

ФГБОУ ВО
ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Сапронов Ю. И.

**Избранные вопросы математического
моделирования**

*(Математические конструкции в анализе посткритических процессов.
Изображение посткритических состояний)*

Учебное пособие для аспирантов и студентов 3-6 курсов кафедры
математического моделирования математического факультета ВГУ

Воронеж — 2016

Сапронов Ю.И. Избранные вопросы математического моделирования. (Математические конструкции в анализе посткритических процессов. Изображение посткритических состояний). Воронеж: ВГУ. 2016. – 85 с.

За более чем столетний период своего развития теория нелинейных уравнений математической физики собрала большое количество примеров успешного исследования модельных уравнений на основе упрощающих (редуцирующих) переходов. В конкретных разделах механики и физики были созданы процедуры перехода к упрощенным модельным уравнениям — к уравнениям Гельмгольца, Джеффри-Гамеля (в гидродинамике), редукция Дзялошинского в теории сегнетоэлектрических фазовых переходов, переход к уравнениям КдФ, Клейна-Гордона и СГ в теории нелинейных волн и пр. Отдельные направления, связанные с идеей редукции, зародились и успешно развились в рамках функционально-аналитического подхода. Среди них широкую известность приобрели методы Бубнова, Галеркина, Ритца (приближенные редукции к конечномерным уравнениям), методы Пуанкаре, Ляпунова, Шмидта, Каччиополи, Лере и Шаудера (точные редукции к конечномерным уравнениям).

Данное пособие посвящено применению метода Пуанкаре-Ляпунова-Шмидта исключительно к модельным уравнениям посткритических состояний вариационного типа. Рассмотрены типовые примеры нелинейных модельных уравнений и приведены результаты построения приближенных аналитических представлений решений избранных уравнений. Аналитические представления решений служат основой для компьютерного моделирования.

© Сапронов Ю.И., 2016.

© Воронежский государственный университет

Оглавление

Введение	5
1 Фредгольмовы уравнения	6
1.1 Общие сведения	6
1.2 Конечномерные редукции	8
1.2.1 LS –приводимые отображения	8
1.2.2 Редукция Каччиополи	8
1.2.3 Метод Ляпунова – Шмидта (локальная схема) . . .	9
1.2.4 Нелокальная версия	12
1.3 Вариационные уравнения	14
1.3.1 Редуцирующая схема Пуанкаре	14
1.3.2 Выпуклые функционалы и приближения Галеркина-Ритца	18
1.4 Уравнения с параметрами. Задача о бифуркации экстремалей	19
1.5 Общий взгляд на конечномерную редукцию в вариационной задаче	21
1.6 Локальная вариационная схема Ляпунова-Шмидта	22
1.7 Приближенное вычисление ключевой функции	25
1.8 Редукция Ляпунова-Шмидта как обобщенная ритцевская аппроксимация	27
1.9 Нелокальная вариационная версия метода Ляпунова-Шмидта	27
2 Модельные краевые задачи	29
2.1 Натуральные механические системы	29
2.2 Вариационные задачи для ДУ четвертого порядка	32
2.2.1 Уравнения Фусса-Винклера-Циммермана и Свифта-Хоенберга	32
2.2.2 Трассирование спусков вдоль траекторий уравнения Свифта-Хоенберга в точки минимума энергии . . .	36
2.3 Фазовые переходы в сегнетоэлектрических кристаллах	39

2.4	Дополнительные замечания об исследовании фазовых состояний кристаллов	41
2.5	Уравнение Кармана	47
2.5.1	Случай круглой пластины	47
2.5.2	Функционал энергии круглой упругой пластины и его усечения	48
2.5.3	Построение приближений к ключевой функции от двух переменных	52
2.5.4	Пример итерационного алгоритма полиномиального приближения к ключевой функции для уравнения Кармана. Исходные данные	53
2.5.5	Операторное уравнение. Итерации	54
2.5.6	Функции Бесселя	54
2.5.7	Уравнение Кармана в случае прямоугольной пластины	55
2.6	Моделирование диффузорных течений жидкости	58
2.6.1	Двумерная жидкость, уравнения Навье-Стокса и Гельмгольца	59
2.6.2	Подстановка Гамеля и редукция к ОДУ	60
2.6.3	Вариационный подход к анализу уравнения Джеффри-Гамеля. Случай нулевого значения числа Рейнольдса	63
2.6.4	Случай ненулевого значения числа Рейнольдса. Нелокальная редукция Ляпунова-Шмидта	64
2.6.5	Области редуцируемости модельного уравнения	67
2.6.6	Примеры эпюр скоростей стационарных течений, соответствующих экстремалам V	68
2.7	Типичные нормальные формы ключевых функции в постбифуркационном анализе упругих систем	69
	Список литературы	75

Введение.

Как известно, математической моделью называют *комплекс математических представлений*, дающий информацию о том или ином реальном предмете или явлении. Весьма распространенный вариант модели — комплекс математических представлений, сгруппированный вокруг краевой задачи для ДУ, поэтому само ДУ часто и называют математической моделью. Построение и исследование модели позволяет получать сведения о реальном явлении, а сам процесс построения и изучения математических моделей называется при этом *математическим моделированием*. Связь модели с реальностью осуществляется посредством гипотез, идеализаций и упрощений. Таким образом, метод математического моделирования состоит в замене реального предмета исследования идеализированным объектом — математической моделью с последующим изучением этого объекта.

Модельные уравнения в данном пособии связаны с теорией упругого равновесия, теорией фазовых переходов в кристаллах и гидродинамикой. В их анализе использованы методы теории краевых задач для нелинейных дифференциальных уравнений, обыкновенных и с частными производными. Эти краевые задачи допускают представление в виде абстрактного фредгольмова операторного уравнения [66], [18], [51]-[52]. Исследование таких уравнений проводится через редукцию фредгольмова уравнения к конечномерному уравнению. Локальная конечномерная редукция впервые была предложена Ляпуновым (1916 г.) и Шмидтом (1918 г.). Идея нелокальной конечномерной редукции фредгольмова уравнения была предложена Р. Каччиополли (1932 г.) и использована им при построении теории топологической степени фредгольмова отображения. Варианты развития нелокального анализа фредгольмовых уравнений предлагались также в работах А.С. Шварца (1964 г.), С. Смейла (1965 г.), М.А. Красносельского, П.П. Забрейко (1969), К.D. Elworthy, A.J. Tromba (1970), Ю.Г. Борисовича, В.Г. Звягина, Ю.И. Сапронова (1970-77 гг.) и др. Идея глобального сведения анализа бесконечномерного фредгольмова уравнения к анализу конечномерного уравнения была предельно точно сформулирована и строго обоснована в монографии М.А. Красносельского и П.П. Забрейко «Геометрические методы нелинейного анализа» [66]. Позже, после появления современных быстродействующих компьютеров и мощных программных комплексов начали появляться и работы по развитию и применению численных методов нелокального бифуркационного анализа [70]-[71], [13]-[15], [59]-[61].

Глава 1

Фредгольмовы уравнения

1.1 Общие сведения

Большинство нелинейных задач математической физики допускают трактовку в виде операторного уравнения

$$f(x) = b, \quad x \in E, \quad b \in F,$$

в котором f — *гладкое фредгольмово отображение* некоторого банахова пространства E в некоторое банахово пространство F (см. [18], [46], [51]–[52], [83]).

Решение такой задачи можно осуществить перейдя к конечномерному уравнению

$$\theta(\xi) = \beta, \quad \xi \in M, \quad \beta \in N,$$

где M, N — конечномерные многообразия [18], [46], [51], [66], [83].

Определение 1.1. Пусть E, F — банаховы пространства и $A : E \rightarrow F$ — линейный непрерывный оператор. Оператор A называется фредгольмовым, если

$$\dim \operatorname{Ker} A < \infty, \quad \dim(\operatorname{Coker} A) := \dim(F/\operatorname{Im} A) < \infty.$$

Число

$$\dim(\operatorname{Ker} A) - \dim(\operatorname{Coker} A)$$

называется индексом фредгольмова оператора A и обозначается $\operatorname{ind} A$.

Из определения следует, что образ $\operatorname{Im} A$ замкнут в F , и A изоморфно отображает любое подпространство, прячмо дополняющее $\operatorname{Ker} A$ (в E), на $\operatorname{Im} A$. Если $L_1 : E_1 \rightarrow E_2$, $L_2 : E_2 \rightarrow E_3$ — фредгольмовы операторы, то и оператор $L_2 L_1$ фредгольмов. При этом $\operatorname{ind}(L_2 L_1) = \operatorname{ind}(L_1) + \operatorname{ind}(L_2)$.

Определение 1.2. Гладкое нелинейное отображение $f : \mathcal{U} \rightarrow F$, где $\mathcal{U}$ — открытое подмножество в E , называется *фредгольмовым*, если его производная Фреше $\frac{\partial f}{\partial x}(x)$ является *фредгольмовым оператором* в каждой точке $x \in \mathcal{U}$.

Индексом нелинейного фредгольмова отображения f , определенного на связной области, называется индекс линейного оператора $\frac{\partial f}{\partial x}(x)$:

$$\text{ind } f := \text{ind } \frac{\partial f}{\partial x}(x)$$

(если область связная, то индекс $\frac{\partial f}{\partial x}(x)$ не зависит от x).

В данном руководстве всюду предполагается, что $f : \Omega \rightarrow F$ — нелинейное фредгольмово отображение и $\text{ind } f = 0$. При этом уравнение

$$f(x) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (1.1)$$

называется *фредгольмовым*.

Если для гладкого отображения $f : \Omega \rightarrow F$ существует такой гладкий функционал $V : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$, что $f = \text{grad}_{\mathcal{H}} V$ или, эквивалентно,

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x) h = \langle f(x), h \rangle_{\mathcal{H}}, \quad \forall x \in \Omega, \quad h \in E$$

($\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}}$ — скалярное произведение в заранее заданном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$), то отображение f называется *потенциальным* (предполагается, что E непрерывно вложено в F , F непрерывно вложено в $\mathcal{H}$ и E плотно в $\mathcal{H}$). Функционал V при этом называется *потенциалом* отображения f , а уравнение (1.1) также называется *потенциальным*.

Если V — потенциал f на Ω , то уравнение

$$\text{grad}_{\mathcal{H}} V(x) = 0 \quad x \in \Omega, \quad (1.2)$$

называется уравнением Эйлера экстремалей (критических точек) функционала V . Точка $a \in \Omega$ называется *критической* для функционала V , если

$$\frac{\partial V}{\partial x}(a) h = \langle f(a), h \rangle_{\mathcal{H}} = 0 \quad \forall h \in E.$$

Условие плотности E в $\mathcal{H}$ обеспечивает равносильность последнего равенства уравнению (1.2).

Таким образом, множество решений уравнения (1.2) и множество критических точек функционала V совпадают.

Построение решений уравнения (1.2) можно заменить построением критических точек функционала V (такой подход называется *вариационным методом*).

Функционал V называется *фредгольмовым*, если его градиент — фредгольмово отображение.

1.2 Конечномерные редукции

Фредгольмовы отображения ввел в современную математику Р. Каччиополи (см. [101]–[102], [18] и библиографию в этих источниках). Ниже изложен подход, находящийся на стыке теорий Каччиополи и Лере-Шаудера.

1.2.1 LS –приводимые отображения

Из теоремы о неявной функции и леммы Шмидта [28] вытекает следующее утверждение: *для каждого фредгольмова отображения $f : \Omega \rightarrow F$ нулевого индекса и для каждой точки $a \in \Omega$ можно подобрать такое отображение $k : \mathcal{O}(a) \rightarrow F$ со значениями в конечномерном подпространстве $\mathcal{O}(a)$ — некоторая открытая окрестность точки a в Ω), что отображение $\varphi = f + k$ диффеоморфно отображает $\mathcal{O}(a)$ на некоторое открытое подмножество U в F* . Из этого утверждения вытекает, что каждое фредгольмово отображение диффеоморфной заменой аргумента локально приводится к виду

$$\tilde{f} = f \cdot \varphi^{-1} = I + \tilde{k}, \quad (1.3)$$

где $\tilde{k} = -k \cdot \varphi^{-1}$ — отображение со значениями в конечномерном подпространстве. Отображение вида $I + \tilde{k}$ называется отображением в форме Лере-Шаудера или, более кратко, LS –отображением. Диффеоморфизм φ называется LS –приводящим для f на $\mathcal{O}(a)$ [18].

В [18] сформулировано условие LS –приводимости фредгольмова отображения в окрестности компактного подмногообразия $\mathcal{X} \subset \Omega$.¹

1.2.2 Редукция Каччиополи

Существует вариант определения топологической степени фредгольмова отображения, основанный на редуцирующей схеме Р. Каччиополли [18]. В локальном случае схему Каччиополли можно представить как разновидность схемы Ляпунова-Шмидта.

Теорема 1.1. *Пусть $f : \Omega \rightarrow F$ — фредгольмово отображение и пусть K — компакт в E . Тогда найдутся такие окрестность $\mathcal{O}$ компакта K и прямое разложение $F = F_1 \dot{+} L$, $\dim L < \infty$, что отображение $P \cdot f : \mathcal{O} \rightarrow F_1$, где $P : F \rightarrow F_1$ — проекция (параллельно L), является субмерсией в точках $\mathcal{O}$.*

¹Вопрос об описании условий LS –приводимости фредгольмова отображения в окрестности компактного подмножества был поставлен М.А.Красносельским (1969 г.) в связи с построением теории топологической степени для нелинейных операторов общего вида.

Итак, исследование фредгольмова уравнения можно проводить по схеме Каччиополи — через редукцию к конечномерному уравнению [18]

$$\theta(\xi) = 0, \quad \xi \in M,$$

в котором $\theta = P \cdot f|_M$, а M — гладкое n -мерное (редуцирующее) подмногообразие в $\mathcal{O}$ и P — проектор на конечномерное подпространство в F . В этой схеме предполагается, что f на $\mathcal{O}$ трансверсально $\text{Im } P$ и $M = f^{-1}(\text{Im } P)$.

Схема Каччиополи и ее обобщения позволяют исследовать ветви бифурцирующих решений уравнений с параметрами, включая случаи разрушений непрерывных симметрий.

1.2.3 Метод Ляпунова — Шмидта (локальная схема)

Конкретные задачи математической физики требуют не только доказательства возможности конечномерного редуцирования, но и конструктивной реализации редуцирующей схемы.

Описываемая ниже конструкция имеет алгоритмический характер и широко используется в приложениях под общим названием «метод Ляпунова-Шмидта».

Пусть E, F — вещественные банаховы пространства, $f : E \longrightarrow F$ — нелинейное фредгольмово отображение, $\text{ind } f = 0$. Пусть, далее, зафиксированы прямые разложения

$$E = E^n \dot{+} E^{\infty-n}, \quad F = F^n \dot{+} F^{\infty-n},$$

где E^n и F^n — n -мерные попространства в E и F соответственно, а $E^{\infty-n}$ и $F^{\infty-n}$ — произвольные прямые дополнения к E^n и F^n в E и F .

Если $e_1, e_2, \dots, e_n$ — базис E^n , то для каждого вектора $x \in E$ имеет место разложение

$$x = u + v, \quad u = \sum_{i=1}^n \xi_i e_i, \quad v \in E^{\infty-n}.$$

Если $e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*$ — базис F^n , то

$$f(x) = f^n(x) + f^{(\infty-n)}(x),$$

$$f^n(x) = \sum_{j=1}^n \nu_j(x) e_j^*, \quad f^{(\infty-n)}(x) \in F^{\infty-n}.$$

Предположив, что производная

$$\frac{\partial f^{(\infty-n)}}{\partial v}(a) : E^n \longrightarrow F^n$$

является изоморфизмом в некоторой точке $a \in E$, $f(a) = 0$, получим, в силу теоремы о неявном отображении, зависимость $v = \Phi(u)$ (для u из достаточно малой окрестности $\mathcal{O} \subset E^n$ точки $\bar{u}$), такую, что $\Phi(\bar{u}) = \bar{v}$ ($\bar{u}, \bar{v}$ — компоненты a) и

$$f^{(\infty-n)}(u + \Phi(u)) = 0 \quad \forall u \in \mathcal{O} \quad (1.4)$$

(отображение $\Phi : \mathcal{O} \longrightarrow E^{\infty-n}$ при этом является гладким). Для отыскания решений уравнения $f(x) = 0$ в окрестности точки $x = a$ достаточно найти решения уравнения

$$f^{(n)}(u + \Phi(u)) = 0. \quad (1.5)$$

Определение 1.3. *Отображение $\tau : E^n \longrightarrow F^n$, где*

$$\tau(u) = f^{(n)}(u + \Phi(u)),$$

называется ключевым.

Уравнение (1.5) эквивалентно уравнению

$$\theta(\xi) = 0, \quad (1.6)$$

$$\theta(\xi) = (\theta_1(\xi), \dots, \theta_n(\xi))^\top,$$

где

$$\theta_k(\xi) = \nu_k \left(\sum_{i=1}^n \xi_i e_i + \Phi \left(\sum_{i=1}^n \xi_i e_i \right) \right).$$

Замечание 1.1. *Уравнение (1.5) называется уравнением разветвления, а также ключевым или бифуркационным. Аналогичные названия используются и для уравнения (1.6).*

Замечание 1.2. *Выбор разложений $E = E^n \dot{+} E^{\infty-n}$, $F = F^n \dot{+} F^{\infty-n}$ и базисов $\{e_j\}$, $\{e_k^*\}$ в E^n и F^n однозначно определяет аналитическую форму уравнения (1.6). Каждый набор таких разложений и базисов (в соответствующих конечномерных компонентах) называется редуцирующей схемой.*

Пусть $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство, $E \subset F \subset \mathcal{H}$ — последовательность трех непрерывно вложенных пространств и пусть $E^n = \text{Ker } \frac{\partial f}{\partial x}(a)$. В качестве $E^{\infty-n}$ можно рассмотреть ортогональное дополнение к E^n в E . При этом

$$\xi_i = \langle x, e_i \rangle, \quad i = 1, \dots, n$$

($\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в $\mathcal{H}$), где $e_1, \dots, e_n$ — ортонормированный базис в E^n ; F^n — ортогональное дополнение к $F^{\infty-n} = \text{Im } \frac{\partial f}{\partial x}(a)$ в F , а $\nu_j = \langle f(x), e_j^* \rangle$, $j = 1, \dots, n$, где $e_1^*, \dots, e_n^*$ — ортонормированный базис в F^n . Обозначим

$$\varphi(\xi) := \sum_{j=1}^n \xi_j e_j + \Phi \left(\sum_{i=1}^n \xi_i e_i \right).$$

Тогда

$$\theta(\xi) = \tilde{P} \cdot f(\varphi(\xi)), \quad (1.7)$$

где

$$\tilde{P}(y) = (\langle y, e_1^* \rangle, \dots, \langle y, e_n^* \rangle)^\top$$

Отображение $\varphi(\xi)$ определено на некоторой окрестности $O \subset \mathbf{R}^n$ точки $\bar{\xi}$ с координатами $\bar{\xi}_j$, $\bar{\xi}_j = \langle a, e_j \rangle$.

Теорема 1.2. *Точка a является решением уравнения $f(x) = 0$ тогда и только тогда, когда $a = \varphi(\bar{\xi})$ и точка $\bar{\xi}$ является решением уравнения $\theta(\xi) = 0$. При этом $\dim \text{Ker } \frac{\partial f}{\partial x}(a) = \dim \text{Ker } \frac{\partial \theta}{\partial \xi}(\bar{\xi})$*

Доказательство теоремы становится очевидным, если воспользоваться существованием LS —приводящего (локально) диффеоморфизма ψ :

$$\tilde{f}(\tilde{u} + \tilde{v}) := f \cdot \psi^{-1}(\tilde{u} + \tilde{v}) = h(\tilde{u}, \tilde{v}) + \tilde{v}, \quad \tilde{u} \in \mathbf{R}^n.$$

Ясно, что ключевое отображение $\theta(\xi)$ гладко V —эквивалентно отображению $\tilde{\theta}(\tilde{u}) := h(\tilde{u}, 0)$. Из представления

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{x}} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{v}} & \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{u}} \end{pmatrix}$$

моментально получаем равенство

$$\text{Ker } \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{x}}(\tilde{x}) = \text{Ker } \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{v}}(\tilde{x}),$$

из которого вытекает второе утверждение теоремы.

1.2.4 Нелокальная версия

Локальная схема Ляпунова–Шмидта весьма эффективно работает в теории бифуркаций решений нелинейных уравнений. Существенно меньше результатов по нелокальным бифуркационным проблемам. Это связано с тем, что применяемые в локальном случае асимптотические методы перестают работать при нелокальном рассмотрении вопросов (на конечных областях и при конечных закритических приращениях параметров). В последние годы, в связи с бурным развитием новых вычислительных компьютерных технологий, появилась возможность эффективного нелокального анализа, основанного на нелокальной конечномерной редукции.

В основе дальнейших построений находится теорема Банаха – Мазура – Каччиополи, представляющая собой критерий глобально диффеоморфного действия отображения.

Пусть, как и ранее, отображение банаховых пространств

$$f : E \longrightarrow F \quad (1.8)$$

является гладким и фредгольмовым индекса нуль.

Теорема 1.3. (Банах, Мазур, Каччиополи) *Гладкое отображение (1.8) тогда и только тогда является диффеоморфизмом, когда выполняются следующие два условия:*

- 1) *производная фреше $\frac{\partial f}{\partial x}(a)$ в каждой точке $a \in E$ действует изоморфно из E на F ,*
- 2) *отображение (1.8) является собственным (прообраз компакта компактен).*

Доказательство имеется в [18]. Самое короткое доказательство основано на замечании о том, что объединение условий локальной диффеоморфности и собственности приводит к тому, что f оказывается накрывающим отображением. Так как накрытие над односвязной базой всегда однократно, то это и означает диффеоморфность действия.

Пусть, далее,

$$E = E^n \dot{+} E^{\infty-n}, \quad F = F^n \dot{+} F^{\infty-n} \quad (1.9)$$

— редуцирующие разложения рассматриваемых банаховых пространств в прямые суммы подпространств и

$$f(x) = f^{(n)}(u + v) + f^{\infty-n}(u + v) \quad (1.10)$$

— соответствующее разложение f ,

$$u \in E^n, \quad v \in E^{\infty-n}, \quad f^{(n)}(u + v) \in F^n, \quad f^{\infty-n}(u + v) \in F^{\infty-n}.$$

С каждым $u \in E^n$ свяжем отображение

$$f_u^{\infty-n} : E^{\infty-n} \longrightarrow F^{\infty-n}, \quad f_u^{\infty-n}(v) := f^{\infty-n}(u + v). \quad (1.11)$$

Теорема 1.4. Пусть для каждого $u \in E^n$ отображение (1.11) является собственным и при этом

$$\frac{\partial f_u^{\infty-n}}{\partial v}(a) : E^{\infty-n} \longrightarrow F^{\infty-n}$$

является изоморфизмом для каждого $u \in E^n$, $a \in E^{\infty-n}$. Тогда найдется такое гладкое отображение

$$\Phi : E^n \longrightarrow E^{\infty-n},$$

что точка a окажется решением уравнения

$$f(x) = 0$$

лишь в том и только том случае, в котором выполняется соотношение

$$a = \bar{u} + \Phi(\bar{u}),$$

где $\bar{u}$ — решение глобального уравнения разветвления

$$\tau(u) = 0, \quad (1.12)$$

в котором $\tau(u) := f^{(n)}(u + \Phi(u))$. При этом локальные кольца особенностей² отображений f и θ в точках u и $a = u + \Phi(u)$, соответственно, изоморфны.

