$\begin{aligned} f(x) &= f^n(x) + f^{(\infty-n)}(x), \\ f^n(x) &= \sum_{j=1}^n \nu_j(x) e_j^*, \quad f^{(\infty-n)}(x) \in F^{\infty-n}. \end{aligned} \quad (39)$$

Предположив, что производная

$$\frac{\partial f^{(\infty-n)}}{\partial v}(a) : E^n \longrightarrow F^n$$

является изоморфизмом в некоторой точке $a \in E$, $f(a) = 0$, получим, в силу теоремы о неявном отображении, зависимость $v = \Phi(u)$ (для u из достаточно малой окрестности $\mathcal{O} \subset E^n$ точки $\bar{u}$), такую, что $\Phi(\bar{u}) = \bar{v}$ ($\bar{u}, \bar{v}$ — компоненты a) и

$$f^{(\infty-n)}(u + \Phi(u)) = 0 \quad \forall u \in \mathcal{O} \quad (40)$$

(отображение $\Phi : \mathcal{O} \longrightarrow E^{\infty-n}$ при этом является гладким). Для отыскания решений уравнения $f(x) = 0$ в окрестности точки $x = a$ достаточно найти решения *ключевого уравнения*

$$f^{(n)}(u + \Phi(u)) = 0. \quad (41)$$

Определение 3. Отображение $\tau : E^n \longrightarrow F^n$, где

$$\tau(u) = f^{(n)}(u + \Phi(u)),$$

называется *ключевым*.

Замечание 1. Соотношение $x = u + \Phi(u)$ осуществляет связь между решениями ключевого уравнения и решениями исходного модельного уравнения $f(x) = 0$. Это соотношение служит основой для компьютерного моделирования состояний (процессов), изображаемых решениями модельного уравнения.

Уравнение (41) эквивалентно (координатному) уравнению

$$\theta(\xi) = 0, \quad (42)$$

$$\theta(\xi) = (\theta_1(\xi), \dots, \theta_n(\xi))^\top,$$

где

$$\theta_k(\xi) = \nu_k \left(\sum_{i=1}^n \xi_i e_i + \Phi \left(\sum_{i=1}^n \xi_i e_i \right) \right)$$

(см. (39)).

Замечание 2. Уравнение (41) называется *уравнением разветвления*, а также *ключевым* или *бифуркационным*. Аналогичные названия используются и для уравнения (42).

Замечание 3. Выбор разложений $E = E^n \dot{+} E^{\infty-n}$, $F = F^n \dot{+} F^{\infty-n}$ и базисов $\{e_j\}$, $\{e_k^*\}$ в E^n и F^n однозначно определяет аналитическую форму уравнения (42). Каждый набор таких разложений и базисов (в соответствующих конечномерных компонентах) называется редуцирующей схемой.

Пусть $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство, $E \subset F \subset \mathcal{H}$ — последовательность трех непрерывно вложенных пространств и пусть $E^n = \text{Ker } \frac{\partial f}{\partial x}(a)$. В качестве $E^{\infty-n}$ можно рассмотреть ортогональное дополнение к E^n в E . При этом

$$\xi_i = \langle x, e_i \rangle, \quad i = 1, \dots, n$$

($\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в $\mathcal{H}$), где $e_1, \dots, e_n$ — ортонормированный базис в E^n ; F^n — ортогональное дополнение к $F^{\infty-n} = \text{Im } \frac{\partial f}{\partial x}(a)$ в F , а $\nu_j = \langle f(x), e_j^* \rangle$, $j = 1, \dots, n$, где $e_1^*, \dots, e_n^*$ — ортонормированный базис в F^n . Обозначим

$$\varphi(\xi) := \sum_{j=1}^n \xi_j e_j + \Phi \left(\sum_{i=1}^n \xi_i e_i \right).$$

Тогда

$$\theta(\xi) = \tilde{P} \cdot f(\varphi(\xi)), \quad (43)$$

где

$$\tilde{P}(y) = (\langle y, e_1^* \rangle, \dots, \langle y, e_n^* \rangle)^\top$$

Отображение $\varphi(\xi)$ определено на некоторой окрестности $O \subset \mathbf{R}^n$ точки $\bar{\xi}$ с координатами ξ_j , $\xi_j = \langle a, e_j \rangle$.

Теорема 5. Точка a является решением уравнения $f(x) = 0$ тогда и только тогда, когда $a = \varphi(\bar{\xi})$ и точка $\bar{\xi}$ является решением уравнения $\theta(\xi) = 0$. При этом $\dim \text{Ker } \frac{\partial f}{\partial x}(a) = \dim \text{Ker } \frac{\partial \theta}{\partial \xi}(\bar{\xi})$

Доказательство теоремы становится очевидным, если воспользоваться существованием LS —приводящего (локально) диффеоморфизма ψ (см. [10]):

$$\tilde{f}(\tilde{u} + \tilde{v}) := f \cdot \psi^{-1}(\tilde{u} + \tilde{v}) = h(\tilde{u}, \tilde{v}) + \tilde{v}, \quad \tilde{u} \in \mathbf{R}^n, \quad \tilde{v} \in F^{\infty-n}.$$

Ясно, что ключевое отображение $\theta(\xi)$ гладко эквивалентно отображению $\tilde{\theta}(\tilde{u}) := h(\tilde{u}, 0)$. Из представления

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{x}} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{v}} & \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{u}} \end{pmatrix}$$

моментально получаем равенство

$$\text{Ker } \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{x}}(\tilde{x}) = \text{Ker } \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{v}}(\tilde{x}),$$

из которого и вытекает второе утверждение теоремы.

4.2.4. Нелокальная версия метода Ляпунова-Шмидта

Локальная схема Ляпунова-Шмидта весьма эффективно работает в теории бифуркаций решений нелинейных уравнений. Существенно меньше имеется результатов по нелокальным бифуркационным проблемам. Это связано с тем, что применяемые в локальном случае асимптотические методы перестают работать при нелокальном

рассмотрении вопросов (на конечных областях и при конечных закритических приращениях параметров). В последние годы, в связи с бурным развитием новых вычислительных компьютерных технологий, появилась возможность нелокального анализа, основанного на нелокальной конечномерной редукции.

В основе дальнейших построений находится теорема Банаха-Мазура-Каччиополи, представляющая собой критерий глобально диффеоморфного действия отображения.

Пусть, как и ранее, отображение банаховых пространств

$$f : E \longrightarrow F \quad (44)$$

является гладким и фредгольмовым индекса нуль.

Теорема 6. (Банах, Мазур, Каччиополи) *Отображение (44) тогда и только тогда является диффеоморфизмом, когда выполняются следующие два условия:*
 1) производная фреше $\frac{\partial f}{\partial x}(a)$ в каждой точке $a \in E$ действует изоморфно из E на F ,
 2) отображение (44) является собственным (прообраз компакта компактен).

Доказательство имеется в [10]. Самое короткое доказательство основано на замечании о том, что объединение условий локальной диффеоморфности и собственности приводит к тому, что f оказывается накрывающим отображением. Известно, что накрытие над односвязной базой всегда однократно, что и означает диффеоморфность действия f .

Пусть, далее,

$$E = E^n \dot{+} E^{\infty-n}, \quad F = F^n \dot{+} F^{\infty-n} \quad (45)$$

— редуцирующие разложения рассматриваемых банаховых пространств в прямые суммы подпространств и

$$f(x) = f^{(n)}(u + v) + f^{\infty-n}(u + v) \quad (46)$$

— соответствующее разложение f ,

$$u \in E^n, \quad v \in E^{\infty-n}, \quad f^{(n)}(u + v) \in F^n, \quad f^{\infty-n}(u + v) \in F^{\infty-n}.$$

С каждым $u \in E^n$ свяжем отображение

$$f_u^{\infty-n} : E^{\infty-n} \longrightarrow F^{\infty-n}, \quad f_u^{\infty-n}(v) := f^{\infty-n}(u + v). \quad (47)$$

Теорема 7. *Пусть для каждого $u \in E^n$ отображение (47) является собственным и при этом*

$$\frac{\partial f_u^{\infty-n}}{\partial v}(a) : E^{\infty-n} \longrightarrow F^{\infty-n}$$

является изоморфизмом для каждой $u \in E^n$, $a \in E^{\infty-n}$. Тогда найдется такое гладкое отображение

$$\Phi : E^n \longrightarrow E^{\infty-n},$$

что точка a окажется решением уравнения

$$f(x) = 0$$

лишь в том и только том случае, в котором выполняется связывающее соотношение

$$a = \bar{u} + \Phi(\bar{u}),$$

где $\bar{u}$ — решение глобального уравнения разветвления

$$\tau(u) = 0 \quad (48)$$

(здесь $\tau(u) := f^{(n)}(u + \Phi(u))$). При этом локальные кольца особенностей² отображений f и θ в точках $\bar{u}$ и $a = \bar{u} + \Phi(\bar{u})$, соответственно, изоморфны.

Доказательство. Собственность и локальная диффеоморфность отображения $f_u^{\infty-n}$ приводит к диффеоморфности действия этого отображения из $E^{\infty-n}$ на $F^{\infty-n}$ (по теореме 6.). Следовательно, для каждого $u \in E^n$ найдется единственная точка $v = \Phi(u) \in E^{\infty-n}$, для которой $f^{\infty-n}(u + \Phi(u)) = 0$. Гладкость отображения $\Phi(u)$ следует из теоремы о неявной функции. Следовательно, уравнение (44), которое можно записать в виде системы двух уравнений

$$\left. \begin{aligned} f^{\infty-n}(u + v) &= 0, \\ f^{(n)}(u + v) &= 0, \end{aligned} \right\}$$

сводится к уравнению (48) в теореме 7.

Доказательство изоморфности локальных колец проводится стандартными приемами, разработанными в конечномерной теории особенностей гладких отображений [4, 11], легко переносимыми на бесконечномерные банаховы многообразия для класса фредгольмовых отображений.

Тема №5.

Потенциальные фредгольмовы уравнения

5.1. Редуцирующая схема Пуанкаре

Как известно, схема Пуанкаре была создана для конечномерных вариационных задач с целью понижения их размерности [62]. Пусть задана гладкая экстремальная задача

$$V(x) \longrightarrow \inf, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (49)$$

для которой выполнено условие *коэрцитивности*

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = +\infty, \quad (50)$$

так что задача (49) разрешима. Если функция V является выпуклой:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(a)(h, h) > 0 \quad \forall (a, h) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \setminus 0), \quad (51)$$

то решение этой задачи, как легко видеть, является единственным. В противном случае задача становится многоэкстремальной, поэтому приходится исследовать функцию в ситуации существования нескольких точек локальных минимумов, что существенно затрудняет анализ функции и приближенное построение экстремалей. Наличие «управляющих» параметров, изменение которых приводит к бифуркационным

²Локальное кольцо особенности гладкого отображения f в точке $a \in E$ определяется как фактор кольца ростков гладких функционалов в точке a по идеалу, порожденному функционалами вида $\alpha(f(x))$, где α — произвольный гладкий функционал, заданный на произвольной окрестности точки $b = f(a)$ в пространстве F .

явлениям, еще более усложняет задачу поиска и изучения экстремалей. А. Пуанкаре предложил процедуру, позволяющую во многих случаях облегчить изучение ветвления экстремалей за счет исключения «несущественных» переменных [62].

Пусть выполнено условие выпуклости V по части переменных:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(a)(h, h) > 0 \quad \forall (a, h) \in \mathbb{R}^n \times (L \setminus 0), \quad (52)$$

где L — подпространство в $\mathbb{R}^n$ размерности l . Тогда вместо (49) можно рассмотреть аналогичную задачу с меньшим числом переменных

$$W(\xi) \longrightarrow \inf, \quad \xi \in M, \quad (53)$$

где M — ортогональное дополнение к L в $\mathbb{R}^n$ (в стандартно скалярном произведении $(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$), а W — функция, определенная соотношением

$$W(\xi) = \inf_{h \in L} V(\xi + h). \quad (54)$$

Теорема 8. *Если выполнены условия (50) и (52), то функция (54) является гладкой.*

Доказательство. Из коэрцитивности функции V следует существование в слое $\xi + L$ ($\forall \xi \in M$) точки глобального условного минимума $\xi + h(\xi)$, где $h(\xi)$ определяется из системы уравнений

$$\frac{\partial V}{\partial h_j}(\xi + h) = 0, \quad j = 1, \dots, l \quad (55)$$

($h_1, \dots, h_l$ — координаты вектора h относительно произвольно фиксированного базиса в L). Условие (52) гарантирует единственность решения при любом ξ и его гладкую зависимость от ξ (по теореме о неявной функции: якобиан левой части (55) по переменным $h_1, \dots, h_l$ невырожден вследствие (52)). Следовательно, функция $W(\xi) = V(\xi + h(\xi))$ является гладкой.

Замечание 4. *Строго говоря, А. Пуанкаре определял функцию W не формулой (54), а системой уравнений (55). Функция W при этом определялась лишь локально (условия (50) не было) и предназначалась для (локального) исследования бифуркации экстремалей [62]. Смысл перехода от (49) к (53) состоял в замене «многомерной» задачи на «маломерную», как более доступную.*

Функция (54), полученная при условиях (50) и (52), называется *ключевой*. Координаты ξ_j , $j = 1, \dots, m = n - l$, вектора $\xi \in M$ относительно произвольного фиксированного базиса $\{f_1, \dots, f_m\}$ в M также называются *ключевыми*. Отображение $\varphi : \xi \longrightarrow \xi + h(\xi)$, где $h(\xi)$ определено системой уравнений (55), называется *редуцирующим* или *маргинальным*³.

Теорема 9. *Маргинальное отображение задает взаимно однозначное соответствие между множествами критических точек функции V и ее ключевой функции W . При этом соответствию невырожденные критические точки переходят в невырожденные и только невырожденные критические точки (с сохранением значений индексов Морса). А соответствующие друг другу вырожденные критические точки имеют изоморфные локальные кольца особенностей.*

³ Термин «маргинальное отображение» заимствован из теории приближений функций, в которой он используется в близком контексте.

Доказательство становится очевидным после применения обобщенной леммы Морса (леммы о расщеплении особенности).