Доказательство. Собственность и локальная диффеоморфность отображения $f_u^{\infty-n}$ приводит к диффеоморфности действия этого отображения из $E^{\infty-n}$ на $F^{\infty-n}$ (по теореме (1.3.)). Следовательно, для каждого $u \in E^n$ найдется единственная точка $v = \Phi(u) \in E^{\infty-n}$, для которой $f^{\infty-n}(u + \Phi(u)) = 0$. Гладкость отображения $\Phi(u)$ следует из теоремы о неявной функции. Следовательно, уравнение (1.8), которое можно записать в виде системы двух уравнений

$$\left. \begin{aligned} f^{\infty-n}(u + v) &= 0, \\ f^{(n)}(u + v) &= 0, \end{aligned} \right\}$$

сводится к уравнению (1.4.).

Доказательство изоморфности локальных колец проводится стандартными приемами, разработанными в конечномерной теории особенностей гладких отображений [5], [19] и легко переносящимися на бесконечномерные банаховы многообразия для класса фредгольмовых отображений.

²Локальное кольцо особенности гладкого отображения f в точке $a \in E$ определяется как фактор кольца ростков гладких функционалов в точке a по идеалу, порожденному функционалами вида $\alpha(f(x))$, где α — произвольный гладкий функционал, заданный на произвольной окрестности точки $b = f(a)$ в пространстве F .

1.3 Вариационные уравнения

1.3.1 Редуцирующая схема Пуанкаре

Схема Пуанкаре была создана для конечномерных вариационных задач с целью понижения их размерности [86].

Пусть задана гладкая экстремальная задача

$$V(x) \longrightarrow \inf, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (1.13)$$

для которой выполнено условие *коэрцитивности*

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = +\infty, \quad (1.14)$$

так что задача (1.13) разрешима. Если функция V является выпуклой

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(a)(h, h) > 0 \quad \forall (a, h) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \setminus 0), \quad (1.15)$$

то решение этой задачи, как легко видеть, является единственным. В противном случае задача становится многоэкстремальной, поэтому приходится исследовать функцию в ситуации существования нескольких точек локальных минимумов, что существенно затрудняет анализ функции и приближенное построение экстремалей. Наличие «управляющих» параметров, изменение которых приводит к бифуркационным явлениям, еще более усложняет задачу поиска и изучения экстремалей. А. Пуанкаре предложил процедуру, позволяющую во многих случаях облегчить изучение ветвления экстремалей за счет исключения «несущественных» переменных.

Пусть выполнено условие выпуклости V по части переменных:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(a)(h, h) > 0 \quad \forall (a, h) \in \mathbb{R}^n \times (L \setminus 0), \quad (1.16)$$

где L — подпространство в $\mathbb{R}^n$ размерности l . Тогда вместо (1.13) можно рассмотреть аналогичную задачу с меньшим числом переменных

$$W(\xi) \longrightarrow \inf, \quad \xi \in M, \quad (1.17)$$

где M — ортогональное дополнение к L в $\mathbb{R}^n$ (в стандартно скалярном произведении $(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$), а W — функция, определенная соотношением

$$W(\xi) = \inf_{h \in L} V(\xi + h). \quad (1.18)$$

Теорема 1.5. *Если выполнены условия (1.14) и (1.16), то функция (1.18) является гладкой.*

Доказательство. Из коэрцитивности функции V следует существование в слое $\xi + L$ ($\forall \xi \in M$) точки глобального условного минимума $\xi + h(\xi)$, где $h(\xi)$ определяется из системы уравнений

$$\frac{\partial V}{\partial h_j}(\xi + h) = 0, \quad j = 1, \dots, l \quad (1.19)$$

($h_1, \dots, h_l$ — координаты вектора h относительно произвольно фиксированного базиса в L). Условие (1.16) гарантирует единственность решения при любом ξ и его гладкую зависимость от ξ (по теореме о неявной функции: якобиан левой части (1.19) по переменным $h_1, \dots, h_l$ невырожден вследствие (1.16)). Следовательно, функция $W(\xi) = V(\xi + h(\xi))$ является гладкой.

Замечание 1.3. *Строго говоря, А. Пуанкаре определял функцию W не формулой (1.18), а системой уравнений (1.19). Функция W при этом определялась лишь локально (условия (1.14) не было) и предназначалась для (локального) исследования бифуркации экстремалей [86]. Смысл перехода от (1.13) к (1.17) состоял в замене «многомерной» задачи на «маломерную», как более доступную.*

Функция (1.18), полученная при условиях (1.14) и (1.16), называется *ключевой*. Координаты ξ_j , $j = 1, \dots, t = n - l$, вектора $\xi \in M$ относительно произвольного фиксированного базиса $\{f_1, \dots, f_m\}$ в M также называются *ключевыми*. Отображение $\varphi : \xi \rightarrow \xi + h(\xi)$, где $h(\xi)$ определено системой уравнений (1.19), называется *редуцирующим* или *маргинальным*³.

Теорема 1.6. *Маргинальное отображение задает взаимно однозначное соответствие между множествами критических точек функции V и ее ключевой функции W . При этом соответствию невырожденные критические точки переходят в невырожденные и только невырожденные критические точки (с сохранением значений индексов Морса). А соответствующие друг другу вырожденные критические точки имеют изоморфные локальные кольца особенностей.*

Доказательство становится очевидным после применения обобщенной леммы Морса (леммы о расщеплении особенности).

³ Термин «маргинальное отображение» заимствован из теории приближений функций, в которой он используется в аналогичном контексте

Определение 1.4. *Переход от задачи (1.13) к задаче (1.17), где W — ключевая функция функции V , называется редукцией по схеме Пуанкаре или, более кратко, редукцией Пуанкаре.*

Подход А.М. Ляпунова и Э. Шмидта получили дальнейшее развитие в многочисленных работах других математиков, что впоследствии привело к созданию обширной теории ветвления решений нелинейных уравнений [28], [65]. В этой теории произошел отрыв от вариационных корней метода конечномерных редукций. Возврат к вариационным задачам в рамках общей теории ветвления произошел лишь в 70-тые годы прошедшего столетия (см. [64], [109]–[110], [49]).

Следует отметить, что развитие упомянутых подходов происходило, в основном, на уровне локальных задач — в виде схем построения так называемых малых решений, зависящих от малых параметров. Потребность в условиях типа собственности градиентного отображения при этом не возникала. В некоторых работах для построения нелокальных редукций вместо условия собственности отображения использовались более частные условия, приводящие к возможности применения принципа сжатых отображений.

В дальнейшем предполагается, что $f : E \rightarrow F$, E, F — банаховы пространства, является потенциальным фредгольмовым отображением нулевого индекса (с потенциалом V), и наряду с этим выполнены условия:

- а) $E \subset F \subset H$ — тройка непрерывно вложенных пространств, H — гильбертово пространство.
- б) E плотно в H (любой элемент из H может быть представлен как предел последовательности элементов из E).

Из плотности E в H следует, что F также плотно в H . Плотности E в H обеспечивает равносильность равенства $\frac{\partial V}{\partial x}(x) = 0$ уравнению Эйлера $f(x) = 0$.

Свойство собственности отображения является весьма эффективным средством проверки нелокальной редуцируемости уравнения. Впервые оно было использовано (как условие глобальной редуцируемости) в работе [88]), в которой сформулировано следующее утверждение.

Теорема 1.7. *Пусть градиентное отображение $f : E \rightarrow F$ является собственным и пусть при этом выполняется условие положительности (выпуклости) его потенциала V на подпространстве L в E , являющемся ортогональным дополнением к $N = \text{Lin}(e_1 \dots e_n)$ ($L = E \cap N^\perp$). Тогда маргинальное отображение $\varphi : \xi \mapsto \sum_{j=1}^n \xi_j e_j + h(\xi)$, где $h(\xi)$ опре-*

делено уравнением $f\left(\sum_{j=1}^n \xi_j e_j + h\right) = 0$, $h \in L$, устанавливает взаимно однозначное соответствие между критическими точками ключевой функции

$$W(\xi) := \inf_{h \in L} V\left(\sum_{j=1}^n \xi_j e_j + h\right) = V\left(\sum_{j=1}^n \xi_j e_j + h(\xi)\right),$$

и функционала V . При этом локальные кольца особенностей⁴ соответствующих функций в точках ξ и $\varphi(\xi)$ изоморфны. В соответствующих друг другу однократных критических точках имеет место совпадение индексов Морса⁵.

Доказательство проводится стандартными приемами, разработанными в конечномерной теории особенностей гладких функций [5], [19] и легко распространяющимися на фредгольмовы отображения бесконечномерных банаховых многообразий и фредгольмовы функционалы.

Определение 1.5. Критическая точка a функции $W : \mathcal{U} \subset R^n \rightarrow R$ называется невырожденной (морсовской), если

$$\det\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}(a)\right) \neq 0.$$

Определение 1.6. Пусть $V : E \rightarrow R$ — гладкий фредгольмов функционал, E — банахово пространство. Критическая точка a функционала V называется невырожденной (морсовской), если

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a)h \neq 0 \quad , \quad \forall h \in E \setminus \{0\}.$$

Лемма 1.1. (Конечномерная лемма Морса, [84]) Пусть a — невырожденная критическая точка гладкой функции $W : R^n \rightarrow R$. Тогда в некоторой окрестности $\mathcal{U} \subset R^n$ точки a можно указать такую локальную систему координат $x_1, x_2, \dots, x_n$, удовлетворяющую условию $x_i(a) = 0 \quad \forall i$, что

$$W(x) = W(a) - \sum_{k=1}^q x_k^2 + \sum_{k=q+1}^n x_k^2 \text{ на } \mathcal{U}.$$

⁴Локальное кольцо особенности гладкого функционала V в критической точке a определяется как фактор кольца ростков гладких функционалов в точке a по идеалу, порожденному функционалами вида $\alpha(f(x))$, где a — произвольный гладкий функционал, заданный на произвольной окрестности нуля в пространстве F ($f = \text{grad}_H V$).

⁵Индекс Морса в бесконечномерном случае определяется как максимальная размерность подпространства, на котором отрицательно определен второй дифференциал.

Число q называется индексом Морса критической точки.

Лемма 1.2. (Бесконечномерная лемма Морса, [99]) Пусть задан фредгольмов функционал V с градиентной реализацией в тройке пространств $\{E, F, H\}$, и $x_o \in E$ — невырожденная критическая точка V . Тогда существует диффеоморфизм $\varphi : (\mathcal{U}, x_o) \rightarrow (\mathcal{O}, 0)$, где $\mathcal{U}$ и $\mathcal{O}$ — окрестности, соответственно, точки x_o и нуля в E , такой, что

$$V(x) = V(x_o) + \frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}(x_o)y, y \right\rangle, \quad y = \varphi(x), \quad x \in \mathcal{U}, \quad f = \text{grad } V$$

($\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в H).

Индексом Морса невырожденной критической точки a функционала V называется максимальная размерность подпространства, на котором отрицательно определен второй дифференциал $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(a)(h, h)$.

1.3.2 Выпуклые функционалы и приближения Галеркина-Ритца

В соответствии с известной теорема Эберлейна-Шмульяна [54], непрерывный строго выпуклый функционал V на гильбертовом пространстве H , рассмотренный на ограниченном замкнутом выпуклом подмножестве $K \subset H$, имеет точку минимума (автоматически единственную). Очевидно, что вместо условия ограниченности K можно потребовать выполнение условия коэрцитивности функционала:

$$V(x) \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad \|x\| \rightarrow \infty,$$

также влекущее существование единственной точки минимума.

В конкретных прикладных задачах поиск приближений к точке минимума часто осуществляется на основе методов Галеркина и Ритца [65], [81], [74], [36].

С точки зрения функционального анализа поиск решений многих вариационных краевых задач сводится к построению точек минимума выпуклого функционала на гильбертовом пространстве H , заданного в виде

$$V(x) = \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle + \omega(x), \tag{1.20}$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в гильбертовом пространстве H_0 , в которое H вложено непрерывно, компактно и всюду плотно. При этом A — положительный симметричный (в $\langle \cdot, \cdot \rangle$) изоморфизм из H на H_0 , а $\omega(x)$ — гладкий функционал, градиент которого $g(x) := \text{grad } \omega(x)$ (в $\langle \cdot, \cdot \rangle$) является вполне непрерывным отображением из H в H_0 . Если предположить,

что функционал (1.20) гладко продолжается на энергетическое пространство H_1 , полученное замыканием H в норме (см. [81])

$$|x|_1 := \sqrt{\langle Ax, x \rangle},$$

то функционал (1.20) можно записать в виде

$$\frac{1}{2}\langle x, x \rangle_1 + \tilde{\omega}(x), \quad \langle x, y \rangle_1 := \langle Ax, y \rangle, \quad (1.21)$$

где $\tilde{\omega}$ — гладкое продолжение на H_1 функционала ω . При этом будем иметь следующее представление для градиента в H_1 :

$$\text{grad}_{H_1} V(x) = x + \tilde{g}(x), \quad \tilde{g}(x) = A^{-1}g(x). \quad (1.22)$$

Таким образом, градиент продолжения функционала в энергетическое пространство, является отображением в форме Лере-Шаудера.

Если задать последовательность конечномерных ортопроекторов $\{P_n\}$ в H_1 , сильно сходящуюся к I (тождественному отображению), то, очевидно, последовательность отображений $x + P_n\tilde{g}(x)$ будет равномерно сходиться к $x + \tilde{g}(x)$ на любой ограниченной области в H_1 , что влечет сходимости решений уравнений

$$x + P_n\tilde{g}(x) = 0, \quad x \in H_1,$$

к точке минимума функционала V . Так как любое решение последнего уравнения принадлежит $E_n := \text{Im } P_n$, то поиск его решений сводится к поиску решений галеркинской аппроксимации этого уравнения:

$$u + P_n\tilde{g}(u) = 0, \quad u \in E_n. \quad (1.23)$$

Левая часть уравнения (1.23) является градиентом функции

$$W_R(u) := V(u), \quad u \in E_n$$

и называется *ритцевской аппроксимацией исходного функционала*.

Приближенное вычисление точек минимума функционала V можно осуществлять, комбинируя переход к ритцевской аппроксимации W_R с методом кратчайшего спуска для W_R .

1.4 Уравнения с параметрами. Задача о бифуркации экстремалей

Важным типом уравнений, часто встречающимся в задачах математического моделирования, является фредгольмово уравнение с параметром:

$$f(x, \lambda) = b, \quad x \in E, \quad b \in F, \quad \lambda \in \mathbb{R}^k.$$

То есть f включено в $f(x, \lambda) : U \times R^k \rightarrow F$, $f(x, 0) = f(x)$, — семейство гладких фредгольмовых отображений, гладко зависящее от векторного параметра $\lambda \in \mathbb{R}^m$. Если отображение $f(\cdot, \lambda)$ потенциально с потенциалом $V(\cdot, \lambda)$, то потенциал также гладко зависит от данного параметра. В такой ситуации естественным образом возникает понятие бифуркации экстремалей и, соответственно, бифуркационного значения параметра.

Определение 1.7. Пусть $\lambda = \lambda_0$ — такое значение параметра, при котором 0 является единственной критической точкой функционала $V(x, \lambda)$ в области $\Omega \subset E$. Значение λ_0 называется бифуркационным, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое λ_1 , $\|\lambda_1 - \lambda_0\| < \varepsilon$, при котором V имеет не менее двух критических точек a_1, a_2 таких, что $\max\{\|a_1 - a\|, \|a_2 - a\|\} < \varepsilon$.

В условиях данного определения говорят, что переход λ через (бифуркационное) значение λ_0 сопровождается рождением дополнительных экстремалей из нуля. Аналогичным образом определяется бифуркация в ненулевой точке области Ω .

Задача изучения ветвления экстремалей вблизи точки бифуркации широко известна под общим названием «задача о бифуркации экстремалей». Важнейшей составляющей этой задачи является вопрос геометрического строения каустики, соответствующей точке бифуркации.

Определение 1.8. Пусть задана фредгольмова C^r –развертка

$$f(\cdot, \delta) : E \rightarrow F, \quad \delta \in \Delta^m \subset \mathbb{R}^m.$$

Пусть Ω — открытое подмножество в E . Дискриминантным множеством $\Sigma(\Omega)$ уравнения

$$f(x, \delta) = 0 \quad x \in \Omega \tag{1.24}$$

называется совокупность тех значений $\lambda = \bar{\lambda}$, для которых уравнение (1.24) имеет в Ω вырожденное решение $\bar{x}$:

$$f(\bar{x}, \bar{\lambda}) = 0 \quad \text{codim} \left(\text{Im} \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{\lambda}) \right) > 0.$$

Определение 1.9. Пусть $\tilde{\Sigma}(\Omega)_{\bar{\lambda}}$ — росток множества $\Sigma(\Omega)$ в точке $\bar{\lambda}$. Тогда пересечение

$$\Sigma(\bar{x}, \bar{\lambda}) = \bigcap_{\Omega: \bar{x} \in \Omega} \tilde{\Sigma}(\Omega)_{\bar{\lambda}}$$

называется дискриминантным множеством уравнения (1.24) в точке $(\bar{x}, \bar{\lambda})$.

Если (1.24) — вариационное уравнение ($f = \text{grad } V$), то $\Sigma(\bar{x}, \bar{\lambda})$ называется *каустикой* функционала V в точке $\bar{x}$.

1.5 Общий взгляд на конечномерную редукцию в вариационной задаче

Определение 1.10. Пусть V — гладкий функционал, заданный на области Ω банахова пространства E . Конечномерной редукцией V на открытом подмножестве $\Psi \subset \Omega$ называется тройка $\{p, \varphi, N\}$, удовлетворяющая следующим условиям:

- (1) Гладкое отображение $p : \Psi \rightarrow N$ (N — конечномерное многообразие) является субмерсией (то есть каждый дифференциал касательных пространств $\frac{\partial p}{\partial x}(a) : T_a(\Psi) \rightarrow T_\xi(N)$ является отображением "на").
- (2) $\forall \xi \in \mathcal{U} = p(\Psi)$ функционал $V_\xi = V|_{p^{-1}(\xi)}$ имеет единственную, причем невырожденную, критическую точку $\varphi(\xi)$ (что означает невырожденность второго дифференциала

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(V|_{p^{-1}(\xi)})(\varphi(\xi))(h, h),$$

- $h \in T_{\varphi(\xi)}(p^{-1}(\xi))$, как квадратичной формы на линейном пространстве).
- (3) Отображение $\varphi : \mathcal{U} \rightarrow \Psi$ является гладким.

Отображение p называется редуцирующей субмерсией. Размерностью редукции называется размерность образа редуцирующей субмерсии.

Определение 1.11. Функция $W : \mathcal{U} \rightarrow R$, определенная равенством

$$W(\xi) = V(\varphi(\xi)), \quad \xi \in \mathcal{U}, \quad (1.25)$$

называется *ключевой*, а отображение φ — *маргинальным*.

Определение 1.12. Если $\forall \xi \in N$ точка $\varphi(\xi)$ является точкой минимума функционала $V_{p^{-1}(\xi)}$, то редукция называется *эллиптической*.

В случае эллиптической редукции ключевая функция определяется равенством

$$W(\xi) = \inf_{x:p(x)=\xi} V(x) = V(\varphi(\xi)). \quad (1.26)$$

Имеет место следующее фундаментальное утверждение [87]:

Утверждение 1.1 Пусть $\{p, \varphi, N\}$ — эллиптическая конечномерная редукция гладкого функционала V на области Ω гладкого банахова многообразия M . Тогда маргинальное отображение φ устанавливает взаимно однозначное соответствие между множествами критических точек ключевой функции W и функционала V . При этом соответствующие друг другу критические точки одновременно являются либо вырожденными, либо нет. В случае невырожденности соответствующие критические точки имеют одинаковые значения индексов Морса.

Все топологические и аналитические понятия, так или иначе характеризующие тип стационарной точки (кратность, локальное кольцо особенности, версальная деформация, бифуркационная диаграмма и т.п. [5], [85]), для функционалов можно вводить через ключевые функции.

1.6 Локальная вариационная схема Ляпунова-Шмидта

Вполне естественно, что формулирование условий единственности и невырожденности критической точки для $V_\xi = V|_{p^{-1}(\xi)}$ проще осуществить локально — в некоторой окрестности критической точки. Сделаем это на примере широко известной схемы конечномерной редукции — схемы Ляпунова-Шмидта.

Как и ранее, будем предполагаться, что задано потенциальное отображение $f : \mathcal{U} \rightarrow F$ (с потенциалом V), где $\mathcal{U}$ — область банахова пространства E (E, F — банаховы пространства), которое является фредгольмовым нулевого индекса, и наряду с этим выполнены «технические условия»: $E \subset F \subset H$ — тройка непрерывно вложенных пространств (H — гильбертово пространство); E плотно в H (из плотности E в H следует плотность F в H).

Будем предполагать также гладкую зависимость f от параметра $\lambda \in \mathbb{R}^m$ («по умолчанию»). Пусть, далее, $\mathcal{A}(\lambda) := \frac{\partial f}{\partial x}(0, \lambda)$ и $\dim N = n > 0$, где $N = \text{Ker } \mathcal{A}(\lambda_0)$.

Наложим также два *дополнительных условия* :

1) в N зафиксирован ортонормированный (в H) базис $\{e_j\}_{j=1}^n$, вместе с набором гладких (спектральных) функций $\{\alpha_j(\lambda)\}_{j=1}^n$, $\alpha_j(\lambda_0) = 0$, определенных на некоторой окрестности нуля $\mathcal{U}(0) \subset \mathbb{R}^m$, для которого выполнено соотношение

$$\mathcal{A}(\lambda) e_j = \alpha_j(\lambda) e_j \quad \forall j, \quad (Mod)$$

2) выполнено неравенство

$$\langle \mathcal{A}(\lambda) v, v \rangle > 0 \quad \forall v \in E \cap N^\perp, \quad v \neq 0. \quad (Pos)$$

Векторы $e_1, e_2, \dots, e_n$ называются *ведущими модами бифуркаций*.

Зафиксируем далее прямые разложения

$$E = N \dot{+} E^{\infty-n}, \quad F = N \dot{+} F^{\infty-n},$$

где $E^{\infty-n}$ и $F^{\infty-n}$ — прямые ортогональные дополнения к N в E и F .

Для каждого вектора $x \in E$ имеет место представление

$$x = u + v, \quad u = \sum_{j=1}^n \xi_j e_j, \quad v \in E^{\infty-n}, \quad \xi_j = \langle x, e_j \rangle,$$

а также представление

$$f(x, \lambda) = f^n(x, \lambda) + f^{\infty-n}(x, \lambda),$$

где

$$f^n(x, \lambda) = \sum_{i=1}^n f_i(x, \lambda) e_i, \quad f_i(x, \lambda) = \langle f(x, \lambda), e_i \rangle,$$

$$f^{\infty-n}(x, \lambda) := f(x, \lambda) - f^n(x, \lambda) \in F^{\infty-n}.$$

Таким образом, экстремали функционала $V(x, \lambda)$ близи нуля определяются системой двух уравнений

$$\left. \begin{aligned} f^n(u + v, \lambda) &= 0, \\ f^{\infty-n}(u + v, \lambda) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.27)$$

Так как производная

$$\frac{\partial f^{\infty-n}}{\partial v}(\cdot, \lambda) : E^{\infty-n} \rightarrow F^{\infty-n}$$

является изоморфизмом (в силу условия положительности (Pos)), то получим, по теореме о неявной функции, существование явной зависимости

$$v = \Phi(u, \lambda)$$

(в достаточно малой окрестности $\mathcal{O} \times \mathcal{U} \subset E^{\infty-n} \times \mathbb{R}^n$ нуля), для которой $\Phi(0, \lambda_0) = 0$ и

$$f^{\infty-n}(u + \Phi(u, \lambda), \lambda) = 0 \quad \forall u \in \mathcal{O}^n.$$

Здесь и ниже полагаем $\mathcal{O} = \mathcal{O}^n \times \mathcal{O}^{\infty-n}$.