Определение 4. *Переход от задачи (49) к задаче (53), где W — ключевая функция функции V , называется редукцией по схеме Пуанкаре или, более кратко, редукцией Пуанкаре.*

5.2. Редуцирующая схема Ляпунова-Шмидта

Подход А.М. Ляпунова и Э. Шмидта получили дальнейшее развитие в многочисленных работах других математиков, что впоследствии привело к созданию обширной теории ветвления решений нелинейных уравнений [12], [45]. В этой теории произошел отрыв от вариационных корней метода конечномерных редукций. Возврат к вариационным задачам в рамках общей теории ветвления произошел лишь в 70-тые годы прошедшего столетия (см. [44], [50], [68], [82]).

Следует отметить, что развитие упомянутых подходов происходило, в основном, на уровне локальных задач — в виде схем построения так называемых малых решений, зависящих от малых параметров. Потребность в условиях типа собственности градиентного отображения при этом не возникала. В некоторых работах для построения нелокальных редукций вместо условия собственности отображения использовались более частные условия, приводящие к возможности применения принципа сжатых отображений.

В дальнейшем изложении предполагается, что $f : E \rightarrow F$, где E, F — банаховы пространства, является потенциальным фредгольмовым отображением нулевого индекса (с потенциалом V), и наряду с этим выполнены условия:

- а) $E \subset F \subset H$ — тройка непрерывно вложенных пространств, H — гильбертово пространство.
- б) E плотно в H (любой элемент из H может быть представлен как предел последовательности элементов из E).

Из плотности E в H следует, что F также плотно в H . Плотности E в H обеспечивает равносильность равенства $\frac{\partial V}{\partial x}(x) = 0$ уравнению Эйлера $f(x) = 0$.

Свойство собственности отображения является весьма эффективным средством проверки нелокальной редуцируемости уравнения. Впервые оно было использовано (как условие глобальной редуцируемости) в работе [67], в которой сформулировано следующее утверждение.

Теорема 10. *Пусть градиентное отображение $f : E \rightarrow F$ является собственным и пусть при этом выполняется условие положительности (выпуклости) его потенциала V на подпространстве L в E , являющемся ортогональным дополнением к $N = \text{Lin}(e_1 \dots e_n)$ ($L = E \cap N^\perp$). Тогда маргинальное отображение $\varphi : \xi \mapsto \sum_{j=1}^n \xi_j e_j + h(\xi)$, где $h(\xi)$ определено уравнением $f\left(\sum_{j=1}^n \xi_j e_j + h\right) = 0$, $h \in L$, устанавливает взаимно однозначное соответствие между критическими точками ключевой функции*

$$W(\xi) := \inf_{h \in L} V\left(\sum_{j=1}^n \xi_j e_j + h\right) = V\left(\sum_{j=1}^n \xi_j e_j + h(\xi)\right),$$

и функционала V . При этом локальные кольца особенностей ⁴ соответствующих функций в точках ξ и $\varphi(\xi)$ изоморфны. В соответствующих друг другу однократных критических точках имеет место совпадение индексов Морса ⁵.

Доказательство проводится стандартными приемами, разработанными в конечномерной теории особенностей гладких функций [4], [11] и легко распространяющимися на фредгольмовы отображения бесконечномерных банаховых многообразий и фредгольмовы функционалы.

Определение 5. Критическая точка a функции $W : \mathcal{U} \subset R^n \rightarrow R$ называется невырожденной (морсовской), если

$$\det \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}(a) \right) \neq 0.$$

Определение 6. Пусть $V : E \rightarrow R$ — гладкий фредгольмов функционал, E — банахово пространство. Критическая точка a функционала V называется невырожденной (морсовской), если

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a)h \neq 0 \quad , \quad \forall h \in E \setminus \{0\}.$$

Лемма 2. (Конечномерная лемма Морса, [55], [60]) Пусть a — невырожденная критическая точка гладкой функции $W : R^n \rightarrow R$. Тогда в некоторой окрестности $\mathcal{U} \subset R^n$ точки a можно указать такую локальную систему координат $\{x_j\}$, удовлетворяющую условию $x_j(a) = 0 \quad \forall j$, что

$$W(x) = W(a) - \sum_{k=1}^q x_k^2 + \sum_{k=q+1}^n x_k^2 \quad \text{на } \mathcal{U}.$$

Число q называется индексом Морса критической точки.

Лемма 3. (Бесконечномерная лемма Морса, [76]) Пусть задан фредгольмов функционал V с градиентной реализацией в тройке пространств $\{E, F, H\}$, и $x_o \in E$ — невырожденная критическая точка V . Тогда существует диффеоморфизм $\varphi : (\mathcal{U}, x_o) \rightarrow (\mathcal{O}, 0)$, где $\mathcal{U}$ и $\mathcal{O}$ — окрестности, соответственно, точки x_o и нуля в E , такой, что

$$V(x) = V(x_o) + \frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}(x_o) y, y \right\rangle, \quad y = \varphi(x), \quad x \in \mathcal{U}, \quad f = \text{grad } V$$

($\langle \cdot, \cdot \rangle$) — скалярное произведение в H).

Индексом Морса невырожденной критической точки функционала V называется максимальная размерность подпространства, на котором отрицательно определен второй дифференциал $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(a)(h, h)$.

⁴Локальное кольцо особенности гладкого функционала V в критической точке a определяется как фактор кольца ростков гладких функционалов в точке a по идеалу, порожденному функционалами вида $\alpha(f(x))$, где a — произвольный гладкий функционал, заданный на произвольной окрестности нуля в пространстве F ($f = \text{grad}_H V$).

⁵Индекс Морса в бесконечномерном случае определяется как максимальная размерность подпространства, на котором отрицательно определен второй дифференциал.

Общая задача о бифуркации экстремалей

6.1. Выпуклые функционалы и приближения Галеркина-Ритца

В соответствии с известной теоремой Эберлейна-Шмюльяна [31], непрерывный строго выпуклый функционал V на гильбертовом пространстве H , рассмотренный на ограниченном замкнутом выпуклом подмножестве $K \subset H$, имеет точку минимума (автоматически единственную). Очевидно, что вместо условия ограниченности K можно потребовать выполнение условия коэрцитивности функционала:

$$V(x) \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad \|x\| \rightarrow \infty,$$

также влекущее существование единственной точки минимума.

В конкретных прикладных задачах поиск приближений к точке минимума часто осуществляется на основе методов Галеркина и Ритца [16], [45], [52], [56].

С точки зрения функционального анализа поиск решений многих вариационных краевых задач сводится к построению точек минимума выпуклого функционала на гильбертовом пространстве H , заданного в виде

$$V(x) = \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle + \omega(x), \quad (56)$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в гильбертовом пространстве H_0 , в которое H вложено непрерывно, компактно и всюду плотно. При этом A — положительный симметричный (в $\langle \cdot, \cdot \rangle$) изоморфизм из H на H_0 , а $\omega(x)$ — гладкий функционал, градиент которого $g(x) := \text{grad } \omega(x)$ (в $\langle \cdot, \cdot \rangle$) является вполне непрерывным отображением из H в H_0 . Если предположить, что функционал (56) гладко продолжается на энергетическое пространство H_1 , полученное замыканием H в норме (см. [56])

$$|x|_1 := \sqrt{\langle Ax, x \rangle},$$

то функционал (56) можно записать в виде

$$\frac{1}{2} \langle x, x \rangle_1 + \tilde{\omega}(x), \quad \langle x, y \rangle_1 := \langle Ax, y \rangle, \quad (57)$$

где $\tilde{\omega}$ — гладкое продолжение на H_1 функционала ω . При этом получим следующее представление для градиента в H_1 :

$$\text{grad}_{H_1} V(x) = x + \tilde{g}(x), \quad \tilde{g}(x) = A^{-1}g(x). \quad (58)$$

Таким образом, градиент функционала, продолженного в энергетическое пространство, является отображением в форме Лере-Шаудера.

Если задать последовательность конечномерных ортопроекторов $\{P_n\}$ в H_1 , сильно сходящуюся к I (тождественному отображению), то, очевидно, последовательность отображений $x + P_n \tilde{g}(x)$ будет равномерно сходиться к $x + \tilde{g}(x)$ на любой ограниченной области в H_1 , что влечет сходимость решений уравнений

$$x + P_n \tilde{g}(x) = 0, \quad x \in H_1,$$

к точке минимума функционала V . Так как любое решение последнего уравнения принадлежит $E_n := \text{Im } P_n$, то поиск его решений сводится к поиску решений галеркинской аппроксимации данного уравнения :

$$u + P_n \tilde{g}(u) = 0, \quad u \in E_n. \quad (59)$$

Левая часть уравнения (59) является градиентом функции

$$W_R(u) := V(u), \quad u \in E_n,$$

и называется *ритцевской аппроксимацией исходного функционала* V .

Приближенное вычисление точек минимума функционала V можно осуществлять, комбинируя переход к ритцевской аппроксимации W_R с методом кратчайшего спуска для W_R .

6.2. Потенциальные уравнения с параметрами

Важным типом уравнений, часто встречающимся в задачах математического моделирования, является фредгольмово уравнение с параметром:

$$f(x, \lambda) = b, \quad x \in E, \quad b \in F, \quad \lambda \in \mathbb{R}^k.$$

То есть f включено в $f(x, \lambda) : U \times \mathbb{R}^k \rightarrow F$, $f(x, 0) = f(x)$, — семейство гладких фредгольмовых отображений, гладко зависящее от векторного параметра $\lambda \in \mathbb{R}^m$. Если отображение $f(\cdot, \lambda)$ потенциально с потенциалом $V(\cdot, \lambda)$, то потенциал также гладко зависит от данного параметра. В такой ситуации естественным образом возникает понятие бифуркации экстремалей и, соответственно, бифуркационного значения параметра.

Определение 7. Пусть $\lambda = \lambda_0$ — такое значение параметра, при котором a является единственной критической точкой функционала $V(x, \lambda)$ в некоторой области $\Omega \subset E$. Значение λ_0 называется бифуркационным, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое λ_1 , $\|\lambda_1 - \lambda_0\| < \varepsilon$, при котором V имеет в Ω не менее двух критических точек a_1, a_2 , таких, что

$$\max \{ \|a_1 - a\|, \|a_2 - a\| \} < \varepsilon.$$

В условиях данного определения говорят, что переход λ через (бифуркационное) значение λ_0 сопровождается рождением дополнительных экстремалей из нуля.

Задача изучения ветвления экстремалей вблизи точки бифуркации широко известна под общим названием «задача о бифуркации экстремалей». Важнейшей составляющей этой задачи является вопрос геометрического строения каустики, соответствующей точке бифуркации.

Определение 8. Пусть задана фредгольмова C^r –развертка

$$f(\cdot, \delta) : E \rightarrow F, \quad \delta \in \Delta^m \subset \mathbb{R}^m.$$

Пусть Ω — открытое подмножество в E . Дискриминантным множеством $\Sigma(\Omega)$ уравнения

$$f(x, \delta) = 0 \quad x \in \Omega \tag{60}$$

называется совокупность тех значений $\lambda = \bar{\lambda}$, для которых уравнение (60) имеет в Ω вырожденное решение $\bar{x}$:

$$f(\bar{x}, \bar{\lambda}) = 0 \quad \text{codim} \left(\text{Im} \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{\lambda}) \right) > 0.$$

Определение 9. Пусть $\tilde{\Sigma}(\Omega)_{\bar{\lambda}}$ — росток множества $\Sigma(\Omega)$ в точке $\bar{\lambda}$. Тогда пересечение

$$\Sigma(\bar{x}, \bar{\lambda}) = \bigcap_{\Omega: \bar{x} \in \Omega} \tilde{\Sigma}(\Omega)_{\bar{\lambda}}$$

называется дискриминантной диаграммой уравнения (60) в точке $(\bar{x}, \bar{\lambda})$.

Если (60) — вариационное уравнение ($f = \text{grad } V$), то $\Sigma(\bar{x}, \bar{\lambda})$ называется каустической функционала V в точке $\bar{x}$.

6.3. Общий взгляд на конечномерную редукцию в вариационной задаче

Определение 10. Пусть V — гладкий функционал, заданный на области Ω банахова пространства E . Конечномерной редукцией V на открытом подмножестве $\Psi \subset \Omega$ называется тройка $\{p, \varphi, N\}$, удовлетворяющая следующим условиям:

(1) Гладкое отображение $p : \Psi \rightarrow N$ (N — конечномерное многообразие) является субмерсией (то есть каждый дифференциал касательных пространств $\frac{\partial p}{\partial x}(a) : T_a(\Psi) \rightarrow T_\xi(N)$ является отображением «на»).

(2) $\forall \xi \in \mathcal{U} = p(\Psi)$ функционал $V_\xi = V|_{p^{-1}(\xi)}$ имеет единственную, причем невырожденную, критическую точку $\varphi(\xi)$ (что означает невырожденность второго дифференциала

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(V|_{p^{-1}(\xi)})(\varphi(\xi))(h, h),$$

$h \in T_{\varphi(\xi)}(p^{-1}(\xi))$, как квадратичной формы на линейном пространстве).

(3) Отображение $\varphi : \mathcal{U} \rightarrow \Psi$ является гладким.

Отображение p называется редуцирующей субмерсией. Размерностью редукции называется размерность образа редуцирующей субмерсии.

Определение 11. Функция $W : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$, определенная равенством

$$W(\xi) = V(\varphi(\xi)), \quad \xi \in \mathcal{U}, \quad (61)$$

называется ключевой, а отображение φ — маргинальным.

Определение 12. Если $\forall \xi \in N$ точка $\varphi(\xi)$ является точкой минимума функционала $V_{p^{-1}(\xi)}$, то редукция называется эллиптической.

В случае эллиптической редукции ключевая функция определяется равенством

$$W(\xi) = \inf_{x: p(x)=\xi} V(x) = V(\varphi(\xi)). \quad (62)$$

Имеет место следующее фундаментальное утверждение [68]:

Утверждение 1. Пусть $\{p, \varphi, N\}$ — эллиптическая конечномерная редукция гладкого функционала V на области Ω гладкого банахова многообразия M . Тогда маргинальное отображение φ устанавливает взаимно однозначное соответствие между множествами критических точек ключевой функции W и функционала V . При этом соответствующие друг другу критические точки одновременно являются либо вырожденными, либо нет. В случае невырожденности соответствующие критические точки имеют одинаковые значения индексов Морса.