Отображение $\Phi : \mathcal{O}^n \rightarrow E^{\infty-n}$ при этом является гладким.

Для отыскания решений уравнения $f(x, \delta) = 0$ в окрестности точки $x = a$ достаточно найти решения $u = u(\lambda)$ уравнения

$$f^n(u + \Phi(u, \lambda), \lambda) = 0. \quad (1.28)$$

Решение исходного уравнение задается «связывающей» формулой

$$x(\xi, \lambda) = u(\lambda)(\xi) + \Phi(u(\lambda)(\xi), \lambda). \quad (1.29)$$

Определение 1.13. *Отображение $\tau : \mathcal{O}^n \rightarrow F^n$, где*

$$\tau(u, \lambda) = f^n(u + \Phi(u, \lambda), \lambda),$$

называется ключевым.

При практическом применении уравнение (1.24) используется в координатной форме

$$\theta(\xi, \lambda) = 0. \quad (1.30)$$

где

$$\theta(\xi, \lambda) = (\theta_1(\xi, \lambda), \theta_2(\xi, \lambda), \dots, \theta_n(\xi, \lambda),), \quad \theta_k(\xi, \lambda) = \langle \tau(u(\xi), \lambda), e_k \rangle.$$

Теорема 1.8. *Справедливо следующее соотношение:*

$$\inf_{v: v \in \mathcal{O}^{\infty-n}} V(u + v) = V(u + \Phi(u, \lambda), \lambda). \quad (1.31)$$

Доказательство становится очевидным, если заметить, что вблизи нуля экстремали функционала $V(u + v)$ по v определяются вторым уравнением системы уравнений (1.27).

Отображение

$$\tau : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad \tau(u, \lambda) := f^n(u + \Phi(u, \lambda), \lambda),$$

называется *ключевым отображением*. Соответственно, уравнение

$$\tau(u, \lambda) = 0$$

называется *ключевым уравнением*.

Функция $W(u, \lambda) := V(u + \Phi(u, \lambda), \lambda)$ называется *ключевой функцией функционала $V(x, \lambda)$ вблизи нуля*.

Теорема 1.9. *Справедливо следующее соотношение:*

$$\text{grad } W(u, \lambda) = \tau(u, \lambda) \quad (1.32)$$

Доказательство осуществляется непосредственной проверкой.

Замечание 1.4. Для практических применений более удобна координатная форма ключевой функции

$$\widehat{W}(\xi, \lambda) := W(u(\xi) + \Phi(u(\xi), \lambda), \lambda) \quad (1.33)$$

1.7 Приближенное вычисление ключевой функции

Опишем одну практическую схему локальной редукции [87].

Функция $W(\xi, \lambda) = V\left(\sum_{j=1}^n \xi_j e_j(\lambda) + \Phi(\xi, \lambda), \lambda\right)$ при соответствующем выборе $\Phi(\xi, \lambda)$ является ключевой для функционала $V(x, \lambda)$, а ее градиент является ключевым отображением для уравнения $f(x, \lambda) = 0$.

Для получения приближенной ключевой функции W часто достаточно ограничиться несколькими членами разложения W в ряд Тейлора. Обоснование того, что отбрасывание «тейлоровского хвоста» не изменяет топологию бифуркационных диаграмм и структуру *bif*-раскладов, проводится на основе теорем о конечной определенности ростков отображений и их деформаций ([5]).

Рассмотрим тейлоровское разложение потенциала V до четвертого порядка:

$$V(x, \lambda) = \text{const} + \frac{1}{2} \langle A(\lambda)x, x \rangle_H + V_\lambda^{(3)}(x) + V_\lambda^{(4)}(x) + o(\|x\|^4),$$

где $A(\lambda) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, \lambda)$, $V_\lambda^{(3)}$ и $V_\lambda^{(4)}$ — однородные формы третьего и четвертого порядков на E . Пусть на H задан набор инволюций $\{J_k\}_{k=1}^n$ такой, что

- 1) $J_k(E) \subset E$, $J_k(F) \subset F$, $k = 1, \dots, n$,
- 2) $J_k(e_k(\lambda)) = -e_k(\lambda)$, $J_k(e_j(\lambda)) = e_j(\lambda)$, $k \neq j$.

Пусть потенциал $V(\cdot, \lambda)$ инвариантен относительно J_k :

$$V(J_k(x), \lambda) = V(x, \lambda), \quad k = 1, \dots, n, \quad \forall x, \lambda. \quad (1.34)$$

Тогда ключевая функция $W(\xi, \lambda)$ четна по каждой переменной ξ_j и, следовательно, её тейлоровское разложение имеет следующий вид:

$$W(\xi, \lambda) = \text{const} + W_\lambda^{(2)}(\xi) + W_\lambda^{(4)}(\xi) + o(|\xi|^5),$$

где $W_\lambda^{(2)}$ и $W_\lambda^{(4)}$ — формы второго и четвертого порядков, четные по ξ_j . Из (1.34) следует, что

$$W(\xi, \lambda) = \text{const} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \alpha_j(\lambda) \xi_j^2 + W_0^{(4)}(\xi) + o(|\xi|^5) + O(|\lambda|)o(|\xi|^3).$$

Так как $\alpha_j(0) = 0$, то

$$W(\xi, 0) = \text{const} + W_0^{(4)}(\xi) + o(|\xi|^5), \quad \xi \in \mathbb{R}^n$$

($W_0^{(4)}(\xi)$ — форма четвертого порядка). Легко проверить, что

$$W_0^{(4)}(\xi) = \frac{1}{2} \langle AB(u), B(u) \rangle_H + 3\mathcal{V}_0^{(3)}(u, u, B(u)) + V_0^{(4)}(u),$$

где $u = \sum_{j=1}^n \xi_j e_j$, $e_j = e_j(0)$, $A = A(0)$, $\mathcal{V}_0^{(3)}$ — симметричная 3-линейная форма, отвечающая $V_0^{(3)}$ ($V_0^{(3)}(u) = \mathcal{V}_0^{(3)}(u, u, u)$), B — квадратичное отображение $N_0 \rightarrow L_0^*$, полученное выделением квадратичной части отображения $u \rightarrow \Phi(\xi, 0)$. Нетрудно заметить, что

$$B(u) = -A_*^{-1} \text{grad}_{\mathcal{H}} V_0^{(3)}(u)$$

($A_* = A|_{L_0}$). Для четного потенциала V имеем $V_0^{(3)} = 0$, $B(u) = 0$, и, следовательно, $W_0^{(4)}(\xi) = V_0^{(4)}(u)$. Таким образом, для W получаем представление

$$\text{const} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \alpha_j(\lambda) \xi_j^2 + W_R^{(4)}(\xi, 0) + O(|\lambda|)O(|\xi|^4) + o(|\xi|^5),$$

где $W_R^{(4)}(\xi, 0) = V_0^{(4)}(\sum_{j=1}^n \xi_j e_j)$. Пусть

$$V_0^{(4)}(x) = \mathcal{V}_0^{(4)}(x, x, x, x)$$

($\mathcal{V}_0^{(4)}(x, y, z, t)$ — симметричная 4-линейная форма). Тогда, с учетом симметрии, получаем соотношение

$$W_R^{(4)}(\xi) = \sum_{k=1}^n V_0^{(4)}(e_k) \xi_k^4 + 6 \sum_{i < j}^n \mathcal{V}_0^{(4)}(e_i, e_i, e_j, e_j) \xi_i^2 \xi_j^2.$$

1.8 Редукция Ляпунова-Шмидта как обобщенная ритцевская аппроксимация

Определение 1.14. *Ритцевской аппроксимацией [87] функционала V , заданного на банаховом пространстве E , называется функция*

$$W_R(\xi) = V \left(\sum_{i=1}^n \xi_i e_i \right) \quad \xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)^\top,$$

где $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ — некоторый линейно независимый набор функций из E (базис аппроксимации).

Экстремалам $\bar{\xi} = (\bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_n)$ функции W соответствуют точки $\bar{x} = \sum_{i=1}^n \bar{\xi}_i e_i$, называемые ритцевскими аппроксимациями экстремалей V .

Точность ритцевских аппроксимаций повышается лишь за счет увеличения количества базисных функций. Если, обобщая, рассмотреть «нелинейные» аппроксимации вида

$$W(\xi) = V \left(\sum_{j=1}^n \xi_j e_j + \Phi(\xi) \right),$$

где Φ — гладкое отображение из $N := \text{Lin}(e_1, \dots, e_n)$ в $N^\perp$ (ортогональное дополнение к N в метрике пространства функций с суммируемым квадратом), то во многих прикладных задачах можно достигнуть любой аппроксимативной точности при априори зафиксированном наборе базисных функций и, следовательно, априори ограниченном количестве степеней свободы аппроксимирующей системы. Таким образом, схему Ляпунова-Шмидта можно рассматривать как разновидность нелинейной ритцевской аппроксимации.

1.9 Нелокальная вариационная версия метода Ляпунова-Шмидта

Среди теоретических проблем, связанных с применением и развитием метода конечномерных редукций, выделяется вопрос нелокальной продолжимости ключевых параметров. Он включает задачу нелокального существования ключевых параметров и задачу точного или приближенного представления маргинальных отображений и ключевых функций (возможность точного представления появляется, например, в некоторых интегрируемых уравнениях).

Пусть $f : E \longrightarrow F$ — гладкое фредгольмово нулевого индекса отображение банаховых пространств. Пусть f потенциально с потенциалом V (гладким функционалом на E).

Если выполнено условие положительности (монотонности)

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial x}(x)h, h \right\rangle > 0 \quad \forall (x, h) \in E \times (E \setminus 0), \quad (1.35)$$

то, как легко проверить, уравнение $f(x) = 0$ имеет не более одного решения ([18], [49]). Выше было показано, что решение этого уравнения является и точкой минимума V на E .

В случае выполнения условия собственности f (компактность прообраза произвольного компакта) уравнение $f(x) = 0$ однозначно разрешимо (следствие теоремы Банаха-Мазура-Каччиополи [18]). Его решение является точкой глобального минимума V .

Можно определить глобальную ключевую функцию Ляпунова-Шмидта

$$W(\xi) := \inf_{x: \langle x, e_j \rangle = \xi_j \ \forall j} V(x), \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)^\top, \quad (1.36)$$

«отвечающую» за поведение функционала V в целом.

Для глобального ключевого уравнения

$$\theta(\xi) = 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad (1.37)$$

в котором

$$\theta(\xi) = (\theta_1(\xi), \dots, \theta_n(\xi))^\top, \quad \theta_j(\xi) = \langle f(l(\xi) + \Phi(\xi)), e_j \rangle,$$

имеем

$$\theta(\xi) = \text{grad } W(\xi).$$

Глава 2

Модельные краевые задачи

2.1 Натуральные механические системы

Рассмотрим на отрезке $[0, 1]$ дифференциальное уравнение второго порядка в виде натуральной механической системы

$$\ddot{x} + Ax - \nabla\omega(x) = 0, \quad x = (x_1, \dots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n, \quad (2.1)$$

с однородными краевыми условиями первого рода (условиями Дирихле)

$$x(0) = x(1) = 0. \quad (2.2)$$

В уравнение (2.1) входит симметричная $(n \times n)$ -матрица A и гладкая нестрого выпуклая на $\mathbb{R}^n$ функция ω : $\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}(x)(h, h) \geq 0 \quad \forall x, h \in \mathbb{R}^n$. Мы предполагаем, что уравнение (2.1) разрешимо на $[0, 1]$ при любых начальных условиях Коши: $x(0) = a, \quad \dot{x}(0) = b$. Очевидно, что множество $\mathcal{N}$ его решений является гладким подмногообразием размерности $2n$ в банаховом пространстве $C^2([0, 1], \mathbb{R}^n)$.

Частный случай уравнения (2.1) — уравнение колебаний маятника

$$\ddot{x} + \lambda \sin x = 0, \quad x : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}.$$

Положим $E = \{x \in C^2([0, 1], \mathbb{R}^n) : x(0) = x(1) = 0\}$, $F = C([0, 1], \mathbb{R}^n)$, $H = L_2([0, 1], \mathbb{R}^n)$. Скалярное произведение в H будем обозначать $\langle \cdot, \cdot \rangle$: $\langle x, y \rangle = \int_0^1 (x(t), y(t)) dt$, где $(\cdot, \cdot)$ — стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$. Левая часть (2.1), взятая со знаком минус, задает гладкое фредгольмово отображение индекса 0 из E в F , которое является градиентом в тройке пространств $\{E, F, H\}$ гладкого на E функционала энергии

$$V(x) = \int_0^1 \left(\frac{|\dot{x}|^2}{2} - \frac{(Ax, x)}{2} + \omega(x) \right) dt. \quad (2.3)$$

Обозначим через e_{ij} вектор-функции

$$e_{ij}(t) = (\underbrace{0, \dots, 0}_{i-1}, \sqrt{2} \sin \pi j t, 0, \dots, 0)^\top, \quad i = 1, \dots, n, \quad j \in \mathbf{N},$$

образующие полную ортонормированную систему в H . Если максимальное собственное значение λ^* матрицы A удовлетворяет неравенству

$$\lambda^* < (k+1)^2 \pi^2, \quad (2.4)$$

то квадратичная форма

$$\int_0^1 (|\dot{x}|^2 - (Ax, x)) dt = \langle -\ddot{x} - Ax, x \rangle$$

положительна на ортогональном дополнении в H к (nk) -мерному подпространству

$$E^{nk} := \text{Lin}(e_{11}, \dots, e_{n1}, \dots, e_{1k}, \dots, e_{nk}).$$

Пусть

$$\xi = (\xi_{11}, \dots, \xi_{nk})^\top \in \mathbb{R}^{nk}, \quad l(\xi) = \sum_{i,j} \xi_{ij} e_{ij} \in E^{nk},$$

$$\tilde{E} = \{x \in E : \langle x, e_{ij} \rangle = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, k\} = E \cap (E^{nk})^\perp,$$

$$\tilde{E}_\xi = \{x \in E : \langle x, e_{ij} \rangle = \xi_{ij}, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, k\} = l(\xi) + \tilde{E}.$$

Покажем, что $\forall \xi \in \mathbb{R}^{nk}$ функционал V имеет единственную условную невырожденную критическую точку в слое $\tilde{E}_\xi$. Для этого рассмотрим гильбертово пространство H^1 , полученное замыканием E в норме, порожденной скалярным произведением $\langle x, y \rangle_1 = \langle \dot{x}, \dot{y} \rangle = \langle -\ddot{x}, y \rangle$. Пусть H_ξ^1 — замыкание $\tilde{E}_\xi$ в H^1 . Функционал V можно переписать в виде

$$V(x) = V(l(\xi) + v) = \frac{1}{2} \left(\|v\|_1^2 - \left\langle \left(\frac{d}{dt} \right)^{-2} v, Av \right\rangle_1 \right) + S(\xi, v), \quad v \in H_0^1, \quad (2.5)$$

где $S(\xi, v)$ — выпуклый по v функционал, из чего следует оценка

$$S(\xi, v) \geq -C_1(\xi) \|v\|_1 - C_2(\xi), \quad C_1, C_2 \geq 0.$$

Поскольку квадратичная форма $\left(\|v\|_1^2 - \langle (\frac{d}{dt})^{-2} v, Av \rangle_1 \right)$ положительна, функционал V является выпуклым и коэрцитивным по аффинным подпространствам H_ξ^1 , что гарантирует существование условной экстремали

v_ξ в H_ξ^1 . На самом деле, $v_\xi \in \tilde{E}_\xi$. «Подкачку гладкости» позволяет произвести соотношение

$$v_\xi + \left(\frac{d}{dt}\right)^{-2} v_\xi + \left(\frac{d}{dt}\right)^{-2} A v_\xi + \left(\frac{d}{dt}\right)^{-2} \omega(v_\xi) = \sum_{i,j} \mu_{ij} \left(\frac{d}{dt}\right)^{-2} e_{ij}, \quad (2.6)$$

являющееся уравнением Эйлера – Лагранжа для условных экстремалей функционала (2.5) в $\mathcal{H}_\xi^1$. Из (2.6) очевидно следует, что v_ξ принадлежит классу C^2 .

Из фредгольмовости с нулевым индексом отображения $\nabla_H V : E \rightarrow F$ следует гладкость ключевой функции Ляпунова-Шмидта

$$W_{LS}(\xi) = V(l(\xi) + v_\xi) = \inf_{v \in \tilde{E}} V(l(\xi) + v) = \inf_{x \in \tilde{E}_\xi} V(x).$$

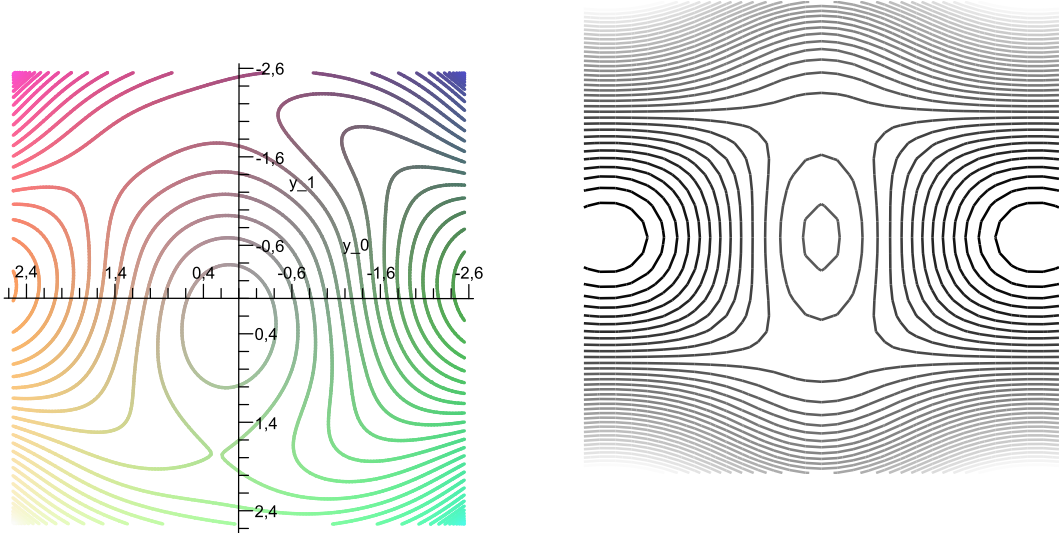


Рис. 1

Фрагменты линий уровня редуцированной (по симметрии) ключевой функции уравнения колебаний маятника.

Краевые задачи для неоднородного уравнения колебаний маятника в случае двух нелокальных ключевых параметров и с использованием вариационного характера уравнения рассматривал в своих работах А.Ю. Борзаков [13], [15].

Если рассмотреть периодическую задачу для неоднородного уравнения

$$\ddot{x} + \mu \sin(x) = q_0 e_0 + q_1 e_1 + q_2 e_2,$$

$e_0 = 1, e_1 = \sqrt{2} \cos(t), e_2 = \sqrt{2} \sin(t)$ (ниже рассмотрен, без ущерба для общности, постоянный период $T = 2\pi$), то, как нетрудно заметить, это

уравнение соответствует функционалу действия

$$V_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\dot{x}^2}{2} + \lambda(\cos(x) - 1) + qx \right) dt, \quad (2.7)$$

$$q = q_0 e_0 + q_1 e_1 + q_2 e_2.$$

Эта задача при $q = 0$ интегрируема (в квадратурах) и решение можно выписать через функцию Якоби. Запишем функционал (2.7) в следующем виде:

$$V_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\dot{x}^2}{2} - \lambda \frac{x^2}{2} \right) dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lambda \left(\frac{x^2}{2} + \cos(x) - 1 \right) dt,$$

так как $\frac{x^2}{2} + \cos(x)$ — выпуклая функция, то при $\lambda > 0$ второе слагаемое — выпуклый функционал. При $\lambda < 0$ первое слагаемое также является выпуклым. При $\lambda > 0$ выпуклость первого слагаемого исчезает.

Моды бифуркации, по которым происходит вырождение при $\lambda < 4$, следующие:

$$e_0 = 1, \quad e_1 = \sqrt{2} \cos(t), \quad e_2 = \sqrt{2} \sin(t).$$

2.2 Вариационные задачи для ДУ четвертого порядка

2.2.1 Уравнения Фусса-Винклера-Циммермана и Свифта-Хоенберга

Стационарное уравнение СХ (Свифта-Хоенберга [113], [68]) формально совпадает с нелинейным уравнением прогибов балки на упругом основании. Подобные уравнения исследовали Ю.А. Митропольский, Б.И. Мосенков [82], J.M.T. Thompson, G.W. Hunt [114], [115], Б.С. Бардин, С.Д. Фурта [8] и др. Линейное уравнение изгиба балки на упругом основании представляет собой широко известную модель Фусса-Винклера-Циммермана (ФВЦ), служащую, вплоть до настоящего времени, основой для большинства инженерных исследований устойчивости строительных сооружений [34]. Нелинейные обобщения модели ФВЦ начали рассматриваться сравнительно недавно [115], [8].

Бифуркационный анализ периодических решений нелинейного уравнения, аналогичного типу ФВЦ, исследовалось в работах Б.М. Даринского

и Ю.И. Сапронова [46], основное внимание в которых уделялось вопросу зарождения посткритических периодических структур в кристаллах. Прогибы неоднородных балок на упругом основании изучались Д.В. Костиным в работах [56], [57].

Нелинейная промасштабированная модель колебательного движения однородной балки на упругом основании задается уравнением (см. [115])

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \kappa \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \alpha w + w^3 = 0,$$

где w — прогиб балки (смещение точек средней линии упругой балки, расположенной вдоль оси x). Аналогичное уравнение возникает в теории кристаллов [50], в которой w — параметр порядка.

Первый шаг в изучении такой задачи — отыскание равновесных (стационарных) состояний, определяемых уравнением

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + \kappa \frac{d^2 w}{dx^2} + \alpha w + w^3 = 0, \quad (2.8)$$

которое ниже мы рассмотрим при стандартных краевых условиях

$$w(0) = w(1) = w''(0) = w''(1) = 0. \quad (2.9)$$

Начально-краевая задача с граничным условием (2.9) допускает 2-мерные вырождения.

Уравнение (2.8) является уравнением Эйлера для экстремалей функционала (действия)

$$V = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} \left(\left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 - \kappa \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 + \alpha w^2 \right) + \frac{w^4}{4} \right) dx. \quad (2.10)$$

Двумерное вырождение нулевой экстремали происходит при

$$\kappa = \kappa_1 := (p^2 + q^2)\pi^2, \quad \alpha = \alpha_1 := p^2 q^2 \pi^4, \quad p, q \in \mathbb{N},$$

со стандартными модами бифуркации (базисом ядра второго дифференциала)

$$e_1 = \sqrt{2} \sin(p\pi x), \quad e_2 = \sqrt{2} \sin(q\pi x).$$

Ниже предполагается, что $p = 1$, $q = 2$ и, соответственно, $\kappa_1 = 5\pi^2$, $\alpha_1 = 4\pi^4$ (эти значения являются наименьшими из тех, при которых происходит 2-мерное вырождение; в остальных случаях анализ аналогичен).

Редукция Ляпунова–Шмидта [46] к (ключевой) функции (двух переменных)

$$W(\xi, \delta) = \inf_{w: \langle w, e_1 \rangle = \xi_1, \langle w, e_2 \rangle = \xi_2} V(w, \alpha_1 + \delta_1, \kappa_1 + \delta_2), \quad (2.11)$$

$\xi = (\xi_1, \xi_2)$, $\delta = (\delta_1, \delta_2)$, сохраняет симметрию функционала действия. Так как функционал (2.10) инвариантен относительно инволюций J_1, J_2 :

$$J_2(p)(x) := p(1 - x), \quad J_1 := -J_2,$$

то и для функции (2.11) имеем

$$W(-\xi_1, \xi_2, \delta_1, \delta_2) = W(\xi_1, -\xi_2, \delta_1, \delta_2) = W(\xi_1, \xi_2, \delta_1, \delta_2)$$

(симметрию прямоугольника), из которой вытекает [46] справедливость асимптотического представления

$$W(\xi, \delta) = U(\xi, \delta) + o(|\xi|^4) + O(|\xi|^4)O(\delta),$$

где $U(\xi, \delta) = V(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2, \delta)$ — линейная ритцевская аппроксимация функционала V по модам e_1, e_2 . Таким образом, для ключевой функции имеет место асимптотическое представление

$$\frac{\lambda_1}{2} \xi_1^2 + \frac{\lambda_2}{2} \xi_2^2 + \frac{1}{4} (A \xi_1^4 + 2B \xi_1^2 \xi_2^2 + C \xi_2^4) + o(|\xi|^4) + O(|\xi|^4)O(\delta), \quad (2.12)$$

где

$$\lambda_1 = \delta_1 - \pi^2 \delta_2, \quad \lambda_2 = \delta_1 - 4\pi^2 \delta_2, \\ A = \int_0^1 e_1^4 dx = \frac{3}{2}, \quad B = \int_0^1 e_1^2 e_2^2 dx = 3, \quad C = \int_0^1 e_2^4 dx = \frac{3}{2}.$$

Сократив на множитель $3/2$, получим функцию (2.12) с нормализованной главной частью:

$$\widetilde{W}_0(\xi, \delta) = \widetilde{U}(\xi, \delta) + o(|\xi|^4) + O(|\xi|^4)O(\delta),$$

где

$$\widetilde{U}(\xi, \delta) = \frac{\tilde{\lambda}_1}{2} \xi_1^2 + \frac{\tilde{\lambda}_2}{2} \xi_2^2 + \frac{1}{4} (\xi_1^4 + 4\xi_1^2 \xi_2^2 + \xi_2^4).$$

«Геометрический сюжет» бифуркации критических точек и первые асимптотики ветвей бифурцирующих точек (по закритическим приращением управляющих параметров) для функции $\widetilde{W}_0(\xi, \delta)$ полностью определяются ее главной частью $\widetilde{U}(\xi, \delta)$, которая представляет собой «возмущенную двумерную сборку» (с коэффициентом двойного отношения $a = 4$), четную по каждой переменной [46].

Пусть $\theta_1 = \tilde{\lambda}_1 - 2\tilde{\lambda}_2$, $\theta_2 = \tilde{\lambda}_2 - 2\tilde{\lambda}_1$. Так как матрица Гессе функции $\widetilde{U}$ представима в виде

$$\begin{pmatrix} \tilde{\lambda}_1 + 3\xi_1^2 + 2\xi_2^2 & 4\xi_1 \xi_2 \\ 4\xi_1 \xi_2 & \tilde{\lambda}_2 + 2\xi_1^2 + 3\xi_2^2 \end{pmatrix},$$

то, как нетрудно проверить, при $\theta_1 > 0$ и $\theta_2 > 0$ существуют четыре 2-модовые критические точки индекса 1. Все 1-модовые точки при этом являются точками локальных минимумов, а нуль — критической точкой индекса 2. Рождение 1-модовых критических точек происходит при переходах параметров $\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2$ в области отрицательных значений.

Каустика (бифуркационная диаграмма функций [5]) $\Sigma_{\tilde{U}}$ функции $\tilde{U}$ разбивает плоскость управляющих параметров на шесть зон

$$\begin{aligned}\omega_0 &= \{\tilde{\lambda}_1 > 0, \tilde{\lambda}_2 > 0\}, \\ \omega_1 &= \{\tilde{\lambda}_1 < 0, \tilde{\lambda}_2 > 0\}, \\ \omega_2 &= \{\tilde{\lambda}_1 > 0, \tilde{\lambda}_2 < 0\}, \\ \omega_3 &= \{\tilde{\lambda}_1 < 0, \tilde{\lambda}_2 < 0, \theta_1 < 0, \theta_2 > 0\}, \\ \omega_4 &= \{\tilde{\lambda}_1 < 0, \tilde{\lambda}_2 < 0, \theta_1 > 0, \theta_2 < 0\}, \\ \omega_5 &= \{\tilde{\lambda}_1 < 0, \tilde{\lambda}_2 < 0, \theta_1 > 0, \theta_2 > 0\}.\end{aligned}$$

Каждой зоне соответствует свой расклад (*bif*-расклад) бифурцирующих критических точек: параметрам из зоны ω_0 отвечает случай единственной критической точки (точка минимума в нуле), для ω_1, ω_2 — пара симметрично расположенных (относительно нуля) 1-модовых точек минимума и седло в нуле, для ω_3, ω_4 — пара симметрично расположенных 1-модовых точек минимума, пара 1-модовых седел и точка локального максимума в нуле, для ω_5 — четверка симметрично расположенных 1-модовых точек минимума, четверка 2-модовых седел и точка локального максимума в нуле.

При обходе плоскости управляющих параметров против часовой стрелки вокруг нуля, начиная с зоны ω_0 , соответствующие метаморфозы линий уровней и распределений критических точек изображены на следующей диаграмме:

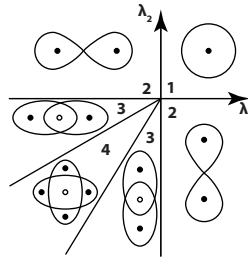


Рис. 2

Метаморфозы характерных линий уровней

В этом случае появляются те и только те расклады бифурцирующих критических точек (*bif*-расклады), которым соответствуют следующие целочисленные векторы: $(1, 0, 0)$, $(2, 1, 0)$, $(2, 2, 1)$, $(4, 4, 1)$ (в раскладе (l_0, l_1, l_2)) компонента l_k равна количеству критических точек с индексом Морса, равным k).

2.2.2 Трассирование спусков вдоль траекторий уравнения Свифта-Хоенберга в точки минимума энергии

Обратимся вновь к уравнению СХ

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \kappa \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \alpha w + w^3 = 0.$$

Изменение параметров приводит к потере устойчивости исходной фазы и, как следствие (как отклик системы), к ее переходу в новое состояние (с новыми структурными свойствами). Такой переход может сопровождаться, например, спинодальным расслоением (распадом), выраженным в изменении локальных концентраций компонентов, в образовании сначала зернистой структуры, а затем кластеров и доменов новой фазы. В последнее время структурную перестройку физической среды часто объясняют на основе нелинейного диффузионного уравнения КХ (Кана-Хилларда [108], [95])

$$\dot{u} = \Delta \operatorname{grad} V(u) := \mathcal{D} \Delta (u^3 - u - \gamma \Delta(u)),$$

в котором $u = u(x)$ — относительная концентрация компонента вещества, $x \in U \subset \mathbb{R}^m$, $1 \leq m \leq 3$, $\mathcal{D}$ — коэффициент диффузии,

$$V(u) := \mathcal{D} \int_U \left(\frac{(u^2 - 1)^2}{4} + \frac{\gamma}{2} |\nabla u|^2 \right) dx$$

— интеграл энергии, U — область, занятая изучаемой средой.

Близким уравнением, также способным моделировать структурные превращения, является нелинейное уравнение СХ, которое можно представить в виде градиентной динамической системы (с бесконечным числом степеней свободы)

$$\dot{w} = -\operatorname{grad} V(w) := - \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \kappa \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \alpha w + w^3 \right),$$

$x \in [0, 2\pi]$,

$$V(w) := \int_0^{2\pi} \left(\frac{(w'')^2}{2} - \kappa \frac{(w')^2}{2} + \alpha \frac{w^2}{2} + \frac{w^4}{4} \right) dx$$

— интеграл энергии. Будем далее предполагать, что для концентрации выполнено краевое условие $w(0) = w(1) = w''(0) = w''(1) = 0$ (см. (2.9)). При исследовании локальных бифуркаций экстремалей иногда используется ритцевская аппроксимация функционала

$$W(\xi) := V(c + \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_n e_n),$$

построенная по начальным собственным функциям (модам) e_j оператора $\frac{d^4}{dx^4}$. В нелокальных задачах также можно использовать ритцевскую аппроксимацию, но при этом для достижения требуемой точности решения необходимо использовать большое количество мод, что приводит к большой размерности аппроксимирующей системы. Снизить размерность аппроксимирующей системы можно за счет применения нелинейной ритцевской аппроксимации, например, в виде нелокально продолженной ключевой функции, то есть фактически перейдя к конечномерной задаче $\dot{\xi} = \text{grad } W(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, где $W(\xi) := \inf_{\langle w, e_j \rangle = \xi_j} V(w)$ — ключевая функция Ляпунова-Шмидта.

Ниже мы воспользуемся прямой процедуры кратчайшего спуска в точку минимума V (не переходя к аппроксимирующей ключевой функции). Первым шагом этой процедуры является выбор величины сдвига вдоль градиента из начальной (порождающей) точки, с целью уменьшения значения функционала энергии.

В качестве финальных состояний искомых траекторий динамической системы (1) используются те орбиты точек минимума, которые ответвились (при возрастании параметра λ) от докритического нулевого равновесия.

Основной шаг в построении «трассы кратчайшего спуска» к минимуму — решение уравнения (относительно s):

$$\langle \text{grad} \tilde{V}(a_0 + sh_0), h \rangle = 0. \quad (7)$$

Здесь $h_0 = -\text{grad} \tilde{V}(a_0)$, $g = -\text{grad} \tilde{V}$, a_0 — начальная (порождающая) точка. Например, можно положить (для определенности)

$$a_0 = \sin(7\pi x_1) + \varepsilon \sum_{k=1}^6 \sin(k\pi x),$$

ε — некоторая фиксированная малая величина. Используя для $g(a + sh_0)$ разложение Тейлора, получим соотношение

$$g(a_0 + sh_0) = g(a_0) + s \frac{\partial g}{\partial x}(a_0) h_0 + o(s),$$

$\frac{\partial g}{\partial x}(a_0)$ — производная Фреше градиентного отображения g , и

$$\langle g(a_0 + sh_0), h_0 \rangle = \langle g(a_0), h_0 \rangle + s \langle (\partial g / \partial x)(a_0) h_0, h_0 \rangle + o(|s|).$$

Следовательно, исходя из уравнения (7), можно положить (с некоторой точностью)

$$s = s_0 := -\frac{\langle g(a_0), h_0 \rangle}{\langle (\partial g / \partial x)(a_0) h_0, h_0 \rangle} = -\frac{\|g(a_0)\|^2}{\langle (\partial g / \partial x)(a_0) h_0, h_0 \rangle}.$$

Поиск значения s_0 можно осуществить более точно — посредством отыскания точки минимума полинома четвертой степени

$$p(s) = s^4 + p_3 s^3 + p_2 s^2 + p_1 s \sim \tilde{V}(a_0 + s h_0)$$

(рассмотренного с точностью до постоянного множителя и постоянного слагаемого).

Следующий шаг кратчайшего спуска — повторение основного шага для новой порождающей точки $a_1 := a_0 + s_0 h_0$ и т.д. Ниже, на рисунке 1, изображены графики, полученные при $\lambda > \pi^2$ соответствующих промежуточных и финальной функций концентрации после некоторого предварительного подбора коэффициентов разложения Фурье для начальной функции концентрации (3).

На основе данного алгоритма были получены кривые, изображающие удельные концентрации ¹.

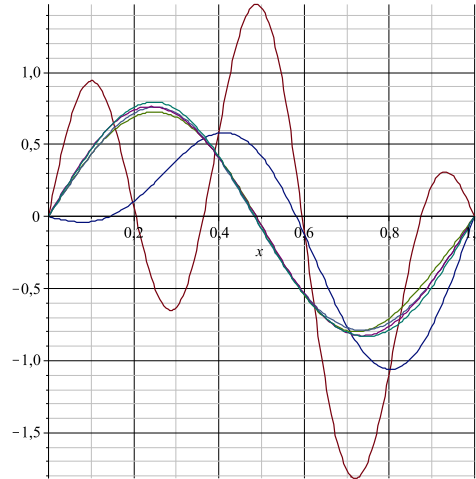


Рис. 3

Первые пять итераций расчетных функций плотности концентраций.

¹Здесь использован рисунок, полученный Д.В. Костиным

2.3 Фазовые переходы в сегнетоэлектрических кристаллах

Как свидетельствуют эксперименты, большинство фазовых переходов в сегнетоэлектриках происходят при уменьшении температуры образца и с разрушением или понижением некоторых исходных симметрий [50]. Ведущим фактором при описании этих переходов методами неравновесной термодинамики является температурная зависимость тензора поляризации вещества. Учет этой зависимости позволяет получать существенные дополнительные сведения о фазовых переходах и, следовательно, выявлять новые типы фазовых состояний.

В обзоре [46] поставлена задача исследования возможных фазовых переходов в кристаллах, сингонии которых содержат оси высоких порядков и термодинамические потенциалы которых представлены полиномами не выше четвертой степени. К этой совокупности относятся кристаллы кубической, тетрагональной, тригональной и гексагональной сингоний (всего 19 классов). Полный список возможных фаз пока никем не получен, и его создание выглядит весьма сложной задачей. Списки некоторых допустимых раскладов метастабильных состояний приведены в [46] (в случае особенностей типа двумерной и трехмерной сборки).

Известно, что фазовые состояния некоторых сегнетоэлектрических кристаллов моделируются решениями нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка ([8, 97, 106])

$$\frac{d^4 p}{dx^4} + \kappa \frac{d^2 p}{dx^2} + \alpha p + p^3 = 0, \quad (2.13)$$

рассмотренного на отрезке $[0, \pi]$ числовой оси при краевых условиях

$$p(0) = \frac{d^2 p}{dx^2}(0) = p(\pi) = \frac{d^2 p}{dx^2}(\pi) = 0. \quad (2.14)$$

Модельное уравнение в случае таких кристаллов совпадает со стационарным уравнением ФСЦ (2.8).

Это уравнение является уравнением Эйлера экстремалей функционала энергии

$$V(p, \kappa, \alpha) = \int_0^\pi \left(\frac{1}{2} \left(\left(\frac{d^2 p}{dx^2} \right)^2 - \kappa \left(\frac{dp}{dx} \right)^2 + \alpha p^2 \right) + \frac{p^4}{4} \right) dx, \quad (2.15)$$

где $\alpha > 0$.

Функционал (2.15) можно рассмотреть, например, на пространстве E функций класса C^4 на отрезке $[0, \pi]$, удовлетворяющих краевым условиям (2.14).

Анализ бифуркационных эффектов можно осуществить посредством редукции Ляпунова-Шмидта к ключевой функции (от двух ключевых переменных)

$$W(\xi, \delta) = \inf_{p: \langle p, e_1 \rangle = \xi_1, \langle p, e_2 \rangle = \xi_2} V(p, \alpha_1 + \delta_1, \kappa_1 + \delta_2), \quad (2.16)$$

$$\xi = (\xi_1, \xi_2), \quad \delta = (\delta_1, \delta_2),$$

где e_n — моды бифуркации

$$e_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nx).$$

Функционал (2.15) инвариантен относительно инволюций J_1, J_2 :

$$J_2(p)(x) = p(\pi - x), \quad J_1 = -J_2.$$

Следовательно, функция (2.16) имеет симметрию прямоугольника:

$$W(-\xi_1, \xi_2, \delta_1, \delta_2) = W(\xi_1, -\xi_2, \delta_1, \delta_2) = W(\xi_1, \xi_2, \delta_1, \delta_2), \quad (2.17)$$

из которой вытекает справедливость асимптотического представления

$$W(\xi, \delta) = U(\xi, \delta) + o(|\xi|^4) + O(|\xi|^4)O(\delta), \quad (2.18)$$

где $U(\xi, \delta) = V(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2, \delta)$ — ритцевская аппроксимация функционала V по модам e_1, e_2 . Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.1. *Для ключевой функции (2.16) имеет место асимптотическое представление*

$$W(\xi, \delta) = \frac{\lambda_1}{2} \xi_1^2 + \frac{\lambda_2}{2} \xi_2^2 + \frac{1}{4} (A \xi_1^4 + 2B \xi_1^2 \xi_2^2 + C \xi_2^4) + o(|\xi|^4) + O(|\xi|^4)O(\delta), \quad (2.19)$$

где

$$\lambda_1 = \delta_1 - \delta_2, \quad \lambda_2 = \delta_1 - 4\delta_2,$$

$$A = \int_0^\pi e_1^4 dx = \frac{3}{2\pi}, \quad B = \int_0^\pi e_1^2 e_2^2 dx = \frac{3}{\pi}, \quad C = \int_0^\pi e_2^4 dx = \frac{3}{2\pi}.$$

Сократив функцию (2.19) на множитель $\frac{3}{2\pi}$, получим функцию с нормализованной главной частью:

$$\tilde{W}(\xi, \delta) = \tilde{U}(\xi, \delta) + o(|\xi|^4) + O(|\xi|^4)O(\delta),$$

где

$$\tilde{U}(\xi, \delta) = \frac{\tilde{\lambda}_1}{2}\xi_1^2 + \frac{\tilde{\lambda}_2}{2}\xi_2^2 + \frac{1}{4}(\xi_1^4 + 4\xi_1^2\xi_2^2 + \xi_2^4).$$

«Геометрический сюжет» бифуркации критических точек и первые асимптотики ветвей бифурцирующих точек (по закритическим приращениям управляющих параметров) для функции $\tilde{W}(\xi, \delta)$ полностью определяются ее главной частью $\tilde{U}(\xi, \delta)$.

Главная часть ключевой функции представляет собой возмущенную двумерную сборку, четную по каждой переменной с коэффициентом двойного отношения $a > 2$. В этом случае появляются только следующие *bif*-расклады: $(1,0,0)$, $(2,1,0)$, $(2,2,1)$, $(4,4,1)$.

При наличии ограничения

$$\langle p, \omega \rangle = \int_0^\pi p(x)\omega(x)dx \geq 0$$

анализ функционала сводится к анализу ключевой функции

$$\tilde{U}(\xi, \delta) = \frac{\tilde{\lambda}_1}{2}\xi_1^2 + \frac{\tilde{\lambda}_2}{2}\xi_2^2 + \xi_1^4 + a\xi_1^2\xi_2^2 + \xi_2^4 \quad (2.20)$$

с коэффициентом $a > 2$ и при условии $\xi_1 \geq 0$.

Таким образом, в случае фазовых состояний некоторых видов кристаллов реализуются те же *bif*-расклады, что и в случае балки на упругом основании (стационарное уравнение ФСЦ (2.8)).

2.4 Дополнительные замечания об исследовании фазовых состояний кристаллов

Сегнетоэлектрические фазы некоторых «более общих» кристаллов определяются экстремалами функционала энергии

$$V(x) = \int_{\Omega} (|\text{grad } x|^2 + \Phi(x)) dV,$$

Где $x = (p_j(r))$ — так называемое поле векторов поляризации, Φ — термодинамический потенциал кристалла, рассматриваемого при каких-либо

краевых условиях, связанных с рассматриваемой задачей. Экстремали данного функционала также можно исследовать, применив одну из схем конечномерной редукции, то есть переходом к ключевой функции $W(\xi)$, задаваемой формулой

$$W(\xi) := \inf_{x:q(x)=\xi} V(x), \quad (2.21)$$

где $q(x) = (q_1, \dots, q_n)$, $\{q_j\}_{j=1}^n$ – набор гладких функционалов (ключевых параметров).

Подбор ключевых параметров осуществляется как с учетом «удобств в вычислениях», так и с учетом требований согласованности параметров с имеющейся симметрией.

Проведя точное или приближенное построение маргинального отображения $\varphi(\xi)$, мы получим ключевую функцию (точно или приближенно) $W(\xi) = V(\varphi(\xi))$, «отвечающую» за бифуркацию фазовых состояний.

Все топологические и аналитические понятия, так или иначе характеризующие тип стационарной точки (кратность, локальное кольцо особенности, версальная деформация, бифуркационная диаграмма и т.п.) для функционалов действия удобно вводить через ключевые функции. Наиболее типичными и часто встречаемыми в теории кристаллов особенностями ключевых функций, вызванными пересечением управляющими параметрами границ устойчивости основных состояний, являются многомерные сборки [46].

Рассмотрим вновь пример, связанный с модельным ОДУ четвертого порядка

$$\frac{d^4 p}{dx^4} + \varrho \frac{d^2 p}{dx^2} + \alpha p + p^3 = 0 \quad (2.22)$$

на отрезке $[0, \pi]$ числовой оси при краевых условиях

$$p(0) = \frac{d^2 p}{dx^2}(0) = p(\pi) = \frac{d^2 p}{dx^2}(\pi) = 0. \quad (2.23)$$

Отбор решений, соответствующих стабильным фазам, производится посредством правила Максвелла на основе функционала энергии

$$V(p, \varrho, \alpha) = \int_0^\pi \left(\frac{1}{2} \left(\left(\frac{d^2 p}{dx^2} \right)^2 + \varrho \left(\frac{dp}{dx} \right)^2 + \alpha p^2 \right) + \frac{p^4}{4} \right) dx. \quad (2.24)$$

Стабильному состоянию соответствует то решение задачи (2.22)–(2.23), которое реализуют глобальный минимум функционала энергии, так называемым метастабильным состояниям соответствуют точки локальных минимумов.

Функционал (2.22) будем рассматривать на пространстве E функций класса C^4 на отрезке $[0, \pi]$, удовлетворяющих краевым условиям (2.23).

Бифуркации решений уравнения (2.22) при различных краевых условиях изучались многими специалистами в связи некоторыми задачами теории фазовых переходов в кристаллических сегнетоэлектриках. В большинстве известных нам работ рассматривались лишь случаи одномерных бифуркаций. Однако при некоторых значениях управляющих параметров в такого типа краевых задачах появляются 2-мерные вырождения, приводящие к конкурентному взаимодействию двух бифуркационных мод, что порождает интересные эффекты.