Все топологические и аналитические понятия, так или иначе характеризующие тип стационарной точки (кратность, локальное кольцо особенности, версальная деформация, бифуркационная диаграмма и т.п. [4], [61]), для функционалов можно вводить через ключевые функции.

6.4. Локальная вариационная схема Ляпунова-Шмидта

Вполне естественно, что формулирование условий единственности и невырожденности критической точки для $V_\xi = V|_{p^{-1}(\xi)}$ проще осуществить локально — в некоторой окрестности критической точки. Сделаем это на примере широко известной схемы конечномерной редукции Ляпунова-Шмидта.

Как и ранее, будем предполагаться, что задано потенциальное отображение $f : \mathcal{U} \rightarrow F$ (с потенциалом V), где $\mathcal{U}$ — область банахова пространства E (E, F — банаховы пространства), которое является фредгольмовым нулевого индекса, и наряду с этим выполнены «технические условия»: $E \subset F \subset H$ — тройка непрерывно вложенных пространств (H — гильбертово пространство); E плотно в H (из плотности E в H следует плотность F в H).

Будем предполагать также гладкую зависимость f от параметра $\lambda \in \mathbb{R}^m$ («по умолчанию»). Пусть, далее, $\mathcal{A}(\lambda) := \frac{\partial f}{\partial x}(0, \lambda)$ и $\dim N = n > 0$, где $N = \text{Ker } \mathcal{A}(\lambda_0)$.

Наложим также два *дополнительных условия* :

1) в N зафиксирован ортонормированный (в H) базис $\{e_j\}_{j=1}^n$, вместе с набором гладких (спектральных) функций $\{\alpha_j(\lambda)\}_{j=1}^n$, $\alpha_j(\lambda_0) = 0$, определенных на некоторой окрестности нуля $\mathcal{U}(0) \subset \mathbb{R}^m$, для которого выполнено соотношение

$$\mathcal{A}(\lambda) e_j = \alpha_j(\lambda) e_j \quad \forall j, \quad (Mod)$$

2) выполнено неравенство

$$\langle \mathcal{A}(\lambda) v, v \rangle > 0 \quad \forall v \in E \cap N^\perp, \quad v \neq 0. \quad (Pos)$$

Векторы $e_1, e_2, \dots, e_n$ называются *ведущими модами бифуркаций*.

Зафиксируем далее прямые разложения

$$E = N \dot{+} E^{\infty-n}, \quad F = N \dot{+} F^{\infty-n},$$

где $E^{\infty-n}$ и $F^{\infty-n}$ — прямые ортогональные дополнения к N в E и F .

Для каждого вектора $x \in E$ имеет место представление

$$x = u + v, \quad u = \sum_{j=1}^n \xi_j e_j, \quad v \in E^{\infty-n}, \quad \xi_j = \langle x, e_j \rangle,$$

а также представление

$$f(x, \lambda) = f^n(x, \lambda) + f^{\infty-n}(x, \lambda),$$

где

$$f^n(x, \lambda) = \sum_{i=1}^n f_j(x, \lambda) e_j, \quad f_j(x, \lambda) = \langle f(x, \lambda), e_j \rangle, \\ f^{\infty-n}(x, \lambda) := f(x, \lambda) - f^n(x, \lambda) \in F^{\infty-n}.$$

Таким образом, экстремали функционала $V(x, \lambda)$ близи нуля определяются системой двух уравнений

$$\left. \begin{aligned} f^n(u + v, \lambda) &= 0, \\ f^{\infty-n}(u + v, \lambda) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (63)$$

Так как производная

$$\frac{\partial f^{\infty-n}}{\partial v}(0, \lambda) : E^{\infty-n} \rightarrow F^{\infty-n}$$

является изоморфизмом (в силу условия положительности (Pos)), то получим, по теореме о неявной функции, существование явной зависимости

$$v = \Phi(u, \lambda)$$

(в достаточно малой окрестности $\mathcal{O} \times \mathcal{U} \subset E^{\infty-n} \times \mathbb{R}^n$ нуля), для которой $\Phi(0, \lambda_0) = 0$ и

$$f^{\infty-n}(u + \Phi(u, \lambda), \lambda) = 0 \quad \forall u \in \mathcal{O}^n.$$

Здесь и ниже полагаем $\mathcal{O} = \mathcal{O}^n \times \mathcal{O}^{\infty-n}$.

Отображение $\Phi : \mathcal{O}^n \rightarrow E^{\infty-n}$ при этом является гладким.

Для отыскания решений уравнения $f(x, \lambda) = 0$ в окрестности точки $x = 0$ достаточно найти решения $u = u(\lambda)$ *ключевого уравнения*

$$f^n(u + \Phi(u, \lambda), \lambda) = 0. \quad (64)$$

Решение исходного уравнения задается *связывающим соотношением*

$$x(\xi, \lambda) = u(\lambda)(\xi) + \Phi(u(\lambda)(\xi), \lambda). \quad (65)$$

Определение 13. *Отображение $\tau : \mathcal{O}^n \rightarrow F^n$, где*

$$\tau(u, \lambda) = f^n(u + \Phi(u, \lambda), \lambda),$$

называется ключевым.

При практическом применении уравнение (60) используется в координатной форме

$$\theta(\xi, \lambda) = 0. \quad (66)$$

$$\theta(\xi, \lambda) = (\theta_1(\xi, \lambda), \theta_2(\xi, \lambda), \dots, \theta_n(\xi, \lambda),), \quad \theta_k(\xi, \lambda) = \langle \tau(u(\xi), \lambda), e_k \rangle.$$

Теорема 11. *Справедливо следующее соотношение:*

$$\inf_{v: v \in \mathcal{O}^{\infty-n}} V(u + v) = V(u + \Phi(u, \lambda), \lambda). \quad (67)$$

Доказательство становится очевидным, если заметить, что вблизи нуля экстремали функционала $V(u+v)$ по v определяются вторым уравнением системы уравнений (63).

Отображение

$$\tau : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad \tau(u, \lambda) := f^n(u + \Phi(u, \lambda), \lambda),$$

называется *ключевым отображением*. Соответственно, уравнение

$$\tau(u, \lambda) = 0$$

называется *ключевым уравнением*.

Функция $W(u, \lambda) := V(u + \Phi(u, \lambda), \lambda)$ называется *ключевой функцией функционала $V(x, \lambda)$ вблизи нуля*.

Теорема 12. *Справедливо следующее соотношение:*

$$\text{grad } W(u, \lambda) = \tau(u, \lambda) \quad (68)$$

Доказательство осуществляется непосредственной проверкой.

Замечание 5. *Для практических применений более удобна координатная форма ключевой функции*

$$\widehat{W}(\xi, \lambda) := W(u(\xi) + \Phi(u(\xi), \lambda), \lambda) \quad (69)$$

6.5. Приближенное вычисление ключевой функции

Опишем одну практическую схему локальной редукции [68]. Функция $W(\xi, \lambda) = V\left(\sum_{j=1}^n \xi_j e_j(\lambda) + \Phi(\xi, \lambda), \lambda\right)$ при соответствующем выборе $\Phi(\xi, \lambda)$ является ключевой для функционала $V(x, \lambda)$, а ее градиент является ключевым отображением для уравнения $f(x, \lambda) = 0$.

Для получения приближенной ключевой функции W часто достаточно ограничиться несколькими членами разложения W в ряд Тейлора. Обоснование того, что отбрасывание «тейлоровского хвоста» не изменяет топологию бифуркационных диаграмм и структуру *bif*-раскладов, проводится на основе теорем о конечной определенности ростков отображений и их деформаций [4]. Рассмотрим тейлоровское разложение потенциала V до четвертого порядка:

$$V(x, \lambda) = \text{const} + \frac{1}{2} \langle A(\lambda)x, x \rangle_H + V_\lambda^{(3)}(x) + V_\lambda^{(4)}(x) + o(\|x\|^4),$$

где $A(\lambda) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, \lambda)$, $V_\lambda^{(3)}$ и $V_\lambda^{(4)}$ — однородные формы третьего и четвертого порядков на E . Для четного функционала V (или, что эквивалентно, нечетного отображения f) получаем представление

$$W(\xi, \lambda) = \text{const} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \alpha_j(\delta) \xi_j^2 + W_R^{(4)}(\xi) + O(|\lambda|)O(|\xi|^4) + O(|\xi|^6), \quad (70)$$

где $W_R^{(4)}(\xi) = V_0^{(4)}\left(\sum_{j=1}^n \xi_j e_j\right)$.

6.6. Редукция в случае симметрии параллелепипеда (по модам бифуркации)

Пусть на $\mathcal{H}$ задан набор инволюций $\{J_k\}_{k=1}^n$ таких, что

- 1) $J_k(E) \subset E$, $J_k(F) \subset F$, $k = 1, \dots, n$,
- 2) $J_k(e_k(\lambda)) = -e_k(\lambda)$, $J_k(e_j(\lambda)) = e_j(\lambda)$, $k \neq j$. И пусть потенциал $V(\cdot, \lambda)$ инвариантен относительно J_k :

$$V(J_k(x), \lambda) = V(x, \lambda), \quad k = 1, \dots, n, \quad \forall x, \lambda, \quad (71)$$

(условие симметрии параллелепипеда). Тогда ключевая функция $W(\xi, \lambda)$ четна по каждой переменной ξ_j и, следовательно, её тейлоровское разложение имеет следующий вид [68]:

$$W(\xi, \lambda) = \text{const} + W_\lambda^{(2)}(\xi) + W_\lambda^{(4)}(\xi) + o(|\xi|^5),$$

где $W_\lambda^{(2)}$ и $W_\lambda^{(4)}$ — формы второго и четвертого порядков, четные по ξ_j .

Таким образом, для четного потенциала V с дополнительной симметрией параллелепипеда имеем представление

$$const + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \alpha_j(\lambda) \xi_j^2 + W_R^{(4)}(\xi, 0) + O(|\lambda|)O(|\xi|^4) + O(|\xi|^6), \quad (72)$$

где $W_R^{(4)}(\xi, 0) = V_0^{(4)}\left(\sum_{j=1}^n \xi_j e_j\right)$. Если

$$V_0^{(4)}(x) = \mathcal{V}_0^{(4)}(x, x, x, x)$$

($\mathcal{V}_0^{(4)}(x, y, z, t)$ — симметричная 4-линейная форма), то, с учетом всех симметрий, получаем соотношение

$$W_R^{(4)}(\xi) = \sum_{k=1}^n V_0^{(4)}(e_k) \xi_k^4 + 6 \sum_{i < j}^n \mathcal{V}_0^{(4)}(e_i, e_i, e_j, e_j) \xi_i^2 \xi_j^2. \quad (73)$$

В частности, при $n = 3$ имеем

$$W_R^{(4)}(\xi) = \sum_{k=1}^3 A_k \xi_k^4 + \sum_{i < j}^3 B_{i,j} \xi_i^2 \xi_j^2.$$

6.7. Редукция как разновидность нелинейной ритцевской аппроксимации

Определение 14. Ритцевской аппроксимацией [68] функционала V , заданного на банаховом пространстве E , называется функция

$$W_R(\xi) = V\left(\sum_{j=1}^n \xi_j e_j\right), \quad \xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)^\top,$$

где $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ — некоторый линейно независимый набор функций из E (базис аппроксимации).

Экстремалиям $\bar{\xi} = (\bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_n)$ функции W соответствуют точки $\bar{x} = \sum_{i=1}^n \bar{\xi}_i e_i$, называемые ритцевскими аппроксимациями экстремалей V .

Точность ритцевских аппроксимаций повышается лишь за счет увеличения количества базисных функций. Если, обобщая, рассмотреть «нелинейные» аппроксимации вида

$$W(\xi) = V\left(\sum_{j=1}^n \xi_j e_j + \Phi(\xi)\right),$$

где Φ — гладкое отображение из $N := \text{Lin}(e_1, \dots, e_n)$ в $N^\perp$ (ортогональное дополнение к N в метрике пространства функций с суммируемым квадратом), то во многих прикладных задачах можно достигнуть любой аппроксимативной точности при априори зафиксированном наборе базисных функций и, следовательно, априори ограниченном количестве степеней свободы аппроксимирующей системы.

Нетрудно заметить, что схему Ляпунова-Шмидта можно рассматривать как разновидность нелинейной ритцевской аппроксимации.

Тема №7.

Математический маятник и эйлеров стержень (продолжение)

7.1 Применение метода Ляпунова-Шмидта

Как известно, анализ прогибов тонкого упругого стержня в эйлеровой модели сводится к анализу экстремалей (критических точек) его функционала энергии (с промасштабированными параметрами)

$$V := \int_0^1 \left(\frac{\dot{\psi}^2}{2} + \lambda(\cos(\psi) - 1) + q\psi \right) ds. \quad (74)$$

Его экстремали определяются (модельной) краевой задачей

$$f(\psi) := \frac{d^2\psi}{ds^2} + \lambda \sin(\psi) = q, \quad \psi(0) = \psi(1) = 0, \quad (75)$$

пределяющей прогибы стержня. Здесь $\psi = \psi(s)$ — угловая функция, s — параметр длины стержня ($0 \leq s \leq 1$), $q = q(s)$ — функция несовершенства («отвечающая» за начальный прогиб стержня в ненагруженном состоянии). Краевые условия выражают жесткое закрепление стержня на концах (условие сохранения вертикальности касательного вектора на концах стержня).

С целью упрощения вычислений можно положить

$$q = q_1 e_1 + q_2 e_2, \quad (76)$$

где

$$e_1 = \sqrt{2} \sin(\pi s), \quad e_2 = \sqrt{2} \sin(2\pi s)$$

— первая и вторая моды прогиба, отвечающие первым двум критическим нагрузкам π^2 и $4\pi^2$. Далее будем использовать тройку $E \subset F \subset H$ непрерывно вложенных пространств, в которой

$$E = \{x \in C^2([0, 1], \mathbb{R}) : x(0) = x(1) = 0\},$$

$$F = C^2([0, 1], \mathbb{R}), \quad H = L_2([0, 1], \mathbb{R}).$$

Первым естественным шагом в нелокальном анализе прогибов, отвечающим, в частности, на вопрос о зависимости количества и характера решений от значений параметров, является исследование каустики функционала V (множества значений параметров, при которых существуют вырожденные критические точки функционала). Ниже будет дано описание подхода к получению приближенного изображения плоских сечений каустики.