Стандартным (порождающим) решением задачи (2.22)-(2.23) является нулевая функция. После пересечения точкой (ϱ, α) характеристической линии (в плоскости управляющих параметров) нулевая функция теряет стабильность и рождается ненулевое стабильное состояние. Характеристические линии задаются через линеаризованное уравнение

$$\frac{d^4 h}{dx^4} + \varrho \frac{d^2 h}{dx^2} + \alpha h = 0 \quad (2.25)$$

(при краевых условиях вида (2.23)). Характеристические линии состоят из тех и только тех точек (ϱ, α) , для которых уравнение (2.25) имеет ненулевое решение. Поиск нетривиальных решений линеаризованного уравнения приводит к характеристическому уравнению

$$\lambda^4 + \varrho \lambda^2 + \alpha = 0. \quad (2.26)$$

Учет краевых условий (2.23) с необходимостью приводит к соотношениям $\lambda^2 = -n^2$, $n = 1, 2, \dots$, из которых получаем, в силу (2.26), набор уравнений

$$\varrho = \frac{\alpha}{n^2} + n^2, \quad (2.27)$$

задающих характеристические прямые $l_1, l_2, \dots, l_n, \dots$. Огибающая кривая $\mathcal{L}$ семейства характеристических прямых ограничивает ту область значений вектора управляющих параметров, для которых функционал энергии имеет единственную точку минимума (в нуле). При пересечении движущейся точкой в плоскости управляющих параметров кривой $\mathcal{L}$ происходит бифуркация рождения нетривиального стабильного состояния. Кривая $\mathcal{L}$ является ломаной, звеньями которой служат отрезки $\mathcal{L}_n$, соединяющие точки d_n и d_{n+1} , где $d_n = (\varrho_n, \alpha_n)$, $\alpha_n = n^2(n+1)^2$, $\varrho_n = n^2 + (n+1)^2$ (при этом полагаем: $d_0 = (0, 1)$). В точке d_n пересекается пара прямых l_n, l_{n+1} ($n \geq 1$). В этой же точке происходит обмен ведущих мод

бифуркаций. Пересечение в плоскости управляющих параметров отрезка $\mathcal{L}_n$ по внутренней точке приводит к одномерной бифуркации с модой

$$e_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nx).$$

Пересечение же $\mathcal{L}$ по точке излома d_n приводит к двумерной бифуркации с модами e_n, e_{n+1} .

Ниже рассмотрена лишь точка d_1 (при $n \geq 2$ результаты аналогичны).

Анализ бифуркационных эффектов, происходящих при локализации (управляющих параметров) $\alpha = \alpha_1 + \delta_1$, $\varrho = \varrho_1 + \delta_2$ можно осуществить посредством редукции Ляпунова-Шмидта к ключевой функции (от двух ключевых переменных)

$$W(\xi, \delta) = \inf_{p: \langle p, e_1 \rangle = \xi_1, \langle p, e_2 \rangle = \xi_2} V(p, \alpha_1 + \delta_1, \alpha_1 + \delta_2), \quad (2.28)$$

$$\xi = (\xi_1, \xi_2), \quad \delta = (\delta_1, \delta_2).$$

Хорошо известно, что при рассматриваемых здесь условиях функция $W(\xi, \delta)$ является гладкой. Более того, эта функция наследует все аналитические и топологические свойства V (на E). В частности, при достаточно малых δ существует взаимно однозначное соответствие между критическими точками V и W , сохраняющее их типы (кратности, значения индекса Морса и т.п.).

Так как функционал V четен: $V(-p, \varrho, \alpha) \equiv V(p, \varrho, \alpha)$ и симметричен относительно инволюции $I_1 : p(x) \mapsto p(\pi - x)$, то V инвариантен относительно действия группы $\mathbf{Z}_2^2$, заданного парой инволюций I_1, I_2 , где $I_2 = -I_1$. Для этой пары инволюций выполняются соотношения

$$I_1(e_1) = e_1, \quad I_2(e_2) = e_2, \quad I_1(e_2) = -e_2, \quad I_2(e_1) = -e_1.$$

Следовательно, функция (2.28) имеет симметрию прямоугольника:

$$W(-\xi_1, \xi_2, \delta_1, \delta_2) = W(\xi_1, -\xi_2, \delta_1, \delta_2) = W(\xi_1, \xi_2, \delta_1, \delta_2), \quad (2.29)$$

из которой вытекает справедливость асимптотического представления

$$W(\xi, \delta) = U(\xi, \delta) + o(|\xi|^4) + O(|\xi|^4)O(\delta), \quad (2.30)$$

где $U(\xi, \delta) = V(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2, \delta)$ — ритцевская аппроксимация функционала V по модам e_1, e_2 . Таким образом, для ключевой функции (2.28) имеет место асимптотическое представление

$$W(\xi, \delta) = \frac{\lambda_1}{2} \xi_1^2 + \frac{\lambda_2}{2} \xi_2^2 + A \xi_1^4 + 2B \xi_1^2 \xi_2^2 + C \xi_2^4 + \quad (2.31)$$

$$+o(|\xi|^4) + O(|\xi|^4)O(\delta),$$

где

$$\lambda_1 = \delta_1 - \delta_2, \quad \lambda_2 = \delta_1 - 4\delta_2,$$

$$A = \int_0^\pi e_1^4 dx = \frac{3}{2\pi}, \quad B = \int_0^\pi e_1^2 e_2^2 dx = \frac{3}{\pi}, \quad C = \int_0^\pi e_2^4 dx = \frac{3}{2\pi}.$$

Сократив функцию W на множитель $\frac{6}{\pi}$, получим функцию с нормализованной главной частью:

$$\tilde{W}(\xi, \delta) = \tilde{U}(\xi, \delta) + o(|\xi|^4) + O(|\xi|^4)O(\delta),$$

где

$$\tilde{U}(\xi, \delta) = \frac{\tilde{\lambda}_1}{2}\xi_1^2 + \frac{\tilde{\lambda}_2}{2}\xi_2^2 + \frac{1}{4}(\xi_1^4 + 4\xi_1^2\xi_2^2 + \xi_2^4).$$

«Геометрический сюжет бифуркации» критических точек и первые асимптотики ветвей бифурцирующих точек (по закритическим приращениям управляющих параметров) для функции $\tilde{W}(\xi, \delta)$ полностью определяются ее главной частью $\tilde{U}(\xi, \delta)$. Критические точки $\tilde{U}(\xi, \delta)$ определяются системой уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \xi_1} &= \tilde{\lambda}_1 \xi_1 + \xi_1^3 + 2\xi_1 \xi_2^2 = 0, \\ \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \xi_2} &= \tilde{\lambda}_2 \xi_2 + 2\xi_1^2 \xi_2 + \xi_2^3 = 0, \end{aligned} \right\}$$

все решения которой делятся на три типа:

- 1) 0–решение $\xi_1 = \xi_2 = 0$,
- 2) 1–модовые решения $\xi_1 = \pm\sqrt{-\tilde{\lambda}_1}$ ($\lambda_1 < 0$), $\xi_2 = 0$ и $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = \pm\sqrt{-\tilde{\lambda}_2}$ ($\lambda_2 < 0$),
- 3) 2–модовые решения $\xi_1 = \pm\sqrt{\frac{\tilde{\lambda}_1 - 2\tilde{\lambda}_2}{3}}$, $\xi_2 = \pm\sqrt{\frac{\tilde{\lambda}_2 - 2\tilde{\lambda}_1}{3}}$, ($\tilde{\lambda}_1 - 2\tilde{\lambda}_2 > 0$, $\tilde{\lambda}_2 - 2\tilde{\lambda}_1 > 0$).

Пусть $\theta_1 = \tilde{\lambda}_1 - 2\tilde{\lambda}_2$, $\theta_2 = \tilde{\lambda}_2 - 2\tilde{\lambda}_1$. Так как матрица Гессе функции $\tilde{U}$ представима в виде

$$\begin{pmatrix} \tilde{\lambda}_1 + 3\xi_1^2 + 2\xi_2^2 & 4\xi_1\xi_2 \\ 4\xi_1\xi_2 & \tilde{\lambda}_2 + 2\xi_1^2 + 3\xi_2^2 \end{pmatrix},$$

то, как нетрудно проверить, при $\theta_1 > 0$ и $\theta_2 > 0$ существуют четыре 2–модовые критические точки индекса 1. Все 1–модовые точки при этом являются точками локальных минимумов, а нуль — критической точкой индекса 2. Рождение 1–модовых критических точек происходит при переходах параметров $\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2$ в области отрицательных значений.

Бифуркационная диаграмма (каустика) $\Sigma_{\tilde{U}}$ функции $\tilde{U}$ разбивает плоскость управляющих параметров на шесть зон

$$\begin{aligned}\omega_0 &= \{\tilde{\lambda}_1 > 0, \tilde{\lambda}_2 > 0\}, \\ \omega_1 &= \{\tilde{\lambda}_1 < 0, \tilde{\lambda}_2 > 0\}, \\ \omega_2 &= \{\tilde{\lambda}_1 > 0, \tilde{\lambda}_2 < 0\}, \\ \omega_3 &= \{\tilde{\lambda}_1 < 0, \tilde{\lambda}_2 < 0, \theta_1 < 0, \theta_2 > 0\}, \\ \omega_4 &= \{\tilde{\lambda}_1 < 0, \tilde{\lambda}_2 < 0, \theta_1 > 0, \theta_2 < 0\}, \\ \omega_5 &= \{\tilde{\lambda}_1 < 0, \tilde{\lambda}_2 < 0, \theta_1 > 0, \theta_2 > 0\}.\end{aligned}$$

Каждой зоне соответствует свой расклад (*bif*-расклад) бифурцирующих критических точек:

параметрам из зоны ω_0 отвечает случай единственной критической точки (точка минимума в нуле),

для ω_1, ω_2 — пара симметрично расположенных (относительно нуля) 1-модовых точек минимума и седло в нуле,

для ω_3, ω_4 — пара симметрично расположенных 1-модовых точек минимума, пара 1-модовых седел и точка локального максимума в нуле,

для ω_5 — четверка симметрично расположенных 1-модовых точек минимума, четверка 2-модовых седел и точка локального максимума в нуле.

На основании проведенного исследования главной части ключевой функции можно сделать выводы о локальном топологическом строении исходного функционала и о бифуркациях его экстремалей.

Раметим, что для ключевой функции W можно подобрать такие параметры

$$\tilde{\theta}_1 = \tilde{\lambda}_1 - 2\tilde{\lambda}_2 + o(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2), \quad \tilde{\theta}_2 = \tilde{\lambda}_2 - 2\tilde{\lambda}_1 + o(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2),$$

в которых разбиение плоскости параметров каустикой Σ_W функции W на шесть зон $\tilde{\omega}_0, \tilde{\omega}_1, \dots, \tilde{\omega}_5$ аналогично разбиению на зоны ω_k для U пространства параметров для главной части ключевой функции (в предыдущем пункте). При этом $\tilde{\omega}_0 = \omega_0$, $\tilde{\omega}_1 = \omega_1$, $\tilde{\omega}_2 = \omega_2$, а $\tilde{\omega}_3, \tilde{\omega}_4$ и $\tilde{\omega}_5$ описываются теми же соотношениями, которыми описаны множества ω_3, ω_4 и ω_5 , но с заменой в них функций θ_1 и θ_2 на $\tilde{\theta}_1$ и $\tilde{\theta}_2$. Каждой зоне $\tilde{\omega}_k$ также соответствует свой *bif*-расклад критических точек, изображаемый тем же графом, которым ранее был изображен соответствующий *bif*-расклад для функции U . Факт существования таких параметров $\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2$ — следствие теорем об изоморфности миниверсальных деформаций особенности [5], [19].

Таким образом, при локализации управляющих параметров в точке $(4, 5)$ ($\alpha = 4 + \delta_1$, $\varrho = 5 + \delta_2$) достаточно малая окрестность этой точки разбивается на шесть перечисленных выше зон $\tilde{\omega}_0, \tilde{\omega}_1, \dots, \tilde{\omega}_5$, которым отвечают *bif*-расклады критических точек функционала V .

При переходе точки плоскости управляющих параметров через линию $\mathbf{m} = \{\tilde{\lambda}_1 = \tilde{\lambda}_2 > 0\}$ происходит фазовый переход первого рода. Во всех зонах стабильные фазовые состояния являются 1-модовыми и представляются в виде

$$\pm \sqrt{\frac{\delta_1 - \delta_2}{3}} \sin(x) + o(\delta_1, \delta_2)$$

или

$$\pm \sqrt{\frac{\delta_1 - 4\delta_2}{3}} \sin(2x) + o(\delta_1, \delta_2).$$

2.5 Уравнение Кармана

2.5.1 Случай круглой пластины

Переход к ключевой функции позволяет использовать в вариационных задачах новейшие достижения из анализа гладких функций и компьютерных вычислительных технологий. Каждая реализация идеи «конечно-мерного усечения» исходного модельного уравнения сопряжена не только с необходимостью ее математического обоснования, но и с разработкой алгоритмов, позволяющих приближенно вычислять ключевую функцию и ее возмущения, и с подтверждением достоверности полученных численных результатов. Важную роль в таких применениях методов конечномерной редукции играют идеи и конструкции теории особенностей гладких функций [5].

Рассмотренная в данной работе нелокальная вычислительно-аналитическая процедура ранее была апробирована в случаях уравнения Дуффинга, уравнения колебаний маятника и уравнения Белецкого [46] – [59]. В настоящей работе эта процедура применена (с необходимыми модификациями) к задаче о прогибах круглой упругой оболочке при конечных закритических приращениях параметра сжатия пластины.

О решениях простейших задач ветвления решений уравнения Кармана в случае круглой пластины можно посмотреть в [28] – [38]. Соответствующие аналитические результаты всех известных работ имеют локальный характер. При их получении применялась, как правило, локальная схема Ляпунова-Шмидта (не вариационная) или галёркинская аппроксимация (для уравнений Кармана).

В работах Ю.И. Сапронова и А.В. Гнездилова [39], [40] было установлено, что ключевая функция, отвечающая за ветвление осесимметричных конфигураций круглой упругой пластины при её равномерном (по контуру) сжатию в направлении нормалей, глобально продолжима на пространство ключевых переменных (аналогичный вопрос для неосесимметричных конфигураций и для пластин произвольной формы пока открыт). Этот факт до сих пор никем не был использован при решении задачи о нелокальных ветвях бифурцирующих решений уравнения Кáрмана. В данной статье представлен результат разработки теоретической основы для численного решения этой задачи. За основу взята вычислительно-аналитическая процедура из [46] – [59] для изучения нелинейных колебаний, приспособленной здесь к задаче об упругом равновесии круглой пластины (при условии, что параметр нагрузки не превосходит третьего критического значения).

2.5.2 Функционал энергии круглой упругой пластины и его усеечения

Формы упругих равновесий круглой пластины, равномерно сжатой по краю (вдоль нормалей), в модели Кармана описывается системой двух уравнений [38]

$$\Delta^2 w + \lambda \Delta w - [w, \phi] = \Delta^2 \phi + \frac{1}{2}[w, w] = 0, \quad (2.32)$$

в которой Δ — оператор Лапласа, $[w, \phi] = w_{xx}\phi_{yy} + w_{yy}\phi_{xx} - 2w_{xy}\phi_{xy}$, w — функция прогиба, ϕ — функция напряжения, λ — параметр нагрузки. Уравнение (2.32) дополняется краевыми условиями, отвечающими характеру закрепления края пластины. Рассмотрим случай жесткого закрепления:

$$\phi = \phi_x = \phi_y = w = w_x = w_y = 0|_{\partial\Omega}. \quad (2.33)$$

Здесь Ω — область определения функций w, ϕ , заданная в виде единичного круга и интерпретируемая как геометрическая форма ненагруженной пластины:

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Уравнение (2.32) при краевых условиях (2.33) является уравнением Эйлера-Лагранжа экстремалей функционала полной энергии

$$V(w, \phi, \lambda) = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} (|\Delta w|^2 - |\Delta \phi|^2 - \lambda |\nabla w|^2 - \phi[w, w]) \, dx \, dy.$$

После перехода к полярным координатам $x = r \cos(\varphi)$, $y = r \sin(\varphi)$ и «спуска» в пространство осесимметричных функций $w = w(r)$ получим интеграл энергии в виде $V = 2\pi\widehat{V}$, где

$$\widehat{V} = \frac{1}{2} \int_0^1 r \left(|\widehat{\Delta}w|^2 - |\widehat{\Delta}\phi|^2 - \lambda \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 + \frac{1}{2r} \frac{d\phi}{dr} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 \right) dr,$$

$$\widehat{\Delta} = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr}.$$

После замены $v = \frac{dw}{dr}$, $\psi = \frac{d\phi}{dr}$ получим

$$U(v, \psi, \lambda) = \widehat{V}(w, \phi, \lambda) =$$

$$\frac{1}{2} \int_0^1 r \left(\mathcal{A}(v)v - \mathcal{A}(\psi)\psi - \lambda v^2 + \frac{\psi v^2}{2r} \right) dr,$$

где

$$\mathcal{A} = -\frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \frac{1}{r^2} I$$

— дифференциальный оператор Бесселя.

Стандартным редуцирующим переходом к функционалу

$$\tilde{U}(v, \lambda) = \sup_{\psi} U(v, \psi, \lambda) =$$

$$\frac{1}{2} \int_0^1 r \left(\mathcal{A}(v)v - \lambda v^2 + \frac{1}{4} \mathcal{A}^{-1} \left(\frac{v^2}{r} \right) \frac{v^2}{r} \right) dr \quad (2.34)$$

избавляемся от переменной ψ .

Устойчивые осесимметричные конфигурации пластины соответствуют точкам локального минимума функционала (2.34).

Из краевых условий (2.33) и условия осевой симметрии следует, что v удовлетворяет граничным условиям

$$v(0) = v(1) = 0. \quad (2.35)$$

Если наложить ограничение на разность прогиба в срединной точке пластины (по сравнению с краем), то мы придем к задаче на экстремум для функционала (2.34) при условии

$$\int_0^1 v dr = const.$$

Последняя задача сводится к задаче поиска экстремалей расширенного функционала (без ограничений)

$$\mathcal{U} := \tilde{U}(v, \lambda) + q \int_0^1 v dr, \quad q \in \mathbb{R}^1. \quad (2.36)$$

Обозначим через E пространство функций класса C^2 на отрезке $[0, 1]$, удовлетворяющих краевым условиям (2.35), а через $\mathcal{H}$ — пространство функций с суммируемым весовым квадратом на $[0, 1]$ и скалярным произведением $\langle u, v \rangle = \int_0^1 ruvdr$.

Очевидно, что функционал $\mathcal{U}$ является гладким на этом пространстве.

Теорема 2.2. ([39], [40]) Пусть $e_1, \dots, e_n$ — такой линейно независимый набор функций в E , что при $\lambda \leq l$, где l — некоторое положительное число, квадратичная форма

$$\langle (\mathcal{A} - \lambda I)v, v \rangle > 0, \quad v \neq 0, \quad v \in E \cap \text{Lin}(e_1, \dots, e_n)^\perp \quad (2.37)$$

(положительна на $E \cap \text{Lin}(e_1, \dots, e_n)^\perp$ — ортогональном дополнении к $\text{Lin}(e_1, \dots, e_n)$ в метрике $\langle u, v \rangle$ пространства $\mathcal{H}$). Тогда 1) функция

$$W(\xi, \lambda) = \inf_{v: \langle v, e_j \rangle = \xi_j, j=1, \dots, n} \mathcal{U}(v, \lambda), \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n), \quad \lambda \leq l,$$

является гладкой на $\mathbb{R}^n$; 2) существует взаимно однозначное соответствие между множествами критических точек функционала $\mathcal{U}$ и функции W , сохраняющее коранги и индексы Морса критических точек.

Доказательство имеется в [46].

Пусть

$$E_0 = E \cap \text{Lin}(e_1, \dots, e_n)^\perp, \quad F_0 = C([0, 1]) \cap \text{Lin}(e_1, \dots, e_n)^\perp.$$

Экстремаль $v = \Phi(\xi)$ функционала $\tilde{U}|_{E_\xi}$, где $E_\xi = \{v \in E : \langle v, e_j \rangle = \xi_j, j = 1, \dots, n\}$, задается уравнением

$$g(v, \lambda) = 0, \quad v \in E_\xi, \quad (2.38)$$

где g — отображение $E_\xi \longrightarrow F_0$, заданное соответствием

$$v \longmapsto f(v, \lambda) - \sum_{j=1}^n \langle f(v, \lambda), \tilde{e}_j \rangle \tilde{e}_j,$$

$$f(v, \lambda) := \mathcal{A}(v) - \lambda v + \frac{v}{2r} \mathcal{A}^{-1} \left(\frac{v^2}{r} \right) - q,$$

$\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n$ — любой ортонормированный базис в $Lin(e_1, \dots, e_n)$. Отображение g является локально диффеоморфно обратимым. Последнее вытекает из фредгольмовости g (индекса 0), положительности (2.37) и следующего утверждения

Для функционала $S(v) = \left\langle \mathcal{A}^{-1} \left(\frac{v^2}{r} \right), \frac{v^2}{r} \right\rangle$ выполняется соотношение (условие выпуклости):

$$\frac{d^2}{dv^2} S(v, \lambda)(h, h) \geq 0, \quad \forall v, h \in E, \lambda < l.$$

Доказательство этого факта можно осуществить непосредственной проверкой. Сначала нужно заметить, что

$$\frac{d^2 S}{dv^2}(v, \lambda)(h, h) = \left\langle \mathcal{A}^{-1} \left(\frac{v^2}{r} \right), \frac{h^2}{r} \right\rangle + 2 \left\langle \mathcal{A}^{-1} \left(\frac{vh}{r} \right), \frac{vh}{r} \right\rangle. \quad (2.39)$$

Второе слагаемое здесь неотрицательно вследствие положительной определенности оператора $\mathcal{A}$. Положительность же первого слагаемого вытекает из следующего утверждения.

Теорема 2.3. *Оператор $\mathcal{A}^{-1} : F \longrightarrow E$ позитивен: $v(r) \geq 0 \forall r$, если $\mathcal{A}(v)(r) \geq 0 \forall r$.*

Из сформулированных выше утверждений вытекает единственность и гладкая зависимость решения $v = \varphi(\xi, \lambda)$ уравнения (2.38) от ξ и λ (если решение существует).

Теорема 2.4. *При каждом значении параметра λ , при котором выполнено условие (2.37), уравнение (2.38) разрешимо.*

Теорема 2.5. *Для V , рассмотренном на соответствующем ему энергетическом пространстве H_1 , выполнено условие (L), состоящее из следующих требований:*

- 1) для градиента имеет место представление $f(x, \delta) = I + c(x, \delta)$, где c — вполне непрерывное отображение из $H_1 \times \Delta$ в H_1 (условие представимости градиента в форме Лере-Шаудера);
- 2) существует такая последовательность конечномерных подпространств

$$\{E_{n+m}\} = E_{n+0} = N \subset E_{n+1} \subset E_{n+2} \subset \dots \subset E_{n+m} \subset \dots,$$

что последовательность ортопроекторов $P_m : H_1 \longrightarrow E_{n+m}$ сильно сходится к единице на пространстве H_1 ;

- 3) ограничение $V|_{E_{n+m}}$ является коэрцитивной функцией.

Две последние теоремы позволяют реализовывать алгоритм нелокального вычисления ключевой функции, описанный во второй главе.

2.5.3 Построение приближений к ключевой функции от двух переменных

Пусть значение параметра λ не превосходит третьего критического значения [36], [38], и пусть e_1, e_2 — первые две собственные функции (нормированные в H_1 функции Бесселя) линейной части уравнения Кáрманна, выбранные из тех, для которых выполнены краевые условия. Положим $N = \text{Lin}(e_1, e_2)$. Ниже параметры λ, q будут отброшены (будут входить «по умолчанию»).

На основе сформулированных выше предложений можно утверждать, что при любом $u \in N$ существует $\inf_{v \in N^\perp} V(u + v)$. Таким образом, следуя схеме Ляпунова-Шмидта, можно разыскивать ключевую функцию в виде:

$$W(\xi) \equiv V(u + \Phi(\xi)), \quad u := \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2, \quad \Phi(\xi) \in N^\perp. \quad (2.40)$$

Основная трудность заключается в построении приближений $\tilde{\Phi}(\xi)$ к функции $\Phi(\xi)$. Одним из традиционных методов ее построения является метод кратчайшего спуска (по градиенту), в соответствии с которым последовательность приближений $\tilde{\Phi}(\xi)$ приводит к последовательности приближений ключевой функции $W_{(k)} = V(u + v_k)$. Внутри процесса спуска по градиенту можно использовать итерационный метод Ньютона [65]. Если на каждом шаге рассматривать (выпуклую) функцию $w(s) = V(u + v_k + s \nabla_k)$, $s \geq 0$, $\nabla_k = -\text{grad} V(u + v_k)$, то приближение к точке минимума приводит (по методу Ньютона) к итерациям

$$h_{k+1} = s_{k+1} \nabla_k, \quad s_k = \frac{\langle f_\lambda(u + v_k), \nabla_k \rangle_1}{\left\langle \frac{\partial f}{\partial x}(u + v_k) \nabla_k, \nabla_k \right\rangle_1}.$$

В [15] при построении приближений к ключевой функции использовались галеркинские усечения функционала энергии. Первым шагом в построении галеркинских приближений является выбор набора базисных функций в E , которые должны удовлетворять граничным условиям и образовывать полную систему в H . В рассмотренной здесь задаче весьма удобно воспользоваться стандартной последовательностью функций Бесселя $\{e_k\}$ [36], [38], [96].

В итоге получим систему уравнений (нелинейная аппроксимация Ритца-

Галеркина)

$$\left\langle f \left(\sum_{k=1}^N \xi_k e_k \right), e_j \right\rangle_1 = 0, \quad j = 1, \dots, N.$$

В результате указанных построений можно получить (сходящуюся) итерационную последовательность, позволяющую строить ключевую функцию с любой требуемой точностью. Соответствующие рассуждения по обоснованию сходимости итераций приведены во второй главе.

После получения приближенной ключевой функции $\widetilde{W}$ можно осуществить приближенное построение дискриминантного множества (*каустики*) — множества значений параметров (λ, q) , при которых существуют вырожденные критические точки. Каустика определяется системой уравнений:

$$\begin{cases} \text{grad } \widetilde{W}(\xi_1, \xi_2) = 0, \\ \text{Hessian } \widetilde{W}(\xi_1, \xi_2) = 0, \end{cases} \quad (2.41)$$

Вопрос структурной устойчивости (грубости) каустики, означающей стабилизацию ее топологического строения при усилении точности приближения, решается теми рассуждениями, которые были приведены в [13], [16].

После получения информации о строении каустики проще изучать *bif*-расклады экстремалей и взаимные примыкания раскладов экстремалей (соответствующих ячейкам регулярности — компонентам связности дополнения к каустике). Более подробному описанию результатов изучения геометрического строения каустики, линий уровней ключевой функции и прогибов пластины будет посвящена отдельная публикация.

2.5.4 Пример итерационного алгоритма полиномиального приближения к ключевой функции для уравнения Кармана. Исходные данные

Исходное уравнение $v + g_\lambda(v) :=$

$$:= v + \lambda \mathcal{A}^{-1}(v) + \mathcal{A}^{-1} \left(\frac{v}{2r} \mathcal{A}^{-1} \left(\frac{v^2}{r} \right) \right) = \tilde{q}; \quad (2.42)$$

функционал действия

$$\mathcal{U}(v, \lambda, q) = \frac{1}{2} (\|v\|_1 - \lambda \langle \mathcal{A}^{-1}(v), v \rangle_1 + \mathcal{S}(v)) + \langle v, \tilde{q} \rangle_1; \quad (2.43)$$

$$u := \xi_1 e_1 + \xi_1 e_1, \quad v := Bw, \quad \tilde{q} := \mathcal{A}^{-1}q, \quad q := q_1 e_1 + q_2 e_2; \quad (2.44)$$

e_1, e_2 — нормированные (в H_1) первая и вторая функции Бесселя (на $[0, 1]$).

Проектор

$$Q : x \mapsto y := \sum_{k=3}^m \langle x, e_k \rangle_1 e_k;$$

$e_3, e_4, \dots$ — последующие функции Бесселя.

Интегральный оператор, обратный к весовому 2-кратному дифференцированию по r ,

$$B : w := \sum_k \langle x, e_k \rangle_1 e_k \mapsto v := \sum_k \beta_k \langle x, e_k \rangle_1 e_k;$$

2.5.5 Операторное уравнение. Итерации

$$\begin{aligned} v &= Q g_\lambda(u + v), \quad v \perp e_1, e_2, \\ g_\lambda(v) &:= \lambda B(v) + B G(v) - \tilde{q}; \\ G(v) &:= \frac{v}{2r} B \left(\frac{v^2}{r} \right) \end{aligned}$$

— кубический оператор.

$$v^{(k+1)} = Q g_\lambda(u + v^{(k)}).$$

2.5.6 Функции Бесселя

$$e_k(r) = d_k Bessel(\alpha_k r), \quad k = 1, 2, \dots;$$

где d_k — нормирующая константа (в H_1), $\{\alpha_k\}$ — последовательность корней основной (первой) функции $Bessel(r)$ при краевых условиях (2.33) [96].

Последовательность первых девяти корней следующая (см. [96], стр. 561):

2,404; 5,520; 8,654; 11,792; 14,931; 18,076; 21,212; 24,353; 27,494.

Здесь мы приведем лишь некоторые выборочные изображения, изготовленные в среде MAPLE-11.

На рисунках приведены изображения приближенно вычисленной ключевой функции и прогибов пластины (соответствующих критическим точкам редуцированного функционала энергии).

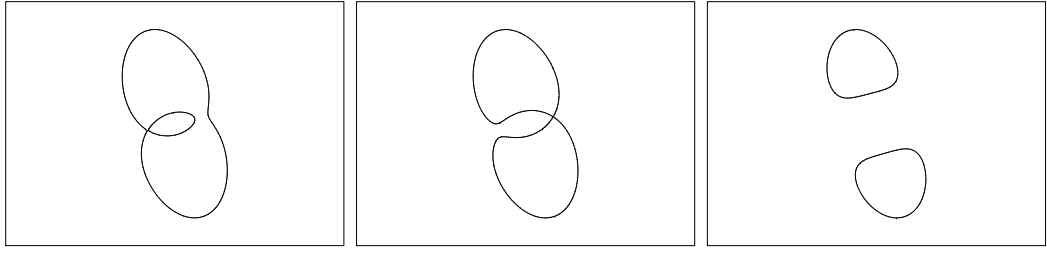


Рис. 4

Пример изображений линий уровня возмущенной ключевой функции (при наличии возмущения).

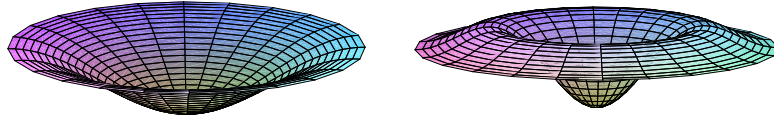


Рис. 5

Примеры изображений прогибов пластины.

2.5.7 Уравнение Кармана в случае прямоугольной пластины

Равновесное состояние упругой прямолинейной пластины, продольно сжатой и шарнирно закрепленной на крае, описывается уравнениями Кармана (промасштабированными) [36], [38]:

$$\Delta^2 w - [w, \varphi] + \lambda w_{xx} = \Delta^2 \varphi + \frac{1}{2}[w, w] = 0 \quad (2.45)$$

при краевых условиях

$$w = \Delta w = \varphi = \Delta \varphi = 0|_{\partial\Omega_a}. \quad (2.46)$$

Через w и φ в этих уравнениях обозначены функции прогиба и напряжения пластины, Δ — гармонический оператор Лапласа,

$$[w, \varphi] := w_{xx}\varphi_{yy} + w_{yy}\varphi_{xx} - 2w_{xy}\varphi_{xy},$$

$$\Omega_a = [0, a] \times [0, 1],$$

λ — параметр нагрузки.

Пусть H^4 — пространство соболевских функций класса W_2^4 , удовлетворяющих (2.46). Уравнение (2.45) является уравнением Эйлера – Лагранжа

экстремалей функционала V

$$V(w, \varphi, \lambda) = \frac{1}{2} (|\Delta w|^2 - \lambda |w_x|^2 - |\Delta \varphi|^2 - \langle [w, w], \varphi \rangle) \quad (2.47)$$

на пространстве $H^4 \times H^4$. Здесь

$$|\varphi|^2 = \langle \varphi, \varphi \rangle := \int_{\Omega_a} \varphi^2(x, y) dx dy.$$

Как правило, исследование функционала (2.47) проводится через редукцию к функционалу $\tilde{V}$

$$\tilde{V} = \sup_{\varphi: \varphi \in H^4} V(w, \varphi, \lambda). \quad (2.48)$$

Маргинальное отображение $H^4 \longrightarrow H^4 \times H^4$, отвечающее данной редукции, задается соответствием

$$w \mapsto \left(w, -\frac{1}{2} \Delta^{-2} [w, w] \right)$$

Следовательно, для (2.48) имеет место представление

$$\hat{V}(w, \lambda) = \frac{1}{2} (|\Delta w|^2 - \lambda |w_x|^2) + \frac{1}{8} |\Delta^{-1} [w, w]|^2. \quad (2.49)$$

Через Δ^{-1} обозначается оператор Грина $\psi \longmapsto \varphi$, где φ — решение уравнения Пуассона

$$\Delta \varphi = \psi, \quad \varphi|_{\partial \Omega_a} = 0.$$

В [35] установлено, что оператор Δ действует как изоморфизм из пространства функций гильбертовского класса $C^{2+\alpha}(\Omega_a)$, удовлетворяющих условию $\varphi|_{\partial \Omega_a} = 0$, на F_0 — подпространство функций ψ в пространстве $F = C^{0+\alpha}(\Omega_a)$, удовлетворяющих условию согласования:

$$\psi(0, 0) = \psi(a, 0) = \psi(0, 1) = \psi(a, 1).$$

Обозначим теперь через E банахово пространство $\{w \in H^4 : \Delta^2 w \in F\}$ с нормой

$$\|w\|_E = \|\Delta^2 w\|_{C^{0+\alpha}(\Omega_a)}.$$

Через функционал (2.49) в теории упругих оболочек оценивается устойчивость равновесных состояний: состояние устойчиво, если оно реализует точку локального минимума функционала (2.49). Потеря устойчивости

прямолинейной формы равновесия ($w = 0$) происходит при переходе λ через критическое значение (верхнюю критическую нагрузку):

$$\lambda^*(a) = \sup \left\{ \bar{\lambda} : \frac{\partial^2 \hat{V}}{\partial w^2}(0, \lambda)(h, h) > 0, \quad \forall \lambda < \bar{\lambda}, \quad h \neq 0 \right\}.$$

Верхняя критическая нагрузка непрерывно и кусочно гладко зависит от длины a пластины. Разрыв производной $\lambda^*(a)$ происходит в точках $a_m = \sqrt{m(m+1)}$, $m = 1, 2, \dots$. При $a = a_m$ и $\lambda = \lambda_m := \lambda^*(a_m)$ в нуле теряется устойчивость по двум модам:

$$e_1 = 2 \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin(\pi y), \quad e_2 = 2 \sin\left(\frac{(m+1)\pi x}{a}\right) \sin(\pi y).$$

Анализ соответствующих закритических равновесий сводится к изучению критических точек ключевой функции

$$W(\xi, \lambda, a) := \inf_{v \in \mathcal{O}_*} V(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + v, \lambda), \quad \xi \in \mathcal{O}^2 \quad (2.50)$$

(при (λ, a) , достаточно близких к (λ_m, a_m)). Здесь $\mathcal{O}^2$ и $\mathcal{O}_*$ — достаточно малые окрестности нулей в $\mathbb{R}^2$ и $E_* = \{v \in E : \langle v, e_1 \rangle = \langle v, e_2 \rangle = 0\}$. Локальный анализ (2.50) успешно осуществляется благодаря тому, что имеет место представление

$$W(\xi, \lambda, a) = \frac{1}{2} (\alpha_1(\lambda, a) \xi_1^2 + \alpha_2(\lambda, a) \xi_2^2) + \sum_{i,j=1}^2 h_{i,j} \xi_1^2 \xi_2^2 + \dots$$

где α_1, α_2 — собственные значения оператора $\Delta^2 + \lambda \frac{\partial^2}{\partial x^2}$, отвечающие собственным векторам e_1, e_2 ,

$$h_{j,j} = \frac{1}{8} |\Delta^{-1}[e_j, e_j]|^2,$$

$$h_{1,2} = h_{2,1} = \frac{1}{8} (\langle \Delta^{-1}[e_1, e_1], \Delta^{-1}[e_2, e_2] \rangle + 2|\Delta^{-1}[e_1, e_2]|^2).$$

Компьютерные вычисления показывают, что при нескольких начальных значениях m выполняется неравенство

$$h_{1,2} > (h_{1,1} h_{2,2})^{1/2}, \quad (2.51)$$

благодаря которому можно осуществить полный локальный анализ бифуркации равновесий.

Замечание 2.1. Неравенство (2.51) означает положительную определенность формы

$$\sum_{i,j=1}^2 h_{i,j} \xi_i \xi_j$$

в положительной четверти плоскости $\mathbb{R}^2$. Вопрос о знакоопределенности этой формы при произвольном t пока остается открытым.

Замечание 2.2. Вопрос о существовании нелокальной редукции (гладкого продолжения ключевой функции (2.50) на конечную область при $\lambda > \lambda_1$) для прямоугольной пластины также открыт (в аналогичной ситуации для круглой пластины вопрос глобальной конечномерной редуцируемости решен положительно).

2.6 Моделирование диффузорных течений жидкости

Упрощенные варианты уравнения Навье-Стокса используются при изучении диффузорных течений, начиная с основополагающих работ Джефффри [107] и Гамеля [103] (1915 и 1917 гг.). Сведения по математическому моделированию на этой основе течений в плоском диффузоре можно найти в [1] – [69].

В задаче о динамике жидкости в диффузорах (плоском, объемном и диффузоре-улитке) допускается применение нелокальной редуцирующей схемы Ляпунова-Шмидта, посредством которой можно сколь угодно точно описывать динамику скоростей частиц жидкости в областях произвольных геометрических форм. При таком подходе извлекается и дополнительная информация о «качественных свойствах» течений, полученная на основе аналитических и геометрических свойств ключевых отображений и ключевых функций.

Базой вычислительного процесса в случае плоского диффузора часто является редукция к краевой задаче для ОДУ (посредством подстановки Гамеля для вихревой функции) с последующим использованием свойства полной интегрируемости полученного ОДУ. Но, как известно, представление решений через эллиптические функции не удовлетворяет современным требованиям к точности приближений — вследствие недостаточной точности существующих таблиц значений эллиптических функций и интегралов. В работах [1] – [2] представлены результаты построения приближенных решений редуцированного уравнения на основе специальной версии метода ускоренной сходимости. В этих же работах дано обоснование необходимости применения приближенных методов к построению

решений — в противовес методу использования точного аналитического решения в эллиптических функциях.

Наш подход основан в целом на двухшаговой редукции — функциональной редукции к краевой задаче для ОДУ с квадратичной нелинейностью (первый шаг) и редукция к конечномерному алгебраическому уравнению (второй шаг) — через нелинейную аппроксимацию Галеркина-Ритца по вариационной схеме Ляпунова-Шмидта.

Общая структура предложенного ниже алгоритма сохраняется при переходе к объемному диффузору и диффузору-улитке. В доработке нуждаются лишь отдельные блоки представленного в статье алгоритма, что вызвано наличием аналитических препятствий, связанных с усложнением редуцирующих переходов.

2.6.1 Двумерная жидкость, уравнения Навье-Стокса и Гельмгольца

Обратимся к двумерному уравнению Навье-Стокса [62]

$$\dot{v} + \frac{\partial v}{\partial x} v = \nu \Delta(v) - \text{grad}(p). \quad (2.52)$$

Здесь $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ — двумерный лапласиан, $\frac{\partial v}{\partial x}$ — матрица Якоби вектора скорости $v = v(x_1, x_2, t)$ по компонентам точки $x = (x_1, x_2)$, $p = p(x_1, x_2, t)$ — давление. Искомое поле векторов скорости v считается заданным на некоторой ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ с гладкой границей и «стандартными» краевыми условиями.

В полярных координатах стационарное уравнение Навье-Стокса принимает следующий вид (см. [62]):

$$\left. \begin{aligned} (U \cdot \tilde{\nabla})u - \frac{v^2}{r} &= -\frac{\partial p}{\partial r} + \left(\tilde{\Delta}u - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{u}{r^2} \right), \\ (U \cdot \tilde{\nabla})v + \frac{uv}{r} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \left(\tilde{\Delta}v + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v}{r^2} \right), \end{aligned} \right\} \quad (2.53)$$

где

$$(U \cdot \tilde{\nabla}) = u \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad \tilde{\Delta} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

К уравнениям Навье-Стокса добавляется уравнение неразрывности

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Имеют место также следующие соотношения (в полярных координатах):

$$\text{grad} = \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right)^\top, \quad \text{sgrad} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, -\frac{\partial}{\partial r} \right)^\top.$$

В преобразованиях, упрощающих уравнение (2.52), используются следующие соотношения (устанавливаемые непосредственной проверкой):

$$\operatorname{rot} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) = \operatorname{grad} (\Delta \psi); \quad \operatorname{rot} \left(\frac{\partial v}{\partial x} v \right) = [\psi, \Delta(\psi)].$$

Здесь $\operatorname{rot}(v) := \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}$, $\psi(x_1, x_2, t)$ — так называемая вихревая функция, $[\psi, \varphi]$ — якобиан функций ψ, φ .

Условие неразрывности $\operatorname{div}(v) = 0$ для двумерной жидкости в односвязной области приводит к тому, что решение обязано принимать следующий вид:

$$v := \operatorname{sgrad}(\psi) = \left(-\frac{\partial \psi}{\partial x_2}, \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \right)^\top,$$

Для функции ψ естественно потребовать выполнение граничного условия

$$(n, \operatorname{sgrad}(\psi)) \Big|_{\partial \Omega} = 0, \quad (2.54)$$

n — поле нормалей к границе области.

Пусть $u := \operatorname{rot}(v) = \Delta(\psi)$, и $\dot{u} = \operatorname{rot}(\dot{v}) = \Delta(\dot{\psi})$. Применив двумерный ротор к левой и правой частям уравнения (2.52), получим уравнение Гельмгольца ([62], стр. 406)

$$\Delta(\dot{\psi}) = [\Delta(\psi), \psi] + \nu \Delta^2(\psi). \quad (2.55)$$

2.6.2 Подстановка Гамеля и редукция к ОДУ

Анализ стационарного варианта

$$[\Delta(\psi), \psi] + \nu \Delta^2(\psi) = 0 \quad (2.56)$$

уравнения Гельмгольца (2.55) можно осуществить, используя редуцирующий переход к краевой задаче для ОДУ ([62], стр. 450-484). Наиболее известной редукцией является подстановка Гамеля, осуществляемая посредством сужения стационарного уравнения Гельмгольца на класс функций вида (см. [62], стр. 478) $\varphi = Q q(\theta)$. Ниже $Q := \int_0^\beta r u d\theta$ — поток жидкости через диффузор.

Используя соотношения

$$\Delta(\varphi) = Q \frac{q''}{r^2}, \quad [\Delta(\varphi), \varphi] = -Q^2 \frac{2q''q'}{r^4}, \quad \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(\frac{q''}{r^2} \right) = \frac{6q''}{r^4},$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{q''}{r^2} \right) = -\frac{2q''}{r^4}, \quad \frac{1}{r^2} \left(\frac{q''}{r^2} \right)'' = \frac{q''''}{r^4}$$

получим (после подстановки Гамеля) вместо (2.56) следующее ОДУ:

$$q'''' + 4q'' - 2\mathcal{R}q''q' = 0, \quad (2.57)$$

где $\mathcal{R} = \frac{Q}{\nu}$ — число Рейнольдса.

В случае плоского диффузора уравнение (2.57) дополняется краевыми условиями (см. (2.54))

$$q(0) = 0, \quad q(\beta) = 1, \quad q'(0) = q'(\beta) = 0.$$

Условие $q(\beta) = 1$ вытекает из того, что

$$\int_0^\beta q' d\theta = \frac{1}{Q} \int_0^\beta r u d\theta = 1$$

— (нормированный) поток через сечение диффузора окружностью $r = \text{const}$ (см. [1], [2]).

После масштабирующего преобразования угловой переменной $\theta \rightarrow \beta\theta$ получим краевую задачу

$$q'''' + \lambda q'' - 2\tilde{\mathcal{R}}q''q' = 0, \quad (2.58)$$

$$q(0) = 0, \quad q(1) = 1, \quad q'(0) = q'(1) = 0, \quad (2.59)$$

где

$$\lambda = 4\beta^2, \quad \tilde{\mathcal{R}} = \beta\mathcal{R}.$$

Замечание 2.3. Нетрудно установить, что краевая задача (2.58) – (2.59) является вариационной: левая часть уравнения (2.58) является градиентом функционала

$$V = \int_0^1 L(q'', q') d\theta, \quad L(q'', q') = \frac{(q'')^2}{2} - \lambda \frac{(q')^2}{2} + \tilde{\mathcal{R}} \frac{(q')^3}{3}. \quad (2.60)$$

Таким образом, решения уравнения (2.58) являются экстремалами функционала (2.60) (при условии (2.59)). Следовательно, построение решений уравнения (2.58) можно осуществлять на основе локальной и нелокальной версий вариационного метода Ляпунова-Шмидта.

Замечание 2.4. В работах [1], [2] представлены результаты построения приближенных решений уравнения (2.58) на основе специальной версии метода ускоренной сходимости. В этих же работах дано

обоснование необходимости применения приближенных методов к построению решений уравнения (2.58) — в противовес методу использования точного аналитического решения в эллиптических функциях. Такая возможность имеется вследствие интегрируемости уравнения (2.58). Представление решений через эллиптические функции не удовлетворяет современным требованиям к приближениям вследствие недостаточной точности ($10^{-4} - 10^{-6}$) существующих таблиц значений эллиптических функций и интегралов. Требуемая точность в современных прикладных задачах — $10^{-8} - 10^{-10}$ и выше.

После первичного интегрирования уравнения (2.58) и замены $q' = u$ получим краевую задачу

$$u'' + \lambda u - \tilde{\mathcal{R}} u^2 = c, \quad c = \text{const}, \quad (2.61)$$

$$u(0) = u(1) = 0, \quad (2.62)$$

при дополнительном интегральном ограничении

$$\int_0^1 u d\theta = 1. \quad (2.63)$$

Левая часть уравнения (2.61) является градиентом функционала

$$\int_0^1 \frac{1}{2} \left((u')^2 - \lambda u^2 \right) + \frac{1}{3} u^3 d\theta \quad (2.64)$$

при краевых условиях (2.62). Этот функционал удобно рассматривать (см. [46]) на гильбертовом пространстве $H^1[0, 1]$, состоящем из абсолютно непрерывных функций, удовлетворяющих условию (2.62) и имеющих производную класса $L_2[0, 1]$. Скалярное произведение в $H^1[0, 1]$ задается соотношением $\langle u, v \rangle_1 = \int_0^1 u'v' d\theta$.