При $\lambda < (n+1)^2\pi^2$ можно воспользоваться глобально редуцирующей системой функционалов (ключевых параметров) в виде совокупности коэффициентов Фурье по модам прогибов: $p_k(x) = \langle e_k, x \rangle$, $k = 1, \dots, n$, $e_k = \sqrt{2} \sin(\pi k s)$ (схема Ляпунова-Шмидта) [27].

Если представить левую часть исходного уравнения в операторном виде

$$f(x) = q,$$

то при $n = 2$ схема Ляпунова-Шмидта сводится к системе двух операторных уравнений

$$\left. \begin{aligned} A_1(u) + \lambda P^2(\sin(u+v)) &= q_1 e_1 + q_2 e_2, \\ A_2(v) + \lambda P^{\infty-2}(\sin(u+v)) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (77)$$

где $P^2, P^{\infty-2}$ — пара ортопроекторов (в скалярном произведении из H) на E^2 и $E^{\infty-2}$, соответственно, а $A_1 = A|_{E^2}$, $A_2 = A|_{E^{\infty-2}}$ — соответствующие сужения оператора A . Для второго уравнения последней системы имеет место однозначная разрешимость по v при каждом $u \in E^2$. После построения представления (приближенного) для решения этого уравнения (решения второго уравнения системы (77)) в явном виде $v = \Phi(u)$ получаем ключевую функцию $W(u) = V(u + \Phi(u))$.

Вычисление приближенного аналитического выражения для отображения $v = \Phi(u)$ возможно на основе принципа сжимающих отображений.

Запишем вместо второго уравнения системы (77) эквивалентное ему уравнение

$$y + g(y, u, \lambda) = 0, \quad (78)$$

где

$$g(y, u, \lambda) := \lambda P^{\infty-2}(\sin(u + \mathfrak{G}(y))) = 0,$$

которое будем рассматривать в подпространстве $\mathfrak{L} := N^\perp$ пространства H . Здесь $\mathfrak{G} := (A_2)^{-1}$ — оператор Грина для краевой задачи $\ddot{x} = q$, $x(0) = x(1) = 0$, суженный на подпространство $\mathfrak{L}$.

Теорема 13. *При $\lambda < 9\pi^2$ отображение $g(\cdot, u, \lambda) : \mathfrak{L} \rightarrow \mathfrak{L}$ является сжимающим (с константой сжатия, не зависящей от u).*

Доказательство с очевидностью вытекает из следующих известных неравенств:

$$|\sin(a) - \sin(b)| \leq |a - b|,$$

$$\int_0^1 \ddot{x}^2 ds \geq 81\pi^4 \int_0^1 x^2 ds \quad \forall x \in \mathfrak{L}.$$

Как и в случае ритцевской аппроксимации, ключевая функция и ее приближения линейно зависят от параметров q_1, q_2 . Следовательно, эти параметры не входят в уравнение параболического множества $\mathfrak{P}$ (множества точек, в которых вырождается второй дифференциал). Построенное на этой основе параболическое множество (для приближенной ключевой функции, при некотором m) преобразуется затем в плоскость параметров q_1, q_2 градиентным отображением, что в итоге и дает приближенное построение каустики.

Изображения прогибов на рисунке 2 (из первого раздела) получены посредством применения представленной здесь вычислительной схемы.

7.2 Применение метода Морса-Ботта

В общем случае переход к конечномерной задаче выглядит (для абстрактной вариационной задачи $V(x) \rightarrow \text{extr}$) следующим образом: рассматривается система редуцирующих функционалов $p_i : E \rightarrow \mathbb{R}$ (с линейно независимыми градиентами в каждой точке), посредством которой совершается переход (при некоторых условиях технического характера [27]) к ключевой функции

$$W(\xi_1, \dots, \xi_n) = \inf_{x: p_i(x) = \xi_i} V(x). \quad (79)$$

Система $\mathfrak{P}$ называется также *системой ключевых параметров* для функционала V .

Все топологические и аналитические понятия, так или иначе характеризующие тип стационарной точки (индекс Морса, кратность, локальное кольцо особенности, версальная деформация, бифуркационная диаграмма и т.п.) для исходного функционала, наследуются ключевой функцией.

Анализ функционала энергии эйлера стержня в случае $q_1 = q_2 = 0$ $\lambda < 4\pi^2$ можно осуществить (при нагрузке продольного сжатия, не превышающей второго критического значения) через конечномерную редукцию Морса-Ботта к ключевой функции W

$$W(\xi, \lambda) := \inf_{\tau: \varphi(1/2) = \xi} \tilde{V}(\varphi, \lambda), \quad \xi \in S^2. \quad (80)$$

В этом случае модельное уравнение является интегрируемым, и ключевая функция допускает точное явное представление. Функция (80) является гладкой и её критические точки взаимно однозначно соответствуют критическим точкам V на $\mathbb{R}^2$, с сохранением значений индексов Морса и типов локальных колец особенностей.

Маргинальное отображение $\xi \mapsto \varphi(\xi)$ получается склейкой решений $\psi_1(s)$ и $\psi_2(s)$ уравнения

$$\ddot{\psi} + \lambda \sin \psi = 0, \quad (81)$$

отвечающих краевым условиям

$$\psi_1(0) = 0, \quad \psi_1(1/2) = \eta, \quad \psi_2(1/2) = \eta, \quad \psi_2(1) = 0, \quad \eta = \arccos\langle \xi, r_3 \rangle.$$

Произведя в уравнении равновесия стандартную подстановку [59]

$$\psi = 2 \arcsin(k \sin u), \quad (82)$$

где k — константа, $0 < k < 1$, получим, что u является решением уравнения

$$\dot{u} = \lambda^{1/2} (1 - k^2 \sin^2 u)^{1/2}.$$

Следовательно,

$$u(s) = am(\sqrt{\lambda}s; k), \quad (83)$$

где $am(\sqrt{\lambda}s; k)$ — так называемая амплитуда, полученная обращением эллиптического интеграла первого рода (в нормальной тригонометрической форме Лежандра)

$$\sqrt{\lambda}s = F(u; k) := \int_0^u \frac{dy}{(1 - k^2 \sin^2 y)^{1/2}}.$$

Из (82) и (83) получается явная формула решения

$$\psi_1(s) = 2 \arcsin \left(k \operatorname{sn}(\sqrt{\lambda}s; k) \right),$$

где

$$\operatorname{sn}(\tau; k) := \sin am(\tau; k)$$

— эллиптический синус. Для производной функции ψ_1 имеем представление

$$\dot{\psi}_1(s) = 2\sqrt{\lambda} \operatorname{cn}(\sqrt{\lambda}s; k),$$

где $\operatorname{cn}(\tau; k) := \cos am(\tau; k)$ — эллиптический косинус.

Соответственно, для лагранжиана

$$L = \frac{\dot{\psi}^2}{2} - \lambda(\cos \psi - 1)$$

на решении $\psi_1(s)$ получаем представление

$$L = 2\lambda k^2(cn^2(\sqrt{\lambda}s; k) - sn^2(\sqrt{\lambda}s; k)) = 2\lambda k^2(2cn^2(\sqrt{\lambda}s; k) - 1).$$

Решение ψ_2 уравнения (82) получается теперь продолжением $\psi_1(s)$ с интервала $[0, 1/2]$ на интервал $[1/2, 1]$ по симметрии: $\psi_2(s) = \psi_1(1 - s)$. Следовательно,

$$\int_0^1 L ds = 2 \int_0^{1/2} L ds,$$

и для ключевой функции (80) получаем глобальное представление

$$\widetilde{W}(k, \lambda) = 4\lambda k^2 \left(2 \int_0^{1/2} cn^2(\sqrt{\lambda}s; k; ds - \frac{1}{2} \right)$$

(ключевым параметром здесь служит эллиптический параметр k).

На рисунках 6, 7 приведены приближенные изображения графиков ключевой функции $\widetilde{W}(k, \lambda)$, решений уравнения и прогибов — при докритическом и закритическом ($\lambda \leq 4\pi^2$) значениях параметра.

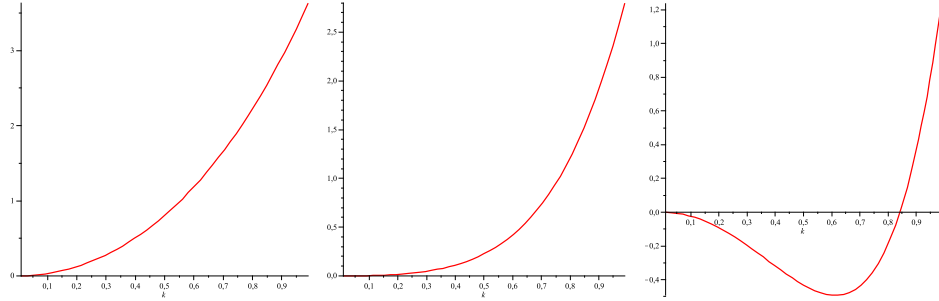


Рис. 6

Графики ключевой функции $\widetilde{W}(k, \lambda)$ при докритическом и закритическом значениях параметра

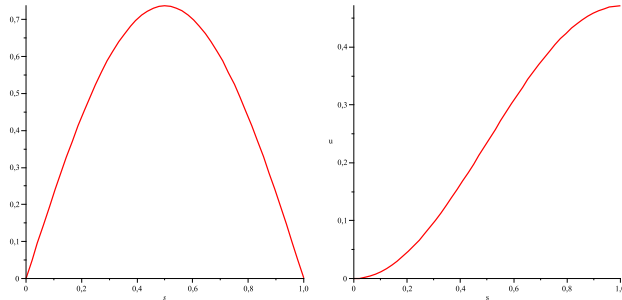


Рис. 7

Изображения бифурцирующей критической точки $\psi(s)$ функционала (74) (слева) и соответствующего прогиба стержня

При наличии искривлений (деформаций стержня в ненагруженном состоянии) уравнение равновесия перестает, вообще говоря, быть интегрируемым, что приводит к необходимости использования расширенных (невариационных) версий метода Ляпунова-Шмидта.

Тема №8.

Прогибы сжатой балки на двойном упругом основании в обобщенной модели Власова-Леонтьева

8.1 Предварительные замечания

В этом разделе кратко изложена методика приближенного вычисления и анализа закритических прогибов продольно сжатой уругой балки на двойном упругом основании в обобщенной модели Власова-Леонтьева. Методика основана на редукции Пуанкаре-Ляпунова-Шмидта, позволяющей сводить анализ закритических деформаций балки к анализу критических точек ключевой функции на конечномерном пространстве ключевых переменных.

Обобщенная модель Власова-Леонтьева в условиях продольно сжатой балки приводит к смене знаков перед некоторыми коэффициентами традиционного модельного уравнения, что приводит к эффекту 3-модового вырождения (в нулевом состоянии) и к усложненному бифуркационному анализу. Добавление в уравнение кубической нелинейности позволяет «контролировать» рост амплитуды посткритического прогиба балки. Методика Ляпунова-Шмидта дает возможность вычислять закритические прогибы балки, определять устойчивость бифурцирующих состояний и анализировать строение каустики (дискриминантного подмножества в пространстве управляющих параметров). Центральная конструктивная идея состоит в сведении (редукции) задачи изучения изгибов балки к дискриминантному анализу ветвления критических точек полинома от трех переменных (главной части ключевой функции Ляпунова-Шмидта).

Изначально модифицированная модель Власова-Леонтьева была предложена в [13] (стр. 136, уравнение (8.20)), где она представлена в виде ОДУ шестого порядка

$$-\frac{d^6 w}{dx^6} + a_3 \frac{d^4 w}{dx^4} - a_2 \frac{d^2 w}{dx^2} + a_1 w = p \quad (84)$$

при обобщенных краевых условиях Дирихле

$$\frac{d^4 w}{dx^4}(0) = \frac{d^4 w}{dx^4}(1) = \frac{d^2 w}{dx^2}(0) = \frac{d^2 w}{dx^2}(1) = w(1) = w(0) = 0, \quad (85)$$

$w = w(x)$ — функция прогиба средней линии балки, a_1, a_2, a_3 — положительные механические константы, $p = p(x)$ — функциональный параметр внешней нагрузки, x — (промасштабированный) параметр длины средей линии балки. Уравнение (84) имеет единственное решение в пространстве H^6 соболевских функций класса $W_2^6[0, 1]$, удовлетворяющих краевым условиям (85), что объясняется положительной определенностью симметричного оператора $-\frac{d^6 w}{dx^6} + a_3 \frac{d^4 w}{dx^4} - a_2 \frac{d^2 w}{dx^2} + a_1 w$ (при выполнении краевых условий (85)).

Уравнение (84) является обобщением известного уравнения Фусса-Винклера-Циммермана $\frac{d^4 w}{dx^4} - a_2 \frac{d^2 w}{dx^2} + a_1 w = p$ из строительной механики (см. [13], стр. 75, уравнение (1.8)). Рассмотренная ниже модификация предполагает наличие продольного сжатия

балки, приводящего к смене знаков перед коэффициентами в модельном уравнении, что дает эффект 3-модового вырождения в нулевом состоянии:

$$\frac{d^6 w}{dx^6} + a_3 \frac{d^4 w}{dx^4} + a_2 \frac{d^2 w}{dx^2} + a_1 w - w^3 = p. \quad (86)$$

Наличие нелинейного слагаемого позволяет «контролировать» рост амплитуд пост-критических прогибов балки (см. [3]).