Интегрирование (вторичное) уравнения (2.61) приводит следующему соотношению (с двумя константами c, d):

$$\frac{1}{2} ((u')^2 + \lambda u^2) + \frac{\tilde{\mathcal{R}}}{3} u^3 - cu = d, \quad (2.65)$$

или $\frac{1}{2}(u')^2 + \frac{\tilde{\mathcal{R}}}{3}(u + \alpha)^3 - \tilde{c}u = \tilde{d}$, где $\alpha = \frac{\lambda}{2\tilde{\mathcal{R}}}$, $\tilde{c} = c + \frac{\lambda^2}{4\tilde{\mathcal{R}}}$, $\tilde{d} = d - \frac{\lambda^3}{24\tilde{\mathcal{R}}^2}$.

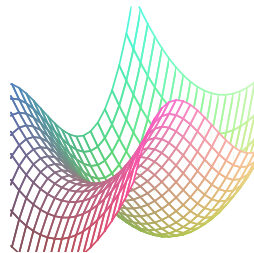


Рис. 6

График функции, равной левой части соотношения (2.65)

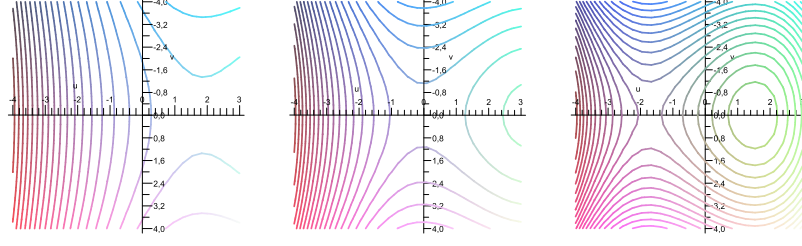


Рис. 7

Интегральные кривые уравнения (2.61) при различных значениях параметров

Изменение значений параметров приводит к изменению графика (рис. 6) и интегральных кривых (рис. 7), вплоть до слияния (на фазовом портрете рис. 7) локального минимума с седлом и их исчезновения после перехода вектора параметров $\lambda, \tilde{\mathcal{R}}, c$ через каустическую функцию $U = \frac{1}{2}(v^2 + \lambda u^2) + \frac{\tilde{\mathcal{R}}}{3}u^3 - cu$.

«Управляя» параметрами $\lambda, \tilde{\mathcal{R}}, c, d$, можно получить изображения всевозможных геометрических форм интегральных кривых и их расположений относительно системы координат u, v ($v := u'$) на фазовой плоскости. Рассматривая пересечения интегральными кривыми прямой $u = 0$, можно получить представление о тех фрагментах интегральных кривых, которые дают решение краевой задачи (2.61) – (2.62). Приближенные аналитические формулы для этих фрагментов можно получить, применив специальные вычислительные методы (например, методы использованные в [1], [2], [46], [61]).

2.6.3 Вариационный подход к анализу уравнения Джеффри-Гамеля. Случай нулевого значения числа Рейнольдса

Рассмотрим задачу (2.61) – (2.62) при $\tilde{\mathcal{R}} = 0$:

$$u'' + \lambda u = c, \quad u(0) = u(1) = 0, \quad \int_0^1 u d\theta = 1. \quad (2.66)$$

Решения задачи (2.66) являются критическими точками квадратичного функционала

$$\int_0^1 \frac{1}{2} ((u')^2 - \lambda u^2) d\theta \quad (2.67)$$

на гиперплоскости

$$\mathcal{M} = \{u \in H^1[0, 1] : \int_0^1 u d\theta = 1\} \quad (2.68)$$

в тройке $E = F = H = H^1[0, 1]$ (см. [46]).

Теорема 2.6. *Совокупность экстремалей сужения функционала (2.67) на гиперплоскость (2.68) есть объединение следующих серий векторов (при соответствующих значениях параметра λ):*

$$s_{0,k} = \frac{\pi k}{2} \sin(\pi k \theta), \quad \lambda = \lambda_{0,k} := (\pi k)^2; \quad (\mathcal{S}_0)$$

$$s_{\varepsilon,k} = a(\varepsilon) \sigma_\varepsilon(\theta), \quad \sigma_\varepsilon(\theta) := \sin(\varepsilon + (\pi k - 2\varepsilon)\theta) - \sin(\varepsilon), \quad (\mathcal{S}_\varepsilon)$$

$$\lambda = \lambda_{\varepsilon,k} := (\pi k - 2\varepsilon)^2; \quad k = 2m - 1, \quad m = 1, 2, \dots,$$

$a(\varepsilon)$ — величина, обратная к среднему значению функции $\sigma_\varepsilon(\theta)$;

$$\begin{aligned} s_{\varepsilon,2m} &= \frac{1}{\sin(\varepsilon)} (\sin(2\pi m \theta - \varepsilon) + \sin(\varepsilon)) = \\ &= \frac{1}{\sin(\varepsilon)} (\cos(\varepsilon) \sin(2\pi m \theta) + \sin(\varepsilon)(1 - \cos(2\pi m \theta))), \quad m = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (\mathcal{SC}_\varepsilon)$$

$$\lambda = \lambda_{\varepsilon,2m} := (2\pi m)^2, \quad m = 1, 2, \dots;$$

$$f_{0,j} = 1 - \cos(2j\pi\theta), \quad \lambda = \mu_{0,j} := (2j\pi)^2; \quad (\mathcal{C}_0)$$

$$f_{\varepsilon,j} = b(\varepsilon) \rho_\varepsilon(\theta), \quad \rho_\varepsilon(\theta) = \cos(\varepsilon + 2(j\pi - \varepsilon)\theta) - \cos(\varepsilon), \quad (\mathcal{C}_\varepsilon)$$

$$\lambda = \mu_{\varepsilon,j} := 4(j\pi - \varepsilon)^2, \quad j = 1, 2, \dots;$$

$b(\varepsilon)$ — величина, обратная к среднему значению функции $\rho_\varepsilon(\theta)$.

Доказательство проводится на основе общей формулы решений линейного неоднородного уравнения (2.66) с последующим подбором констант, соответствующих второму и третьему соотношениям в (2.66).

2.6.4 Случай ненулевого значения числа Рейнольдса. Нелокальная редукция Ляпунова-Шмидта

При малых значениях числа Рейнольдса экстремали функционала (2.64), суженного на гиперплоскость (2.68), можно вычислять как ветви экстремалей, зависящих от числа Рейнольдса, — посредством теории возмущений, основанной на непосредственном применении теоремы о неявной функции. При «конечных» значениях числа Рейнольдса возникает

необходимость применения более мощных средств нелинейного анализа [66], например, применения нелинейного метода Галеркина-Ритца по схеме Ляпунова-Шмидта.

Возможность нелокальной конечномерной редукции в краевой задаче (2.61) – (2.62) поясним сначала на простейшем примере: правая часть уравнения $x = \varepsilon(x - x^2 + 1)$ является сжимающим отображением $[-2, 2] \rightarrow [-2, 2]$ при достаточно малых значениях параметра ε . Зарождение свойства сжатия для отображения $x \rightarrow \varepsilon(x - x^2 + 1)$ отражено в следующих графиках.

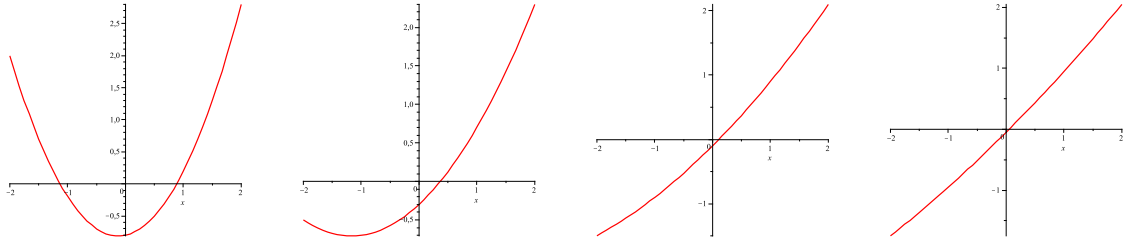


Рис. 8

Графики функции $f(x) = x - \varepsilon(x - x^2 + 1)$ при $\varepsilon = 0.8, 0.3, 0.1, 0.05$.

Аналогичный эффект сжимаемости имеет место и в случае общего операторного уравнения

$$x = \mathcal{B}(g(x, x) + \mathcal{C}x + c), \quad x \in F \quad (2.69)$$

в банаховом пространстве F , если норма $\|\mathcal{B}\|_F$ достаточно мала (здесь $g(x, x)$ — непрерывный квадратичный оператор $F \rightarrow F$, $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ — линейные непрерывные операторы $F \rightarrow F$, $c \in F$).

Свойство сжимаемости оператора $K(x) := \mathcal{B}(g(x, x) + \mathcal{C}x + c)$ позволяет разыскивать приближенные решения уравнения (2.69) посредством стандартных итераций $x_n = K(x_{n-1})$ [66].

Для осуществления нелокальной редукции Ляпунова-Шмидта в краевой задаче (2.61) – (2.62) запишем ее в виде операторного уравнения

$$f(w) := \mathcal{A}w - \lambda w + g(w, w) + c = 0, \quad w \in E, \quad (2.70)$$

где $E = C^2[0, 1] \cap \{w(0) = w(1) = 0\}$, $\mathcal{A} = -d^2/d\theta^2$, $g(w, w) := \tilde{\mathcal{R}} w^2$, $c = \text{const}$. Оператор f действует из E в $F = C[0, 1]$. Линейный оператор $\mathcal{A}$ является положительным и диагонализуемым:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} (\pi k)^2 \xi_k e_k, \quad (2.71)$$

$e_k = \frac{\sqrt{2}}{\pi k} \sin(\pi k \theta)$ — собственная функция оператора $\mathcal{A}$, отвечающая собственному значению $(\pi k)^2$. Заметим, что собственные функции e_k образуют ортонормированную систему в $H^1[0, 1]$.

Перепишем уравнение (2.70) в виде

$$w - \mathcal{A}^{-1}(g(w, w) + \lambda w - c), \quad w \in H^1[0, 1]. \quad (2.72)$$

Используя процедуру ортогонального разложения пространства в сумму подпространств, разобьем уравнение (2.72) в систему двух уравнений

$$\left. \begin{aligned} u - \mathcal{A}_1^{-1}(g_1(w, w)) + \lambda u - a &= 0, \\ v - \mathcal{A}_2^{-1}(g_2(w, w)) + \lambda v - b &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.73)$$

где $\mathcal{A}_1 := \mathcal{A}|_N$, $\mathcal{A}_2 := \mathcal{A}|_{N^\perp \cap E}$, $N := \text{Lin}(e_1, \dots, e_n)$, $w = u + v$, $u = \sum_{k=1}^n \xi_k e_k$, $v = \sum_{k=n+1}^{\infty} \xi_k e_k$, $a = \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k$, $b = \sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k e_k$, $\alpha_k = \langle c, e_k \rangle_1$. Второе уравнение системы (2.73) рассмотрим в пространстве функций $N^\perp \cap H^1[0, 1]$. Из спектральных свойств оператора A (см. (2.71)) вытекает, что при достаточно больших размерностях редукции n норма оператора $\mathcal{A}_2^{-1} : N^\perp \cap H^1 \rightarrow N^\perp \cap H^1$ становится малой и поэтому оператор $K(v) := \mathcal{A}_2^{-1}(g_2(u+v, u+v) + \lambda v - b)$ переводит некоторый шар $\|v\|_{H^1} \leq L$ (в $N^\perp \cap H^1$) в себя, являясь при этом сжимающим. То есть мы оказываемся в условиях второго замечания. Это означает, что решения второго уравнения системы (2.73) можно получать в аналитической форме

$$v = \Phi(u), \quad (2.74)$$

с любой наперед заданной точностью, посредством итераций $v_n = K(v_{n-1})$. Подставив выражение (2.74) в первое уравнение системы (2.73), получим так называемое ключевое уравнение

$$\tau(u) := f_1(u + \Phi(u)) = 0 \quad (2.75)$$

на конечномерном пространстве N . Все аналитические и топологические свойства исходного уравнения и его решений наследуются ключевым уравнением и его решениями [46]. Связь между решениями исходного и ключевого уравнений осуществляется формулой

$$w = u + \Phi(u).$$

Уравнение (2.75) является потенциальным с потенциалом (ключевой функцией)

$$W(u) := V(u + \Phi(u)), \quad u \in N.$$

Поиск и анализ экстремалей функционала V можно осуществлять посредством изучения экстремалей ключевой функции W . Вычисление функции W и анализ ее критических точек можно осуществлять по технологиям, изложенным в [13], [46], [61].

Заключительный этап предложенной здесь вычислительной схемы состоит в отборе тех решений задачи (2.61) – (2.62), для которых выполняется ограничение (2.63).

2.6.5 Области редуцируемости модельного уравнения

Посредством оценок размера образа отображения K и его константы Липшица можно точно указать область, на которой допускается конечномерная редукция уравнения $w = K(w)$.

Предварительно заметим, что имеют место следующие неравенства:

$$\|w\|_F \leq \|w\|_1 \quad \forall w \in H^1, \quad \|\mathcal{A}_2^{-1}(v)\|_1 \leq \frac{1}{\pi^2(n+1)^2} \|v\|_1 \quad \forall v \in N^\perp \cap H^1 \quad (2.76)$$

(см. (2.71)). Следовательно,

$$\|g(w.w)\|_1 = 2\sqrt{\int_0^1 (ww')^2 d\theta} \leq 2\|w\|_F \|w\|_1 \leq 2\|w\|_1^2. \quad (2.77)$$

Пусть $w \in T_L = \{w \in H^1[0, 1] : \|w\|_1 \leq L\}$. Из оценки (2.77) получаем

$$\|K(v)\|_1 = \|\mathcal{A}_2^{-1}(\lambda v + g_2(w.w) - b)\|_1 \leq \frac{1}{\pi^2(n+1)^2} (\lambda L + 2L^2 + \beta), \quad (2.78)$$

где $\beta = \|b\|_1$. Следовательно, если $\|K(v)\|_1 \leq L$, то оператор K переводит шар T_L в себя. Последнее утверждение справедливо в случае выполнения соотношения (см. (2.78))

$$\frac{1}{\pi^2(n+1)^2} (\lambda L + 2L^2 + \beta) \leq L$$

или

$$L^2 - pL + q \leq 0, \quad (2.79)$$

где $p = \frac{\pi^2(n+1)^2 - \lambda}{2}$, $q = \frac{\beta}{2}$. Для обеспечения свойства сжимаемости оператора $K : T_L \rightarrow T_L$ обратимся к оценке нормы разности значений K в произвольной паре точек v_1, v_2 :

$$\|K(v_2) - K(v_1)\|_1 = \|\mathcal{A}_2^{-1}(\lambda(v_2 - v_1) + \mathcal{R}((v_2 - v_1)^2 - (v_1 - v_1)^2))\|_1 \leq$$

$$\leq \frac{1}{\pi^2(n+1)^2}(\lambda + 4L)\|v_2 - v_1\|_1.$$

Получаем то, что для обеспечения свойства сжимаемости K достаточно потребовать выполнения условия

$$\gamma := \frac{1}{\pi^2(n+1)^2}(\lambda + 4L) < 1, \quad (2.80)$$

или, что одно и то же, условия

$$\lambda + 4L < \pi^2(n+1)^2. \quad (2.81)$$

Таким образом, установлено следующее утверждение:

Теорема 2.7. *При выполнении условий (2.79), (2.81) и при $\|u\|_1 \leq L$, оператор $K(v) := \mathcal{A}_2^{-1}(\mathcal{R}(u+v)^2 + \lambda v - b)$ переводит шар $T_L = \{v \in H^1[0,1] : \|v\|_1 \leq L\}$ в себя и является сжимающим отображением $T_L \rightarrow T_L$.*

Замечание 2.5. *Константа γ (см. (2.80)) позволяет оценивать скорость сходимости итераций $v_{m+1}(u) = K(v_m(u))$ к редуцирующему отображению $\Phi(u)$:*

$$\|v_m(u) - \Phi(u)\|_1 \leq \gamma^m \frac{\mathcal{D}}{1 - \gamma}, \quad \mathcal{D} = \frac{\mathcal{R}L + \beta}{\pi^2(n+1)^2}.$$

2.6.6 Примеры эпюр скоростей стационарных течений, соответствующих экстремалам V

Ниже приведены примеры приближенно вычисленных эпюр скоростей на окружности $r = 1$ для течений, близких к n -модовым, $n \leq 5$.

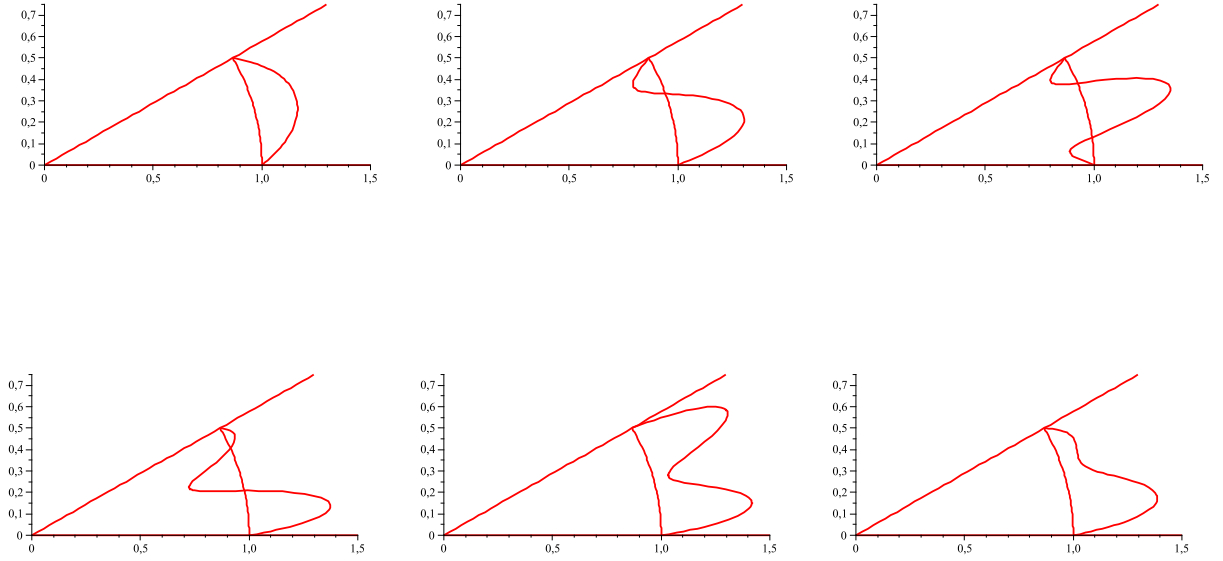


Рис. 9

Эпюры скоростей для течений, близких к n -модовым, $n \leq 5$.

Замечание 2.6. Вслед за вычислением поля скоростей можно вычислить давление непосредственно на основе (2.53) (уравнения Навье-Стокса в полярных координатах).

2.7 Типичные нормальные формы ключевых функции в постбифуркационном анализе упругих систем

Как отмечалось выше, кратности особенностей типа складки и сборки равны соответственно 2 и 3. Кратность выражает степень вырождения отображения в особой точке. Характер же вырождения выражается алгебраической структурой локального кольца Q , в котором содержится большое количество информации и о локальной геометрической структуре отображения $\mathcal{F}$. Этот факт составляет основу для многих методов алгебраической геометрии и теории особенностей гладких отображений. Структура локального кольца не изменяется при диффеоморфных заменах координат в образе и прообразе отображения. Интересно то, что 2-кратные и 3-кратные особенности однозначно определяют свое локальное кольцо. Но начиная с кратности 4 количество типов локальных

колец начинает резко возрастать, что свидетельствует о большом разнообразии локальных геометрических типов поведения гладких отображений в особых точках фиксированной кратности. Например, следующие отображения исчерпывают все типы локальных колец, отвечающих 4-кратным особым точкам:

$$(x, y^4 + xy^2), \quad (x^2, y^2), \quad (x^2 - y^2, xy). \quad (2.82)$$

Особенности этих отображений в начале координат имеют персональные названия: «ласточкин хвост», «гиперболическая омбилика» и «эллиптическая омбилика». Отображение (x^2, y^2) можно также записать в виде $(x^2 + y^2, xy)$ (обе эти формы сводятся друг к другу линейными обратимыми преобразованиями переменных). Отображения представляют собой нормальные аналитические локальные формы гладких отображений плоскости (в 4-кратных особых точках). Для особых точек более высоких кратностей появляются континуальные семейства типов локальных колец.

Названия некоторых особенностей (ласточкин хвост, вигвам, бабочка, кошелек и т.п.) связаны с геометрической структурой каустик и дискриминантных множеств, которые могут служить идентификаторами особенностей.

Для ограниченной миниверсальной деформации одномерной сборки

$$V = x^4 - \delta x^2 + \varepsilon x$$

каустика является кривой, носящей названия «клюв» или «шип». Ее параметризация легко выводится из соотношений $V' = V'' = 0$, определяющих вырожденную особую точку, то есть из уравнений

$$4x^3 - 2\delta x + \varepsilon = 6x^2 - \delta = 0.$$

Из этих соотношений получаем (локальную) параметризацию каустики

$$\delta = 6t^2, \quad \varepsilon = 8t^3.$$

Ее графическое изображение следующее:

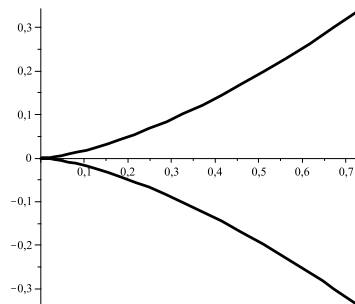


Рис. 10

Простейшая каустика — «клюв»

Для ограниченной миниверсальной деформации ласточкина хвоста

$$V = x^5 + \delta_3 x^3 + \delta_2 x^2 + \delta_1 x$$

каустику можно представить в виде множества сингулярных значений отображения «ласточкин хвост»

$$(t_1, t_2, t_3)^\top \longmapsto (t_1, t_2, 5t_3^4 + 3t_2t_3^2 + 2t_1t_3)^\top.$$

Соответствующие изображения сечений $\delta_3 = \text{const}$ каустики ласточкина хвоста выглядят следующим образом:

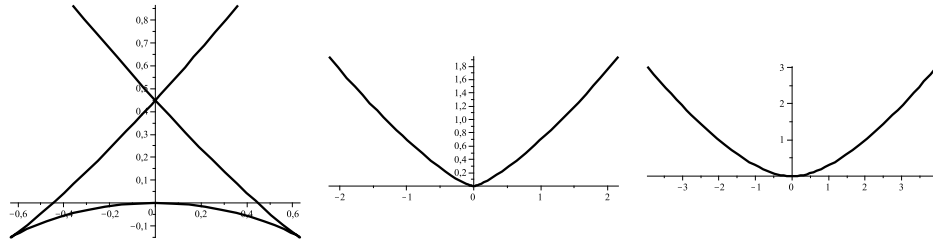


Рис. 11

Сечения каустики ласточкина хвоста при отрицательном, нулевом и положительном значениях δ_3 .