Основой примененной ниже методики исследования закритических прогибов служит вариационная версия метода Ляпунова-Шмидта [66], позволяющая не только вычислять прогибы, но и определять их устойчивость, а проводить построение каустики (дискриминантного множества) в пространстве управляющих параметров $a = (a_1, a_2, a_3)$. Центральная конструктивная идея — сведение (редукция) задачи об изучении бифуркации изгибов к анализу ветвления критических точек полинома от шести переменных, являющегося главной частью ключевой функции

$$W(\xi, \delta, q) = \inf_{w: \langle w, e_k \rangle = \xi_k} V(w, a, q) = V\left(\sum_{i=1}^3 \xi_i e_i + \Phi(\xi)\right), \quad (87)$$

где

$$V(\xi, \delta, q) := \int_0^1 \left(\frac{1}{2} \left(\left(\frac{d^3 w}{dx^3} \right)^2 - a_3 \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 + a_2 \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 - a_1 w^2 \right) + \frac{1}{4} w^4 + p w \right) dx, \quad (88)$$

— потенциал уравнения (86), e_1, e_2, e_3 — моды прогиба в нуле при соответствующем значении векторного параметра $a = \bar{a}$, $\delta := a - \bar{a}$ [29],[66]. Уравнение (86) является уравнением Эйлера для экстремалей функционала (88).

8.2 Случай трехмодового вырождения

Обобщенная нелинейная (промасштабированная) модель закритических прогибов однородной балки на двойном упругом основании представлена уравнением (86), в котором $w = w(x)$ — прогиб балки (поле смещений точек средней линии упругой балки, расположенной вдоль оси x). Изучение закритических прогибов состоит в отыскании решений краевой задачи (86)-(85) при различных значениях параметров. Данная краевая задача может допускать 3-мерное вырождение, порождающие 3-модовые бифуркации с разнообразными геометрическими и физическими эффектами.

Решение этой задачи можно осуществлять посредством вариационной версии метода конечномерной редукции Ляпунова-Шмидта [27],[66]-[68], сводящей анализ краевой задачи к описанию ветвления экстремалей параметрического семейства полиномов от трех переменных — главной части ключевой функции (87)).

Будем далее рассматривать пример, в котором тройка мод бифуркации задана набором функций

$$e_1 = \sqrt{2} \sin(\pi x), \quad e_2 = \sqrt{2} \sin(2\pi x), \quad e_3 = \sqrt{2} \sin(3\pi x),$$

— базисом ядра второго дифференциала, соответствующим (критическому) значению управляющего параметра

$$a = \bar{a} := (36\pi^6, 49\pi^4, 14\pi^2).$$

После пересечения точкой $a = (a_1, a_2, a_3)$ произвольной характеристической плоскости (в $\mathbb{R}^3$) нулевая функция теряет стабильность и вблизи нее рождаются ненулевые

стабильные состояния. Характеристические плоскости в общем случае задаются посредством линейаризованного уравнения

$$\frac{d^6 w}{dx^6} + a_3 \frac{d^4 w}{dx^4} + a_2 \frac{d^2 w}{dx^2} + a_1 w = 0 \quad (89)$$

(при краевых условиях (85)). Характеристические плоскости состоят из тех и только тех точек a , при которых уравнение (89) имеет ненулевое решение. Поиск нетривиальных решений линейаризованного уравнения осуществляется через характеристическое уравнение $-\lambda^6 + a_3 \lambda^4 - a_2 \lambda^2 + a_1 = 0$. Учет краевых условий с необходимостью приводит к соотношениям $\lambda^2 = n^2 \pi^2$, $n = 1, 2, \dots$, из которого получаем набор равенств: $a_1 - a_2 n^2 \pi^2 + a_3 n^4 \pi^4 - n^6 \pi^6 = 0$, задающих характеристические плоскости $L_1, L_2, \dots, L_n, \dots$. Поверхность L , огибающая семейства характеристических плоскостей, выделяет область в $\mathbb{R}^3$, состоящей из точек, для которых соответствующий функционал действия имеет в нуле единственную точку минимума. При пересечении точкой a поверхности L (в $\mathbb{R}^3$) происходит бифуркация рождения нетривиальных стабильных состояний. Поверхность L является кусочно линейной, гранями которой служат плоские многоугольники, ограниченные линиями попарных пересечений характеристических плоскостей. Эти линии также будем называть характеристическими. Общие точки для отдельных пар характеристических линий будем называть характеристическими точками. Интерес к последним вызван тем, что они дают эффект трехмодового вырождения. Точки характеристических линий, отличные от характеристических точек, дают эффект двухмодового вырождения. Пересечение поверхности L по внутренней точке грани, принадлежащей L_n , приводит к одномерной бифуркации с модой $e_n = \sqrt{2} \sin(\pi n x)$. Пересечение L по точке излома, принадлежащей линии (характеристической) пересечения плоскостей L_n, L_m приводит к двумерной бифуркации с модами e_n, e_m . Соответственно, пересечение L по характеристической точке, являющейся точкой пересечения плоскостей L_n, L_m, L_l , приводит к трехмерной бифуркации с модами e_n, e_m, e_l . Три характеристические плоскости L_m, L_n, L_l , отвечающие произвольной тройке попарно различных натуральных чисел m, n, l , пересекаются по единственной точке

$$(a_1, a_2, a_3) = (n^2 m^2 l^2 \pi^6, (n^2 m^2 + m^2 l^2 + n^2 l^2) \pi^4, (n^2 + m^2 + l^2) \pi^2). \quad (90)$$

Доказательство этого факта вытекает из того, что характеристическая точка определяется системой уравнений

$$a_1 - n^2 \pi^2 a_1 + n^4 \pi^4 a_3 - n^6 \pi^6 = a_1 - m^2 \pi^2 a_2 + m^4 \pi^4 a_3 - m^6 \pi^6 = a_1 - l^2 \pi^2 a_2 + l^4 \pi^4 a_3 - l^6 \pi^6 = 0.$$

Здесь l, m, n — натуральные попарно различные числа. Этой системе уравнений отвечает единственное решение (90).

В частном случае $l = 1, m = 2, n = 3$, получаем ранее выбранный пример. В случае других наборов мод исследования проводятся аналогичным образом.

8.3 Построение главной части ключевой функции

Анализ бифуркационных эффектов, происходящих при локализации управляющих параметров вблизи точки $\bar{a} = (1, 2, 3)$: $a_k = \bar{a}_k + \delta_k$, $k = 1, 2, 3$, можно осуществить посредством вариационной версии редукции Ляпунова-Шмидта [27] к анализу ключевой функции (от трех ключевых переменных) (87), которую запишем в виде

$$W(\xi, \delta) = \inf_{w: \langle w, e_k \rangle = \xi_k, k=1, 2, 3} V(w, \bar{a} + \delta), \quad (91)$$

$\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)^\top$, $\delta = (\delta_1, \delta_2, \delta_3)^\top$. Известно, что в рассматриваемых условиях функция $W(\xi, \delta)$ является гладкой. Эта функция наследует все аналитические и топологические свойства V на E [27]. В частности, при достаточно малых δ существует взаимно однозначное соответствие между критическими точками V и W , сохраняющее типы точек (кратности, значения индекса Морса и т. п.).

Так как функционал V четен: $V(-w, a) = V(w, a)$ и симметричен относительно инволюции $I_1 : w(x) \mapsto w(1-x)$, то V инвариантен относительно действия группы $\mathbf{Z}_2^2$, заданного парой инволюций I_1, I_2 , где $I_2 = -I_1$.

Очевидно, что выполняются соотношения

$$I_1(e_1) = e_1, \quad I_1(e_2) = -e_2, \quad I_1(e_3) = e_3.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} W(-\xi_1, \xi_2, -\xi_3, \delta_1, \delta_2, \delta_3) &= W(\xi_1, -\xi_2, \xi_3, \delta_1, \delta_2, \delta_3) = \\ &= W(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \delta_1, \delta_2, \delta_3). \end{aligned}$$

Можно записать, учитывая эту симметрию, следующее асимптотическое представление ключевой функции:

$$W(\xi, \delta) = U(\xi, \delta) + o(|\xi|^4) + O(|\xi|^4)O(\delta), \quad (92)$$

где

$$U(\xi, \delta) = V(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \xi_3 e_3, \delta) \quad (93)$$

— ритцевская аппроксимация функционала V по модам e_1, e_2, e_3 . Непосредственные вычисления приводят к следующему утверждению.

Теорема 14. *Для ключевой функции (91) имеет место асимптотическое представление*

$$\begin{aligned} W(\xi, \delta) &= \frac{1}{2}(\bar{\delta}_1 \xi_1^2 + \bar{\delta}_2 \xi_2^2 + \bar{\delta}_3 \xi_3^2) + \\ &+ \frac{3}{8}(\xi_1^4 + \xi_2^4 + \xi_3^4) + \frac{3}{2} \left(\xi_1^2 \xi_2^2 + \xi_1^2 \xi_3^2 + \xi_2^2 \xi_3^2 + \xi_1 \xi_2^2 \xi_3 - \frac{1}{3} \xi_1^3 \xi_3 \right) + \\ &+ o(|\xi|^4) + O(|\xi|^4)O(\delta), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \bar{\delta}_1 &= (-\delta_1 + \delta_2 - \delta_3)\pi^2, \\ \bar{\delta}_2 &= (-\delta_1 + 4\delta_2 - 16\delta_3)\pi^4, \\ \bar{\delta}_3 &= (-\delta_1 + 9\delta_2 - 81\delta_3)\pi^6. \end{aligned}$$

Доказательство вытекает из следующих соотношений:

$$\begin{aligned} W(\xi, \delta) &= V(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \xi_3 e_3, \delta) = \int_0^1 \frac{1}{2} \left(\left(- \left(\frac{d^3(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \xi_3 e_3)}{dx^3} \right)^2 + \right. \right. \\ &+ (14 + \delta_3) \left(\frac{d^2(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \xi_3 e_3)}{dx^2} \right)^2 - (49 + \delta_2) \left(\frac{d(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \xi_3 e_3)}{dx} \right)^2 + \\ &\left. \left. + (36 + \delta_1)(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \xi_3 e_3)^2 + \frac{(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \xi_3 e_3)^4}{4} \right) dx, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \left(\frac{d^3(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \xi_3 e_3)}{dx^3} \right)^2 &= (\xi_1^2 + 64\xi_2^2 + 729\xi_3^2) \pi^6, \\
\int_0^1 \left(\frac{d^2(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \xi_3 e_3)}{dx^2} \right)^2 &= (\xi_1^2 + 16\xi_2^2 + 81\xi_3^2) \pi^4, \\
\int_0^1 \left(\frac{d(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \xi_3 e_3)}{dx} \right)^2 &= (\xi_1^2 + 4\xi_2^2 + 9\xi_3^2) \pi^2, \\
\int_0^1 (\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \xi_3 e_3)^2 dx &= \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2, \\
\int_0^1 (\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \xi_3 e_3)^4 dx &= \frac{3}{2} (\xi_1^4 + \xi_2^4 + \xi_3^4) + 6 (\xi_1^2 \xi_2^2 + \xi_1^2 \xi_3^2 + \xi_2^2 \xi_3^2 + \xi_1 \xi_2^2 \xi_3) - 2\xi_1^3 \xi_3.
\end{aligned}$$

Подставив полученные значения для интегралов в $W(\xi, \delta)$, получим искомое выражение.

Замечание 1. «Геометрический сюжет» бифуркации критических точек и первые асимптотики ветвей бифурцирующих точек (по закритическим приращениям управляющих параметров) для функции $W(\xi, \delta)$ полностью определяются ее главной частью $U(\xi, \delta)$ [27].

Замечание 2. В случае ненулевого, но малого функционального параметра p , изложенная схема немного усложняется вследствие появления в уравнениях и связанных с ними аналитических выкладках дополнительных слагаемых. В этом случае можно ограничиться рассмотрением разложения p по основным модам: $p(x) = \eta_1 e_1 + \eta_2 e_2 + \eta_3 e_3$. Членами разложения по остальным модам можно пренебречь, так как они дают малый вклад в окончательное асимптотическое представление решений (по сравнению с параметрами δ_j, η_k).

8.4 Анализ ключевой функции посредством вторичной редукции

Так как функция (93) обладает симметрией относительно группы $\mathbb{Z}_2^2$, заданного парой инволюций I_1, I_2 , где $I_2 = -I_1$, $I_1 : w(x) \mapsto w(1-x)$, то эта функция четна по переменной ξ_2 : $U(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \delta) = U(\xi_1, -\xi_2, \xi_3, \delta)$. Следовательно, она может быть представлена в виде

$$U(\xi, \delta) = \frac{3}{8} \xi_2^4 + \frac{p}{2} \xi_2^2 + q,$$

где

$$p = \bar{\delta}_2 + 3(\xi_1^2 + \xi_1^2 + \xi_1 \xi_3), \quad q = \frac{1}{2}(\bar{\delta}_1 \xi_1^2 + \bar{\delta}_3 \xi_3^2) + \frac{3}{8}(\xi_1^4 + \xi_3^4 + 4\xi_1^2 \xi_3^2) - \frac{1}{2} \xi_1^3 \xi_3.$$

Такое представление функции U дает возможность вторичной редукции: дальнейшего сокращения числа переменных до двух (редукции к функции двух переменных). При этом выделяются два случая: $p \geq 0$ и $p \leq 0$. При $\bar{\delta}_2 \leq 0$ эти соотношения выделяют в плоскости переменных ξ_1, ξ_3 внешность и внутренность эллипса $\bar{\delta}_2 + 3(\xi_1^2 + \xi_1^2 + \xi_1 \xi_3) = 0$. При $\bar{\delta}_2 \geq 0$ неравенство $p \geq 0$ выполняется для всех значений ξ_1, ξ_3 .

В случае $p \geq 0$ можно рассмотреть вторично редуцированную ключевую функцию $q = q(\xi_1, \xi_3) := \inf_{\xi_2} U$. В предполагаемых условиях функция q наследует (вблизи

нуля) аналитические и топологические свойства функции $U(\xi)$. Причем имеется естественное взаимно-однозначное соответствие $(\xi_1, \xi_3) \mapsto (\xi_1, 0, \xi_3)$ между критическими точками функций q и U , сохраняющее топологические типы точек.

В случае $p \leq 0$ получаем (вторично) редуцированную ключевую функцию $\inf_{\xi_2} U$ двух видов:

а) $U_1 = U(\xi_1, 0, \xi_3) = q$; при этом соответствие $(\xi_1, \xi_3) \mapsto (\xi_1, 0, \xi_3)$ (между критическими точками функций q и U) повышает индекс Морса на единицу;

б) $U_2 = U(\xi_1, \pm\sqrt{-\frac{2p}{3}}, \xi_3)$; соответствие $(\xi_1, \xi_3) \mapsto (\xi_1, \pm\sqrt{-\frac{2p}{3}}, \xi_3)$ (между критическими точками функций U_1 и U) сохраняет индекс Морса.

Таким образом, вторичная редукция сводит изучение критических точек к описанию каустик и раскладов бифурцирующих экстремалей для функций с особенностями двумерных сборок. Достаточно полный анализ таких функций проведен в работах [38],[39]

Исследование параметрических разветвок двумерных сборок проводится по единой схеме: после приведения к нормальной форме и перехода к полярным координатам редуцированная ключевая функция приобретает удобный для исследования каустики и *bif*-раскладов [66]-[68]. Причем эти исследования можно провести посредством элементарных методов математического анализа.

Тема №9.

Вычисление поля скоростей в 3D-диффузоре

9.1 Функциональная редукция уравнения Навье-Стокса в конической области

Здесь показано, что динамические характеристики течений жидкости в 3D-диффузоре можно находить на основе решений упрощенного уравнения, аналогичного уравнению Джеффри-Гамеля из случая двумерного диффузора. Упрощенное уравнение позволяют достаточно точно вычислять поле скоростей жидкости в коническом 3D-диффузоре. Модельным уравнением служит смешанная краевая задача для ОДУ второго порядка с квадратичной степенной нелинейностью. Ранее авторами было найдено асимптотическое приближение к решению модельной краевой задачи при малом угле раскрытия диффузора. В данной статье показано, что при углах раскрытия, близких к прямому, эпюры скоростей жидкости можно вычислять посредством нелокальной вариационной версии редукции Ляпунова-Шмидта.

Трехмерное уравнение движения несжимаемой жидкости в прямоугольной системе координат

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla)(\mathbf{v}) = \nu \Delta(\mathbf{v}) - \frac{1}{\rho} \text{grad}(p)$$

(уравнение Навье-Стокса), рассмотренное совместно с уравнением неразрывности $\text{div}(\mathbf{v}) = 0$, в сферических координатах r, θ, φ имеет вид системы скалярных уравнений (Навье-

Стокса) (см. [43],[75]):

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial v_r}{\partial t} + (\mathbf{v}, \tilde{\nabla})v_r - \frac{v_\theta^2 + v_\varphi^2}{r} = \\ & = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left[\tilde{\Delta}v_r - \frac{2v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial(v_\theta \sin(\theta))}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right], \\ & \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + (\mathbf{v}, \tilde{\nabla})v_\theta + \frac{v_r v_\theta}{r} - \frac{v_\varphi^2 \operatorname{ctg}(\theta)}{r} = \\ & = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu \left[\tilde{\Delta}(v_\theta) + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2 \sin^2(\theta)} - \frac{2 \cos(\theta)}{r^2 \sin^2(\theta)} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right], \\ & \frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + (\mathbf{v}, \tilde{\nabla})v_\varphi + \frac{v_r v_\varphi}{r} + \frac{v_\theta v_\varphi \operatorname{ctg}(\theta)}{r} = \\ & = -\frac{1}{\rho r \sin(\theta)} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \nu \left[\tilde{\Delta}(v_\varphi) + \frac{2}{r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{2 \cos(\theta)}{r^2 \sin^2(\theta)} \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi}{r^2 \sin^2(\theta)} \right], \end{aligned} \right\}$$

где

$$(\mathbf{v}, \tilde{\nabla}) = v_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \varphi},$$

$$\tilde{\Delta}(f) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin(\theta) \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}.$$

Уравнение неразрывности, соответственно, запишется в виде

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin(\theta)} \left(\frac{\partial(\sin(\theta) v_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right) = 0.$$

После перехода к сферическим координатам r, θ, φ и наложения условия осевой симметрии на рассматриваемые течения в коническом диффузоре

$$\mathbf{v} := (v_r, v_\theta, v_\varphi) = (v, 0, 0)$$

система уравнений Навье-Стокса упростится и предстанет в виде скалярного уравнения (см. [75])

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left[\tilde{\Delta}(v) - \frac{2v}{r^2} \right]. \quad (94)$$

Из (94) получаем $\frac{\partial p}{\partial \theta} = 0$, $\frac{\partial p}{\partial \varphi} = 0$ (p не зависит от φ и θ : $p = p(r)$). В случае стационарной задачи, после сокращения этого уравнения на общий множитель Q ($Q = \text{const}$), подстановки $v = \frac{Q u(\varphi, \theta)}{r}$ и отбрасывания общего множителя r^{-3} , получим уравнение

$$-\nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \operatorname{ctg}(\theta) \frac{\partial u}{\partial \theta} + \sin^{-2}(\theta) \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \right) - Q u^2 + 2\nu u + \frac{1}{Q} \frac{r^3}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = 0,$$

из которого следует $\frac{r^3}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = c$ (c — некоторая константа) и $\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\rho c}{r^3}$. Следовательно, давление описывается формулой: $p = -\frac{\rho c}{2r^2} + c_1$. Если, далее, принять аналог подстановки Джефффри-Гамеля: $v = \frac{Q u(\theta)}{r}$ (означающей, в частности, независимость u от φ), получим, после умножения на ν^{-1} , уравнение

$$u'' + \operatorname{ctg}(\theta) u' - 2u + \mathcal{R} u^2 = C, \quad \mathcal{R} = \frac{Q}{\nu}, \quad (95)$$

являющееся, до некоторой степени, аналогом уравнения Джефффри-Гамеля [1],[2],[81],[69]. После добавления к (95) стандартных условий, связанных с течением в специальной области (круговом конусе $\Omega = \{(r, \theta, \varphi) : r > 0, \theta \leq \beta\}$, $0 < \beta < \pi$), учитывая при этом условие прилипания жидкости к границе области и осевую симметрию, получим граничное условие

$$u'(0) = 0, \quad u(\beta) = 0. \quad (96)$$

Левая часть уравнения (95) является антиградиентом функционала энергии: $f(u) = -\text{grad}V(u)$,

$$V(u) := \int_0^\beta \sin(\theta) \left(\frac{(u')^2}{2} + u^2 - \frac{\mathcal{R}u^3}{3} + Cu \right) d\theta, \quad (97)$$

при граничном условии (96) и условии постоянства величины потока:

$$\int_0^\beta \sin(\theta) u(\theta) d\theta = Q = (1 - \cos(\beta)) \tilde{Q}. \quad (98)$$

Вариационный характер краевой задачи (95)-(96) позволяет применять локальные и нелокальные версии вариационного метода Ляпунова-Шмидта [27].

9.2 Асимптотические представления ветвей решений редуцированного уравнения при малых углах раскрытия диффузора

Итак, положив в специализированном уравнении Навье-Стокса (94) $v = \frac{Qu(\theta)}{r}$, получим упрощенное уравнение (95), в котором $C = C(\beta)$, $Q = Q(\beta) > 0$ — константы, зависящие от β). При этом должно быть выполнено условие (98). Величину потока представим в виде

$$Q(\beta) = \sigma \beta^2 + K(\beta^2) \beta^4, \quad \sigma > 0, \quad (99)$$

где $K(\beta)$ — некоторая аналитическая функция. Условия прилипания жидкости к границе области и осевая симметрия дают выполнение краевых условий (96) с интегральным соотношением (98). Интеграл (98) является средним значением функции $u(\theta)$ в скалярном произведении

$$\langle w_1, w_2 \rangle := \int_0^\beta \sin(\theta) w_1(\theta) w_2(\theta) d\theta. \quad (100)$$

Будем в дальнейшем обозначать среднее символом $[u]$ ($[u] = \langle w, 1 \rangle$). Константа $C(\beta)$ в правой части уравнения (95) определяется через равенство средних от левой и правой частей этого соотношения:

$$[u'' + \text{ctg}(\theta) u' - 2u + \mathcal{R}u^2] = C(\beta) (1 - \cos(\beta)),$$

из которого следует, что $C(\beta)$ равно выражению

$$\frac{(\sin(\beta) u'(\beta) - 2Q + \mathcal{R}[u^2])}{(1 - \cos(\beta))} = 2 \left(u''(0) + \sigma \left(\frac{u(0)^2}{\nu} - 2 \right) \right) + O(\beta^2). \quad (101)$$

Здесь учтено, что, в силу граничного условия в нуле, имеет место соотношение $u'(\theta) = u''(0)\theta + o(\theta^2)$ (и учтена четность функции $u(\theta)$, вытекающая из условия осевой симметрии поля скоростей в диффузоре).

После замен $\theta \mapsto \beta \tilde{\theta}$, $w(\tilde{\theta}) := u(\beta \tilde{\theta})$, $w'(\tilde{\theta}) := \beta u'(\beta \tilde{\theta})$, $w''(\tilde{\theta}) := \beta^2 u''(\beta \tilde{\theta})$ получим функционал энергии в виде

$$\tilde{V}_\beta(w) := \int_0^1 \frac{\sin(\beta \tilde{\theta})}{\beta} \left(\frac{(w')^2}{2} + \beta^2 \left(w^2 - \frac{\mathcal{R}w^3}{3} \right) \right) d\tilde{\theta}. \quad (102)$$

Ему соответствует промасштабированное уравнение Эйлера-Лагранжа

$$w'' + \beta \text{ctg}(\beta \tilde{\theta}) w' - \beta^2 (2w - \mathcal{R}w^2) = D (= D_0 + O(\beta^2)). \quad (103)$$

Левая часть последнего уравнения является антиградиентом для $\tilde{V}_\beta(w)$ — в промасштабированном скалярном произведении

$$\langle w_1, w_2 \rangle_\beta := \int_0^1 \frac{\sin(\beta \tilde{\theta})}{\beta} w_1(\tilde{\theta}) w_2(\tilde{\theta}) d\tilde{\theta} \quad (104)$$

при условиях

$$w'(0) = 0, \quad w(1) = 0, \quad \int_0^1 \frac{\sin(\beta \tilde{\theta})}{\beta} w(\tilde{\theta}) d\tilde{\theta} = \frac{1 - \cos(\beta)}{\beta^2}. \quad (105)$$

В предельном случае $\beta = 0$ имеем

$$\tilde{V}_0(w) := \frac{1}{2} \int_0^1 \tilde{\theta} w'(\tilde{\theta})^2 d\tilde{\theta} \quad (106)$$

— при условиях

$$w'(0) = 0, \quad w(1) = 0, \quad \int_0^1 \tilde{\theta} w(\tilde{\theta}) d\tilde{\theta} = \frac{1}{2} \quad (107)$$

(последнее соотношение в (107) выполнено в силу (105)).

Константа $D(\beta)$ в правой части уравнения (103) является неизвестной и определяется через равенство промасштабированных средних ($[w]_\beta := \langle w, 1 \rangle_\beta$) левой и правой частей соотношения (103):

$$[w'' + \beta \operatorname{ctg}(\beta \tilde{\theta}) w' - \beta^2(2w - \mathcal{R}w^2)]_\beta = D(\beta) \frac{(1 - \cos(\beta))}{\beta^2}. \quad (108)$$

Так как $[w'' + \beta \operatorname{ctg}(\beta \tilde{\theta}) w']_\beta = \frac{\sin(\beta)}{\beta} w'(\beta)$, то из (108) получим

$$D(\beta) = \frac{\beta^2}{(1 - \cos(\beta))} \left(\frac{\sin(\beta)}{\beta} w'(\beta) + \beta^2 \left([\mathcal{R}w^2]_\beta - \frac{2Q}{\beta^2} \right) \right).$$

Критическая точка предельного функционала (106) при условии (107) определяется уравнением

$$w'' + \frac{w'}{\tilde{\theta}} = -2.$$

То есть критической точкой функционала $\tilde{V}_0$ является функция $w_0(\tilde{\theta}) = 2(1 - \tilde{\theta}^2)$. В итоге мы получаем следующее утверждение.

Теорема 15. *из критической точки w_0 функционала $\tilde{V}_0(w)$ на аффинном подпространстве $\Pi_0 := \{w : \int_0^1 \tilde{\theta} w d\tilde{\theta} = \frac{1}{2}\}$ выходит ветвь w_β критических точек функционала $\tilde{V}_\beta(w)$ на подпространстве $\Pi_\beta := \{w : \int_0^1 \frac{\sin(\beta \tilde{\theta})}{\beta} w d\tilde{\theta} = +K(\beta^2) \beta^2\}$, для которой имеет место асимптотическое представление*

$$w_\beta = w_0 + o(\beta^2), \quad w_0(\tilde{\theta}) = 2(1 - \tilde{\theta}^2).$$

Доказательство вытекает из соотношений: $\frac{\sin(\beta\tilde{\theta})}{\beta} - \tilde{\theta} = o(\beta^2)$,

$$\int_0^1 \frac{\sin(\beta\tilde{\theta})}{\beta} w d\tilde{\theta} - \int_0^1 \tilde{\theta} w d\tilde{\theta} = o(\beta^2), \quad \tilde{V}_\beta(w) - \tilde{V}_0(w) = o(\beta^2).$$

Таким образом, для решения уравнения (95) получаем представление

$$u = 2 \left(1 - \left(\frac{\theta}{\beta} \right)^2 \right) + \beta^2 h \left(\frac{\theta}{\beta}, \beta^2 \right), \quad \theta \leq \beta,$$

где $h(x, y)$ — некоторая аналитическая функция на координатной плоскости $\mathbb{R}^2$. Асимптотические представления более высокого порядка можно получать непосредственно на основе уравнения (103).

9.3 Поле скоростей для угла раскрытия $\frac{1}{2}\pi$

Пусть $\mathcal{A} = \cos(\theta) \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{\cos(\theta)} \frac{d}{d\theta} \right)$ или $\mathcal{A}(u) := u'' + \operatorname{ctg}(\theta) u'$ — главная линейная часть уравнения (95). Основу вычисления эпюры скоростей течения жидкости в диффузоре составляет вспомогательная задача отыскания собственных функций и собственных значений оператора $\mathcal{A}$ (при краевых условиях (96)). Следующее утверждение предоставляет возможность решения такой задачи: пусть $e_0 = \ln \left(\frac{1+\cos(\beta)}{1+\cos(\theta)} \right)$, $e_n := \cos^n(\theta)$ (при $n \geq 1$) и $\mu_n := -n(n+1)$. Тогда имеют место следующие соотношения: $\mathcal{A}(e_0) = 1$, $\mathcal{A}(e_1) = -2e_1$, $\mathcal{A}(e_2) = \mu_2 e_2 + 2$, $\mathcal{A}(e_n) = \mu_n e_n - \mu_{n-1} e_{n-2}$, $n \geq 3$. Доказательство осуществляется непосредственной проверкой.

При $\beta = \frac{\pi}{2}$ на основе этих соотношений можно получить полный список собственных функций оператора $\mathcal{A}$. Этот список можно изготовить, исходя из системы функций $\{e_k\}$, посредством ортогонализации по Граму-Шмидту (в скалярном произведении (100)). В результате получится система функций $h_k(\theta) = P_k(\cos(\theta))$, где

$$P_k(x) = \frac{1}{2^k k!} \frac{d^k}{dx^k} (x^2 - 1)^k,$$

— полином Лежандра, являющийся собственной функцией оператора Лежандра

$$\Lambda = \frac{d}{dx} \left((1 - x^2) \frac{d}{dx} \right).$$

Эта функция отвечает собственному значению $\mu_k = -k(k+1)$ (без учета краевых условий). Соответственно, функция h_k является собственным элементом для оператора $\mathcal{A}$ с собственным значением μ_k . Если учесть краевые условия (96) при $\beta = \frac{1}{2}\pi$, то собственными элементами оператора $\mathcal{A}$ будут функции $g_n := h_{2n-1}$, отвечающие собственным значениям $\lambda_n = \mu_{2n-1} = -(2n-1)2n$. Известно, что система функций g_n является ортогональной [8] (в скалярном произведении (100)). Известно также, что $\|h_n\| = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}$ и, соответственно, $\|g_k\| = \sqrt{\frac{2}{4k-1}}$. Выпишем, для наглядности, первые десять функций Лежандра:

$$\left. \begin{aligned} P_0(x) &= 1; \quad P_1(x) = x; \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1); \quad P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x); \\ P_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3); \quad P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x); \\ P_6(x) &= \frac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5); \\ P_7(x) &= \frac{1}{16}(429x^7 - 693x^5 + 315x^3 - 35x); \\ P_8(x) &= \frac{1}{128}(6435x^8 - 12012x^6 + 6930x^4 - 1260x^2 + 35); \\ P_9(x) &= \frac{1}{128}(12155x^9 - 25740x^7 + 18018x^5 - 4620x^3 + 315x); \\ P_{10}(x) &= \frac{1}{256}(46189x^{10} - 109395x^8 + 90090x^6 - 30030x^4 + 3465x^2 - 63). \end{aligned} \right\}$$

Заметим, что функции h_{2n} реализуются как собственные элементы оператора $\mathcal{A}$ при краевых условиях Неймана.

9.4 Алгоритм вычисления поля скоростей посредством конечномерной редукции

Поскольку левая часть уравнения (95) является антиградиентом фредгольмова функционала энергии (97), то приближенное построение эпюры скоростей потока жидкости в диффузоре можно осуществить, используя модификации вариационного метода Ляпунова-Шмидта. Например, сначала можно рассмотреть ритцевскую аппроксимацию функционала энергии

$$V_R(\xi) := V(\xi_1 g_1 + \xi_2 g_2 + \dots + \xi_n g_n)$$

— для заранее выбранного количества n ритцевских базисных мод, а затем, применив редукцию Пуанкаре, заключенную в переходе к ключевой функции

$$W(\tilde{\xi}) := \inf_{\xi_3, \dots, \xi_n} V_R(\xi), \quad \tilde{\xi} = (\xi_1, \xi_2) \quad (109)$$

— с учетом условия постоянства величины «срезанного» потока

$$\sum_{k=1}^n \xi_k [g_k] = Q, \quad (110)$$

получим эквивалентную задачу $W(\tilde{\xi}) \longrightarrow \infty$. Функция $W(\tilde{\xi})$ является гладкой, если выполнено условие положительности (монотонности) V на некоторой ограниченной и выпуклой области $\mathcal{U}$ прямого дополнения к подпространству, порожденному ключевыми модами. Такую область можно найти за счет выбора соответствующих оценок на компоненты $\tilde{\xi}$, v , с учетом быстроты роста собственных чисел λ_n . Соответствующая вычислительная процедура достаточно подробно представлена в [36],[37],[69]. Приведем здесь краткое описание схемы выбора области $\mathcal{U}$ в случае использования (в процессе редукции) принципа сжатых отображений. Запишем краевую задачу (95)-(96) в виде операторного уравнения

$$\mathcal{B}(w) = g(w), \quad w \in H_0(U), \quad \mathcal{B} := \mathcal{A} + 2I, \quad g(w) := \mathcal{R}w^2 - C.$$

Используя процедуру ортогонального разложения пространства в сумму подпространств, разобьем данное уравнение в систему двух уравнений

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{B}_1(u) - g_1(u+v) &= 0, \\ v - \mathcal{B}_2^{-1}(g_2(u+v)) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (111)$$

где $\mathcal{B}_1 := \mathcal{B}|_N$, $\mathcal{B}_2 := \mathcal{B}|_{N^\perp \cap E}$, $N := \text{Lin}(e_1, e_2)$. Второе уравнение системы (111) будем рассматривать в подпространстве $N^\perp \cap H_0(U)$. Из спектральных свойств оператора $\mathcal{A}$ вытекает, что $\|\mathcal{B}_2^{-1}\| \leq \frac{1}{32}$, и поэтому оператор

$$S(v) := \mathcal{B}_2^{-1}(g_2(u+v, u+v)) \quad (112)$$

переводит шар $\mathcal{T} := \{v : \|v\|_{H^0} \leq K\}$ в себя, являясь при этом сжимающим, если $\mathcal{R}K^2 + |C| < 32$ и $2\mathcal{R}K < 1$. Константа C также оценивается сверху с необходимым зазором (см. (101)). Наличие этих факторов приводит к возможности выбора такой

константы K , что шар радиусом K переводится отображением S в себя с выполнением условия сжатия. Последнее обеспечивает возможность получения приближенного решения второго уравнения системы (111) в аналитической форме

$$v = \Phi(u) \quad (113)$$

посредством вычисления итераций $v_n = S(v_{n-1})$. Нетрудно убедиться, в силу положительности оператора $\mathcal{B}_2$ (с большой константой, оценивающей снизу норму оператора), что в предельной точке реализуется минимум $V(u + v)$ по v . Подставив итоговое выражение (113) в первое уравнение системы (111), получим приближение к ключевому уравнению:

$$\tau(u) := f_1(u + \Phi(u)) = 0, \quad u = \xi_1 g_1 + \xi_2 g_2, \quad (114)$$

на конечномерном пространстве N . Все аналитические и топологические свойства исходного уравнения и его решений наследуются ключевым уравнением и его решениями. Связь между решениями исходного и ключевого уравнений осуществляется связывающей формулой

$$w = u + \Phi(u), \quad u = \xi_1 g_1 + \xi_2 g_2.$$

Уравнение (114) также является потенциальным с потенциалом

$$W(\tilde{\xi}) := V(u + \Phi(\tilde{\xi}))N.$$

Таким образом, имеет место следующее утверждение.

Теорема 16. *Поиск и анализ экстремалей функции V_R при $\beta = \frac{\pi}{2}$ осуществляются посредством приближенного построения и изучения экстремалей ключевой функции W , определяемой формулой (109). Связь между экстремалами ξ функции V_R и критическими точками $\tilde{\xi}$ функции W устанавливается формулой перехода $v = \Phi(\tilde{\xi})$:*

$$w = u + \Phi(\tilde{\xi}), \quad u = \xi_1 g_1 + \xi_2 g_2, \quad v = \xi_3 g_3 + \dots + \xi_n g_n,$$

в которой $\Phi(\tilde{\xi})$ приближенно вычисляется посредством сжимающего отображения (112), дающего последовательность параметрических семейств точек, сходящуюся к параметрической точке минимума функции V_R по переменным $\xi_3, \dots, \xi_n$ (при каждой фиксированной компоненте $\tilde{\xi}$, с учетом соотношения (110)).

При вычислении поля скоростей в случаях углов раскрытия, не равных прямому, но близких к нему, можно воспользоваться асимптотической техникой, разработанной Д.В. Костиным [38],[39] при исследовании ветвления конфигураций слабо неоднородных упругих систем.

Приведем результат вычисления поля скоростей (в среде *Maple*) посредством редукции Ляпунова-Шмидта к двум первым (ключевым) модам через промежуточную редукцию Галеркина-Ритца к пяти первым модам.

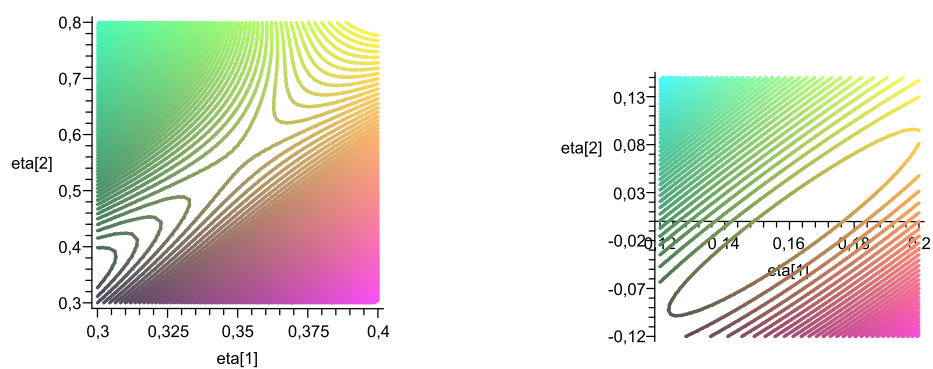


Рис. 8
Локализованные линии уровней ключевой функции.

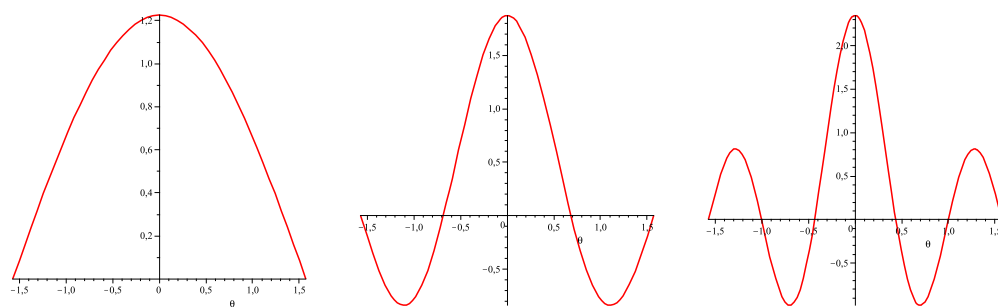


Рис. 9
Графические изображения первых трех мод.

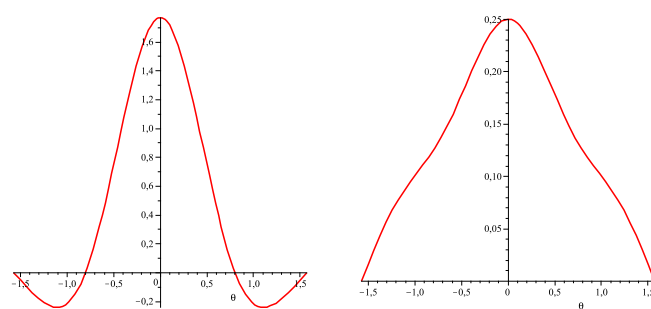


Рис. 10
Эпюры скоростей, отвечающие двум критическим точкам ключевой функции.

Список литературы

- [1] Л.Д. Акуленко, С.А. Кумакшев. Бифуркация основного стационарного течения вязкой жидкости в плоском диффузоре // Изв. РАН. МЖГ. 2005. № 3. - С. 25-36.
- [2] Акуленко Л.Д., Кумакшев С.А. Бифуркация многомодовых течений вязкой жидкости в плоском диффузоре // ПММ. 2008. Т. 72. Вып. 3. - С. 431-441.
- [3] Арнольд В.И. «Жёсткие» и «мягкие» математические модели. 2-е изд. стереотип. / В.И. Арнольд // М.: МЦНМО, 2008. — 32 с.
- [4] Арнольд В.И., Варченко А.Н., Гусейн-Заде С.М. Особенности дифференцируемых отображений // М.: МЦНМО. 2004. - 672 с.
- [5] Бардин Б.С., Фурта С.Д. Локальная теория существования периодических волновых движений бесконечной балки на нелинейно упругом основании// Актуальные проблемы классической и небесной механики. М.: Эльф. - 1998. - С.13-22.
- [6] Борзаков А.Ю., Лемешко А.А., Сапронов Ю.И. Нелинейные ритцевские аппроксимации и визуализации бифуркаций экстремалей // Вестник ВГУ. Сер. физ., матем. Воронеж: изд. ВГУ. - 2003, вып. 2. - С. 100-112.
- [7] Борзаков А.Ю. Применение методов конечномерной редукции к глобальному анализу краевых задач на примере уравнения Дуффинга // Сборник трудов математического факультета ВГУ. 2004. Вып.8. С. 1-12.
- [8] Борзаков А.Ю. Редукции в нелокальном анализе вариационных краевых задач и уравнение колебаний маятника //Семинар по глобальному и стохастическому анализу. Воронеж: ВГУ. - 2005, Вып.1. - С. 34-44.
- [9] Борзаков А.Ю., Костина Т.И., Сапронов Ю.И. К нелокальному бифуркационному анализу вариационных краевых задач // Математические модели и операторные уравнения. Сборник научных статей под редакцией В.А. Костина и Ю.И. Сапронова. Том 6 - Воронеж: ВорГУ, 2009. - С. 8-23.
- [10] Борисович Ю.Г., Звягин В.Г., Сапронов Ю.И. Нелинейные фредгольмовы отображения и теория Лере-Шаудера // Успехи матем. наук. 1977. Т.32, вып.4. С. 3-54.
- [11] Бреккер Т., Ландер. Л. Дифференцируемые ростки и катастрофы // М.: Мир, 1977. - 208 с.
- [12] Вайнберг М.М., Треногин В.А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений // М.: Наука. 1969. - 528 с.
- [13] Власов В.З., Леонтьев Н.Н. Балки, плиты и оболочки на упругом основании // М.: Физматгиз, 1960. 491 с.
- [14] Владимиров В.С. Уравнения математической физики / В.С. Владимиров, Жариков В.В. — М., Физматлит, 2004.
- [15] Волков Е.А. О решении краевых задач для уравнения Пуассона в прямоугольнике // Докл. АН СССР. 1962. - 147, № 2. - С. 13-16
- [16] Вольмир А.С. Гибкие пластины и оболочки // М. : Гостехиздат. 1956.
- [17] Ворович И.И. Математические проблемы нелинейной теории пологих оболочек // М. : Наука. 1989. - 376 с.
- [18] Гилмор Р. Прикладная теория катастроф // М. : Мир, 1984. - Т. 1. — 350 с.; Т. 2. — 285 с.
- [19] Гилмор Р. Прикладная теория катастроф // М. : Мир, 1984. - Т. 1. — 350 с.; Т. 2. — 285 с.
- [20] Гнездилов А.В., Сапронов Ю.И. Нелокальные конечномерные редукции в теории изгиба тонких упругих пластин // Понтрягинские чтения - V. Тезисы докладов. Воронеж: Изд. ВГУ, 1994. - С. 37.
- [21] Гнездилов А.В., Сапронов Ю.И. Осесимметрическая конечномерная редукция для круглой упругой пластины // Материалы конференции по функциональному анализу и математической физике, посвященной 80-летию С.Г.Крейна. Воронеж: ВГУ, 1997. - С. 32-36.
- [22] Гнездилов А.В. Бифуркации критических торков для функционалов с 3-круговой симметрией // Функц. анализ, 2000. Т. 34, вып. 1. - С. 83-86.

- [23] Гнеушев И.А., Ковалева М. И., Сапронов Ю.И. К численному анализу поля скоростей жидкости в коническом 3D-диффузоре // Насосы. Турбины. Системы. № 1, 2018. - Стр. 75-82.
- [24] Даринский Б.М., Сапронов Ю.И. Бифуркации экстремалей вблизи особенности многомерной сборки // Известия ВУЗов. Математика. Т.2. Казань: Форт-Диалог, 1997. - С. 35-46.
- [25] Darinskii M.M., Sapronov Yu.I., Shalimov V.V. Phase transitions in crystals characterized by polarization and deformation components of the order parameter // Ferroelectrics. - 2002. V. 265. - P. 31-42.
- [26] Даринский Б.М., Сапронов Ю.И. Дискриминантные множества и расклады бифурцирующих решений фредгольмовых уравнений // Современная математика и ее приложения. - Тбилиси. 2003. Т.7. - С.72-86.
- [27] Даринский Б.М., Сапронов Ю.И., Царев С.Л. Бифуркации экстремалей фредгольмовых функционалов // Современная математика. Фундаментальные направления. Том 12 (2004) - С. 3-140.
- [28] Зачепа В.Р. , Сапронов Ю.И. Локальный анализ фредгольмовых уравнений // Воронежский госуниверситет. Воронеж 2002.
- [29] Зачепа А.В., Сапронов Ю.И. О бифуркации экстремалей фредгольмова функционала из вырожденной точки минимума с особенностью 3—мерной сборки. Труды математического факультета, вып. 9 (новая серия), изд. ВГУ, Воронеж, 2005. - С.57-71 .
- [30] Изюмов Ю.А., Сыромятников В.И. Фазовые переходы и симметрия кристаллов // М: Наука. 1984. - 247 с.
- [31] Иосида К. Функциональный анализ // М.: «Мир», 1967. — 617 с.
- [32] Ковалева М.И., Костина Т.И., Сапронов Ю.И. Огибающие кривые, точки возврата и бифуркационный анализ нелинейных задач // Воронеж: ВУНЦ ВВС «ВВА», 2015. - 242 с.
- [33] Ковалева М.И., Сапронов Ю.И. Функциональная редукция уравнения динамики жидкости в 3D-диффузоре // Насосы. Турбины. Системы. №1 (22), 2017. Воронеж: ИПЦ "Научная книга". - С. 93-96.
- [34] Колесникова И.В. Даринский Б.М., Сапронов Ю.И. Ветвление фаз кристалла, определяемых термодинамическим потенциалом шестого порядка // Системы управления и информационные технологии. Москва-Воронеж, 2009. № 1(35). – С. 72-76.
- [35] Колесникова И.В., Сапронов Ю.И., Уварова Н.С. Максимальные расклады бифурцирующих экстремалей гладкого функционала из угловой точки минимума с омбилической особенностью // Вестник ВГУ, 2013, сер.: физ., мат., № 2. - С. 205-211.
- [36] Коротких А.С. Бифуркации стационарных решений уравнения «реакция-диффузия» и переход концентраций в стабильное состояние // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. 2017, №1. С. —115-127.
- [37] Коротких А.С. Стационарные точки уравнения «реакция-диффузия» и переход в стабильные состояния . Вестн. Юж.-Урал. гос. ун-та // Сер.: Мат. моделирование и программирование. Челябинск. 2017. Т 10, №1. —С.125-137.
- [38] Костин Д.В. Применение формулы Маслова для асимптотического решения одной задачи об упругих деформациях // Матем. заметки, 2008. Т. 83, № 1. - С. 50-60.
- [39] Костин Д.В. Об одной схеме анализа двухмодовых прогибов слабо неоднородной упругой балки // Доклады Академии наук. 2008, Т. 418, № 4, - С. 295-299
- [40] Костина Т.И. Анализ ветвления периодических решений уравнения Белецкого посредством вариационного метода Ляпунова-Шмидта // Математические модели и операторные уравнения. Том 5, часть 1. Воронеж: изд. ВГУ, 2008. - С. 98-103.
- [41] Костина Т.И., Сапронов Ю.И. Вычисление и применение ключевой функции в задаче о нелокальных прогибах круглой упругой пластины// Математические модели и операторные управления. Сборник научных статей под редакцией В.А. Костина и Ю.И. Сапронова. Том 7. Воронеж: изд. ВГУ, 2011. - С. 79-88.
- [42] Костина Т.И. Нелокальное вычисление ключевых функций в задаче о периодических решениях вариационных уравнений // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. №1. 2011 - С. 181-186.

- [43] Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидродинамика, ч. 2 // М.: Физматгиз, 1963. - 728 стр.
- [44] Красносельский М.А., Бобылев Н.А., Мухамадиев Э.М. Об одной схеме исследования вырожденных экстремалей функционалов классического вариационного исчисления // ДАН СССР. - 1978. - Т. 240, №3. - С. 530-533.
- [45] Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П., Рутцкий Я.Б., Стеценко В.Я. Приближенное решение операторных уравнений // М.: Наука, 1969. - 456 с.
- [46] Красносельский М.А., Забрейко П.П. Геометрические методы нелинейного анализа // М.: Наука. 1975. - 512 с.
- [47] Кулагин Н.Е., Лерман Л.М., Шмакова Т.Г. Фронты, бегущие фронты и их устойчивость в обобщенном уравнении Свифта-Хоенберга // ЖВМ, 2008, том 48, № 4, с. 693-712
- [48] Лемешко А.А. О равномерной сходимости с производными галеркинских приближений к решениям уравнений с параметрами // Математические модели и операторные уравнения. Том 2. Воронеж: изд. ВГУ, 2003. - С. 94-103.
- [49] Лемешко А.А. Об равномерной сходимости ньютоновских приближений к решениям уравнений с параметрами // Сборник трудов молодых ученых математического факультета ВГУ, Воронеж: ВГУ, 2003. - С.74-83.
- [50] Логинов Б.В. Теория ветвления нелинейных уравнений в условиях групповой инвариантности // Ташкент.: Фан, 1985. - 184 с.
- [51] Ляпунов А.М. Sur les figures d'équilibre peu differentes des ellipsoides d'une masse liquide homogene donee d'un mouvement de rotation, p.1 // Зап. Акад. наук, С.-Петербург. 1906.
- [52] Ляв А. Математическая теория упругости // М.-Л.: НКТП СССР. 1935. - 674 с.
- [53] Мазер Дж.Н. Конечная определенность гладких отображений // Математика, 1970. Т. 14, № 1. - С. 145-175.
- [54] Мари Дж. Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии. Лекции о моделях. М.: Мир. 1983. - 397 с.
- [55] Милнор Дж. Теория Морса // М.: Мир, 1965.
- [56] Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике // М.: Наука, 1970. - 512 с.
- [57] Мітропольський Ю.О., Мосеєнков Б.І. Дослідження коливань в системах з розподіленими параметрами (асимптотичні методи) // Видавництво Київського університету. 1961. - 123 п.
- [58] Ниренберг Л. Лекции по нелинейному функциональному анализу // М.: Мир, 1977. - 232 с.
- [59] Попов Е.П. Нелинейные задачи статики тонких стержней // М.: ОГИЗ, 1948. - 170 с.
- [60] Постников М.М. Введение в теорию Морса // М.: Наука, 1971. - 568 с.
- [61] Постон Т. Стюарт И. Теория катастроф и ее приложения // М.: Мир, 1980. - 608 с.
- [62] Пуанкаре А. Избранные труды в трех томах Том 2. Новые методы небесной механики. Топология. Теория чисел. // М.: Наука, 1972. - 1000 с.
- [63] Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн / – М.: Наука. 1984. 432 с.
- [64] Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование // - М.: Физматлит, 2002. - 316 с.
- [65] Сапронов Ю.И. Полурегулярные угловые особенности гладких функций // Матем. сборник. 1989. Т.180, N 10. - С. 1299-1310.
- [66] Сапронов Ю.И. Многомодовые бифуркации упругих равновесий / Ю.И. Сапронов // Прикл. матем. и механ. – 1988. Т.52, вып. 6. – С.997-1006.
- [67] Сапронов Ю.И. Нелокальные конечномерные редукции в вариационных краевых задачах // Математические заметки. 1991. Т.49, вып.1. - С.94-103.
- [68] Сапронов Ю.И. Конечномерные редукции в гладких экстремальных задачах // Успехи матем. наук. 1996. Т. 51, №1. - С. 101-132.

- [69] Сапронов Ю.И. Моделирование диффузорных течений жидкости посредством редуцированных уравнений // Вестник ЮУрГУ. Сер: Математическое моделирование и программирование. 2014, том 7, №2. - С.74-86.
- [70] Сапронов Ю. И., Царев С.Л. Глобальное сравнение конечномерных редукций в гладких вариационных задачах // Матем. заметки. - 2000. Т. 58, №5. - С. 745-754.
- [71] Сапронов, Ю.И. Моделирование течений жидкости посредством редуцированных уравнений / Ю.И. Сапронов, А.П. Карпова, В.В. Конев, А.С. Коротких // Вестник ВГУ. Серия : Физика. Математика. 2014, №2. С. 167—188.
- [72] Сапронова Т.Ю. О разрушении компактных критических орбит инвариантных фредгольмовых функционалов при несимметричных возмущениях // Труды математического факультета. Новая серия. - Воронеж: изд. ВГУ. 1997. - N2(18). - С. 54-58.
- [73] Сапронова Т.Ю. Квазиинвариантные подмногообразия фредгольмовых функционалов // Сборник статей аспирантов и студентов математического факультета ВГУ. Воронеж: изд. 1999. - С. 150-155.
- [74] Скрипов В.П., Скрипов А.В. Спинодальный распад (Фазовый переход с участием неустойчивых состояний) // УФН. Т.123, вып.2. 1979. - С. 193-231.
- [75] Слезкин, Н.А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости / Н.А. Слезкин — М.: ГИТТЛ, 1955. — 520 с.
- [76] Царев С.Л. Один вариант леммы Морса и его приложения к нелинейным вариационным задачам // В кн.: Топологические методы нелинейного анализа. - Воронеж: Изд. ВГУ, 2000. - С. 132-136.
- [77] Cacciopoli R. Un principio di inversione per le corrispondenze funzionali e sue applicazioni alla equazione a derivate parziali // Rend. Acc. Lincei. - 1932. V.16. - P. 390-395, P. 484-489.
- [78] Cacciopoli R. Sulle corrispondenze funzionali inverse diramate: teoria generale e applicazioni ad alcune equazioni non-lineari e al problema di Plateau // Rend. Acc. Lincei. - 1936. V.24. - P. 258-263, P. 416-421.
- [79] Cahn J.W., Hilliard J.E. Free energy of a nonuniform system. I. Interfacial free energy // J. Chem. Phys. 1958. Vol. 28. - P. 258-267.
- [80] Hamel G. Spiralförmige Bewegungen zäher Flüssigkeiten // Jahresber. Detsch. Math. Ver. 1917. Bd 25. - S. 34-60.
- [81] Jeffery G.B. The two-dimensional steady motion of a viscous fluid // Phil. Mag. 1915. Ser.6. V.29, № 172. - P. 455-465.
- [82] Marsden J.E. On the Geometry of the Liapunow-Schmidt procedure // Lect. Notes in Math. - 1979. V.755. - P.77-82.
- [83] Schmidt E. Zur Theorie linearen und nichtlinearen Integralgleichungen, Theil 3: Über die Auflösung der nichtlinearen Integralgleichungen und Verzweigung ihrer Lösungen // Math. Ann. 1908. V.65. - P. 370-399.
- [84] Siersma D. Singularities of Functions on Boundaries, Corners, etc // Quart. J. Oxford Ser. 1981. V.32, N 125. - P. 119-127.
- [85] Swift J., Hohenberg P.S. Hydrodynamic fluctuations at the convective instability // Phys. Rev. 1977. V. A15. P. 319-328.