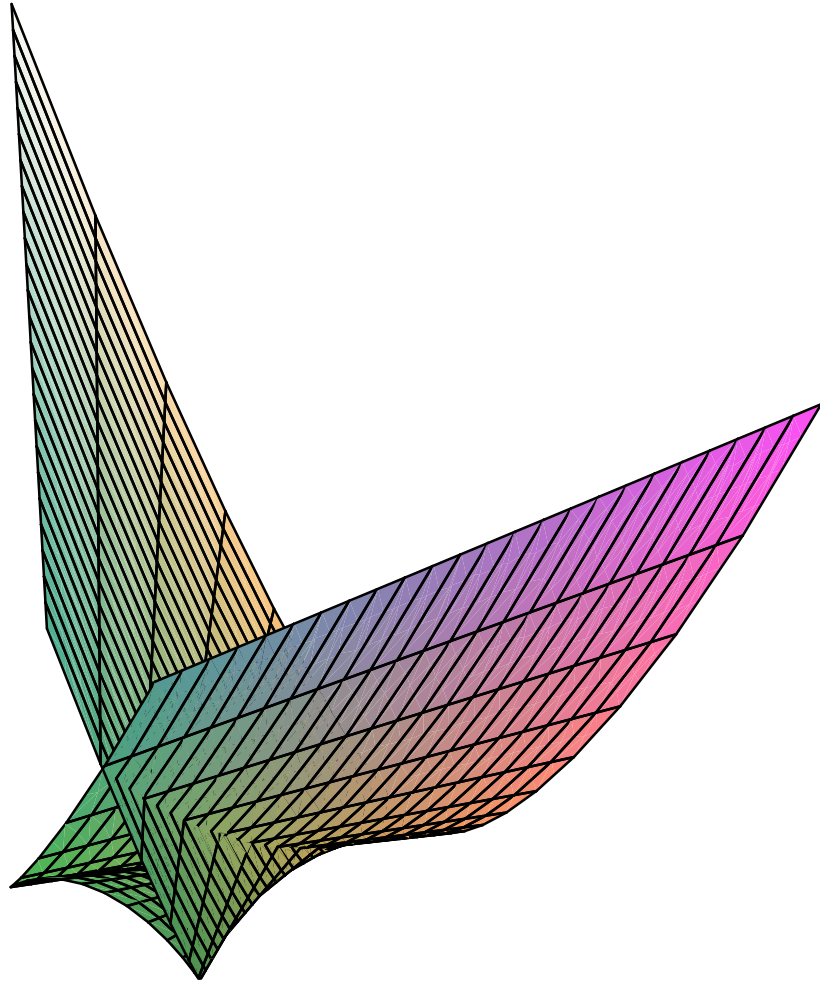


Рис. 12

Каустика «ласточкин хвост»

Параметризация сечения $\delta_3 = c : \delta_1 = 3cs^2 + 15s^4, \quad \delta_2 = -3cs - 10s^3$.

При изучении двухмодовых прогибов упругих систем появляются (после нормализации) ключевые функции вида:

$$x^4 + 2ax^2y^2 + y^4 + q_1x^2y + q_2xy^2 + \delta_1x^2 + \delta_2y^2 + 2\delta_3xy + \varepsilon_1x + \varepsilon_2y,$$

$q_i, \delta_j, \varepsilon_k$ — малые вещественные параметры, $a > -1$.

Особенность многочлена $x^4 + 2ax^2y^2 + y^4$ называется «двумерной сборкой».

Ниже приведены некоторые из характерных графиков и линий уровней возмущенной двумерной сборки.

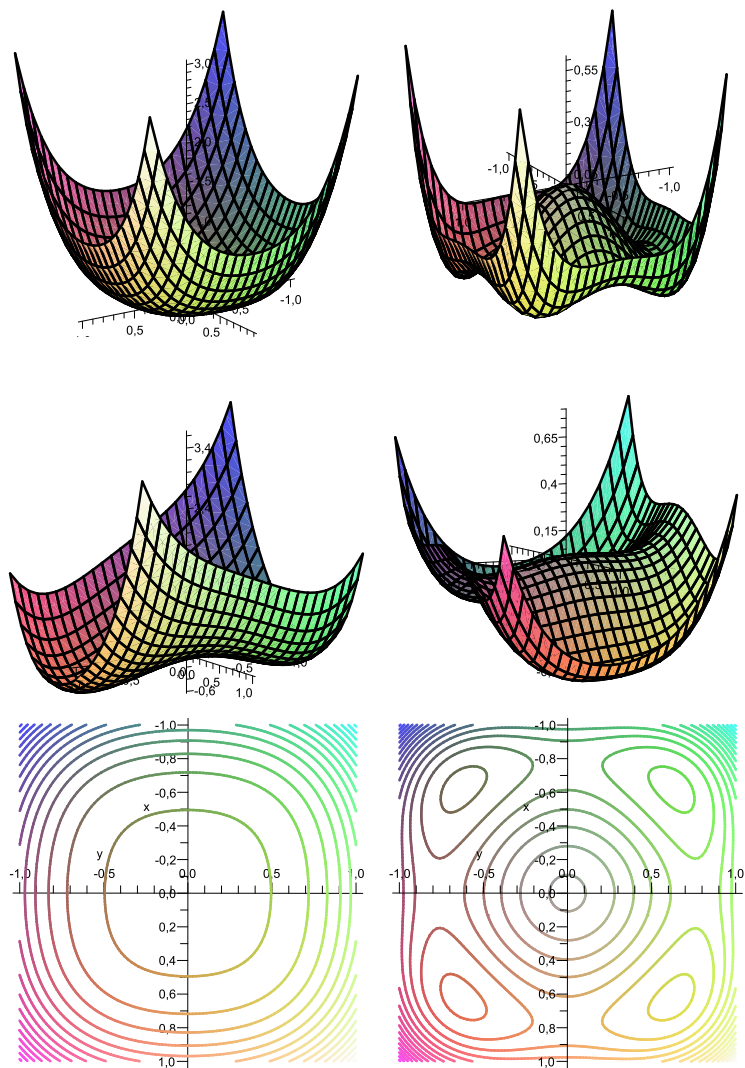
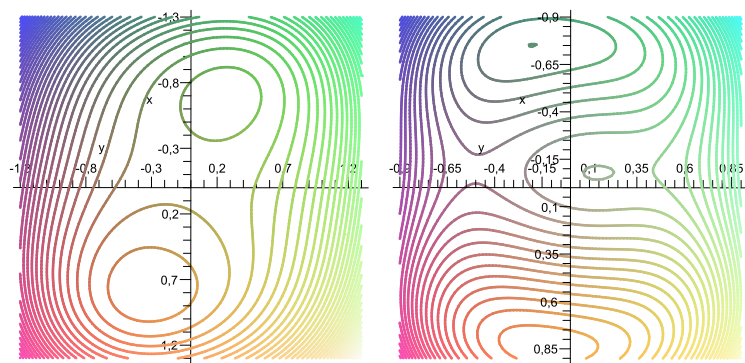


Рис. 13

Графики и линии уровней возмущенной двумерной сборки



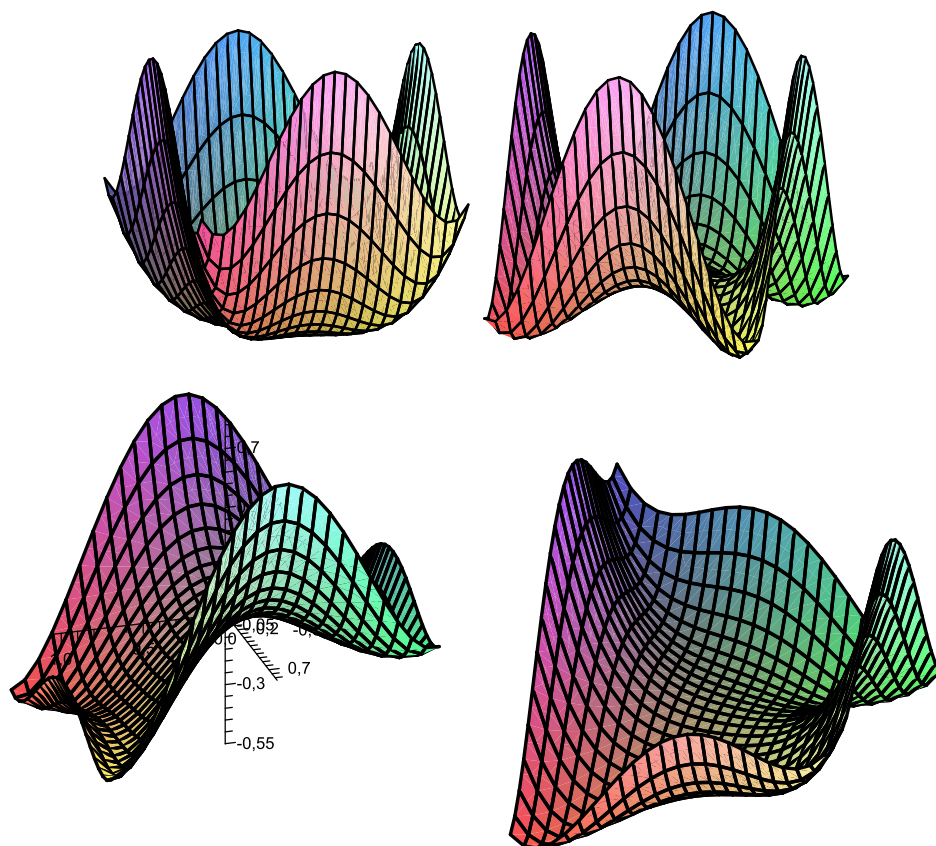
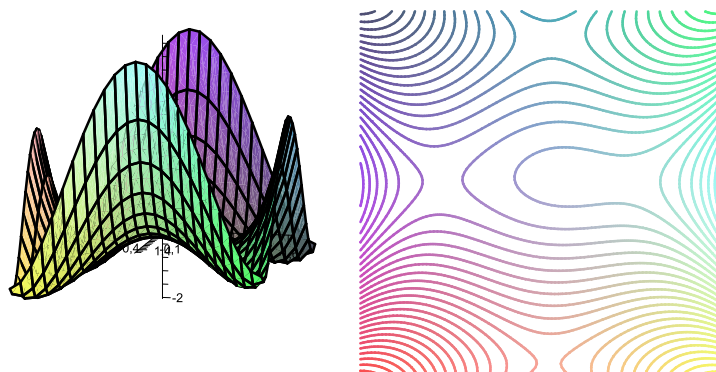


Рис. 14

Графики и линии уровней возмущенной двумерной сборки (продолжение)



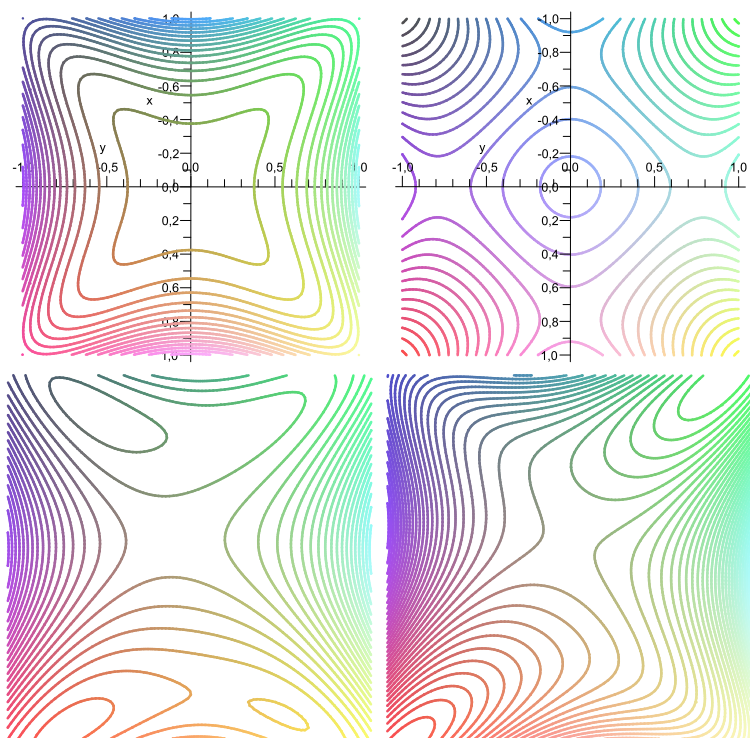


Рис. 15

Графики и линии уровней возмущенной двумерной сборки (окончание)

Литература

- [1] Л.Д. Акуленко, С.А. Кумакшев. Бифуркация основного стационарного течения вязкой жидкости в плоском диффузоре // Изв. РАН. МЖГ. 2005. № 3. - С. 25-36.
- [2] Акуленко Л.Д., Кумакшев С.А. Бифуркация многомодовых течений вязкой жидкости в плоском диффузоре // ПММ. 2008. Т. 72. Вып. 3. - С. 431-441.
- [3] Арнольд В.И. Математические методы классической механики // М.: Наука. 1989. 472 с.
- [4] Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения // Ижевск: Ижевская республиканская типография. 2000. – 366 с.
- [5] Арнольд В.И., Варченко А.Н., Гусейн-Заде С.М. Особенности дифференцируемых отображений // М.: МЦНМО. 2004. - 672 с.
- [6] Арнольд В.И., Хесин Б.А. Топологические методы в гидродинамике. М.: МЦНМО. 2007. - 392 с.
- [7] Атья М. Лекции по K –теории. - М.: Мир. 1967. - 261 с.
- [8] Бардин Б.С., Фурта С.Д. Локальная теория существования периодических волновых движений бесконечной балки на нелинейно упругом основании// Актуальные проблемы классической и небесной механики. М.: Эльф. - 1998. - С.13-22.
- [9] Бахвалов И.В., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. Издание восьмое // Физматлит. Невский диалект. Москва - Санкт-Петербург - 2000.
- [10] Бобылев Н.А., Емельянов С.В., Коровин С.К. Геометрические методы в вариационных задачах // М. : Магистр, 1998. - 658 с.
- [11] Богоявленский О.И. Опрокидывающиеся солитоны. Нелинейные интегрируемые уравнения / О.И. Богоявленский // - М. : Наука, 1991. – 320 с.

- [12] Борзаков А.Ю., Валухов С.Г., Костин В.А., Орлов В.П., Сапронов Ю.И. Стационарные осесимметричные течения в цилиндрическом гидроциклоне // Математические модели и операторные уравнения. - Воронеж: ВорГУ, 2001. - С. 19-24.
- [13] Борзаков А.Ю. Нелинейные ритцевские аппроксимации и визуализации бифуркаций экстремалей / А.Ю. Борзаков, А.А. Лемешко, Ю.И. Сапронов // Вестник ВГУ. Сер. физ., матем. Воронеж: изд. ВГУ. - 2003, вып. 2. - С. 100-112.
- [14] Борзаков А.Ю. Применение методов конечномерной редукции к глобальному анализу краевых задач на примере уравнения Дуффинга/ А.Ю.Борзаков // Сборник трудов математического факультета ВГУ. 2004. Вып.8. С. 1-12.
- [15] Борзаков А.Ю. Редукции в нелокальном анализе вариационных краевых задач и уравнение колебаний маятника //Семинар по глобальному и стохастическому анализу. Воронеж: ВГУ. - 2005, Вып.1. - С. 34-44.
- [16] Борзаков А.Ю., Костина Т.И., Сапронов Ю.И. К нелокальному бифуркационному анализу вариационных краевых задач // Математические модели и операторные уравнения. Сборник научных статей под редакцией В.А. Костина и Ю.И. Сапронова. Том 6 - Воронеж: ВорГУ, 2009. - С. 8-23.
- [17] Борисов А.В., Мамаев И.С. Современные методы теории интегрируемых систем // Москва-Ижевск, 2003. - 296 с.
- [18] Борисович Ю.Г., Звягин В.Г., Сапронов Ю.И. Нелинейные фредгольмовы отображения и теория Лере-Шаудера // Успехи матем. наук. 1977. Т.32, вып.4. С. 3-54.
- [19] Бреккер Т., Ландер. Л. Дифференцируемые ростки и катастрофы // М.: Мир, 1977. - 208 с.
- [20] Брус Дж., Джиблин. П. Кривые и особенности: Геометрическое введение в теорию особенностей // Пер. с англ. - М.: Мир, 1988. - 262 с.
- [21] Ван дер Варден Б.Л. Алгебра // М.: Наука, 1979. - 624 с.

- [22] Валюхов С.Г., Костин В.А., Сапронов Ю.И. К кинематике винтовых насосов // Труды математического факультета (новая серия). Воронеж: изд-во ВГУ, 1998. N.3. - С. 14-19.
- [23] Валюхов С.Г., Костин В.А., Сапронов Ю.И. К оптимизации зацеплений вращающихся пластин контуров // Вестник ВГУ. Сер. физ., мат. Вып. 1. 2000. С. 98-104.
- [24] Валюхов С.Г., Костин В.А., Сапронов Ю.И., Семенов С.М. Зацепления винтовых поверхностей // Воронеж: изд-во ВГУ, 1999. 131 с.
- [25] Валюхов С.Г., Костин В.А., Сапронов Ю.И., Семенов С.М. Оптимизация шестеренчатых зацеплений винтовых поверхностей // Воронеж: ВорГУ. 2005. - 177 с.
- [26] Валюхов С.Г., Ковалева М.И., Костин В.А., Сапронов Ю.И. Рождение линий негладкости на поверхности, сопряженной с винтовой поверхностью алгеброидного профиля // Математические модели и операторные уравнения. Том 4. Воронеж: ВГУ, изд-во "Созвездие 2007. - С. 19-30.
- [27] Валюхов С.Г., Ковалева М.И., Костин В.А., Сапронов Ю.И. Рождение линий негладкости на сопряженной винтовой поверхности // Из режима функционирования – в режим развития: сборник научных трудов региональной межвузовской научно-практической конференции. Ч. 2. - Воронеж: ВФ МГЭИ, 2007. С. 4-7.
- [28] Вайнберг М.М., Треногин В.А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений // М.: Наука. 1969. - 528 с.
- [29] Ван дер Варден Б.Л. Алгебра // М.: Наука, 1979, - 624 с.
- [30] Варченко А.Н. Теорема об эквисингулярности семейств алгебраических многообразий // Успехи матем. наук. - 1971. Т. 26, вып. 1. - С. 317-218.
- [31] Варченко А.Н. О ростках аналитических отображений, топологический тип которых определяется конечной струей // Функц. анализ и его прил. - 1972. - Т. 6, вып. 3. - С. 63-64.
- [32] Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач // М.: Наука, 1981. - 400 с.

- [33] Винберг Э.Б. Симметрия многочленов // М.: МЦНМО, 2001. - 24 с.
- [34] Власов В.З., Леонтьев Н.Н. Балки, плиты и оболочки на упругом основании // М.: Физматгиз, 1960. 491 с.
- [35] Волков Е.А. О решении краевых задач для уравнения Пуассона в прямоугольнике // Докл. АН СССР. 1962. - 147, № 2. - С. 13-16
- [36] Вольмир А.С. Гибкие пластины и оболочки // М. : Гостехиздат. 1956.
- [37] Ворович И. И. О методе Бубнова—Галёркина в нелинейной теории колебания пологих оболочек // Доклады АН СССР, 1956. Т. 110. №5. — С. 723—726.
- [38] Ворович И.И. Математические проблемы нелинейной теории пологих оболочек // М. : Наука. 1989. - 376 с.
- [39] Гнездилов А.В., Сапронов Ю.И. Нелокальные конечномерные редукции в теории изгиба тонких упругих пластин // Понтрягинские чтения - V. Тезисы докладов. Воронеж: Изд. ВГУ, 1994. - С. 37.
- [40] Гнездилов А.В., Сапронов Ю.И. Осесимметрическая конечномерная редукция для круглой упругой пластины // Материалы конференции по функциональному анализу и математической физике, посвященной 80-летию С.Г.Крейна. Воронеж: ВГУ, 1997. - С. 32-36.
- [41] Голубицкий М., Гийемин В. Устойчивые отображения и их особенности // М.: Мир, 1978. - 290 с.
- [42] Даринский Б.М., Сапронов Ю.И. Бифуркации экстремалей вблизи особенности многомерной сборки // Известия ВУЗов. Математика. Т.2. Казань: Форт-Диалог, 1997. - С. 35-46.
- [43] Даринский Б.М., Сапронов Ю.И., Шалимов В.Л. К термодинамической теории сегнетоэлектрических фазовых переходов в кристаллах // Кристаллография. - 1999. - Т.44, № 4. - С. 1-5.
- [44] Darinskii M.M., Sapronov Yu.I., Shalimov V.V. Phase transitions in crystals characterized by polarization and deformation components of the order parameter // Ferroelectrics. - 2002. V. 265. - P. 31-42.
- [45] Даринский Б.М., Сапронов Ю.И. Дискриминантные множества и расклады бифурцирующих решений фредгольмовых уравнений //

Современная математика и ее приложения. - Тбилиси. 2003. Т.7. - С.72-86.

- [46] Даринский Б.М., Сапронов Ю.И., Царев С.Л. Бифуркации экстремалей фредгольмовых функционалов // Современная математика. Фундаментальные направления. Том 12 (2004) - С. 3-140.
- [47] Долженков А.А., Сапронов Ю.И., Сапронова Т.Ю. Нелокальный бифуркационный анализ некоторых конфигураций кирхгофа стержня // Математические модели и операторные уравнения. Воронеж, ВГУ, изд-во "Созвездие". Т.6, 2009. - С. 27-41.
- [48] Заславский Г.М., Сагдеев Р.З. Введение в нелинейную физику: От маятника до турбулентности и хаоса // М. : Наука, 1988. - 368 с.
- [49] Зачепа В.Р. , Сапронов Ю.И. Локальный анализ фредгольмовых уравнений // Воронежский госуниверситет. Воронеж 2002.
- [50] Изюмов Ю.А., Сыромятников В.И. Фазовые переходы и симметрия кристаллов // М: Наука. 1984. - 247 с.
- [51] Иллс Дж. Основания глобального анализа // Успехи матем. наук. 1969. Т.24, №3. - С. 157-210.
- [52] Иллс Дж. Фредгольмовы структуры // Успехи матем. наук. - 1971. Т.26, №6. - С. 213-240.
- [53] Инфельд Э., Роуландс Дж. Нелинейные волны, солитоны и хаос (пер. с англ.) // М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. - 480 с.
- [54] Иосида Функциональный анализ (пер. с англ.) // М.: ФИЗМАТЛИТ, 1968.
- [55] Клингенберг В. Лекции о замкнутых геодезических // М.: Мир. 1982. 416 с.
- [56] Костин Д.В. Применение формулы Маслова для асимптотического решения одной задачи об упругих деформациях // Матем. заметки, 2008. Т. 83, № 1. - С. 50-60.
- [57] Костин Д.В. Об одной схеме анализа двухмодовых прогибов слабо неоднородной упругой балки // Доклады Академии наук. 2008, Т. 418, № 4, - С. 295-299

- [58] Костин Д.В. Применение асимптотических методов теории линейных операторов в анализе бифуркаций экстремалей // Труды воронежской зимней математической школы С.Г. Крейна - 2008. Воронеж: изд. ВГУ, 2008. - С. 172-179.
- [59] Костина Т.И. Анализ ветвления периодических решений уравнения Белецкого посредством вариационного метода Ляпунова-Шмидта // Математические модели и операторные уравнения. Том 5, часть 1. Воронеж: изд. ВГУ, 2008. - С. 98-103.
- [60] Костина Т.И., Сапронов Ю.И. Вычисление и применение ключевой функции в задаче о нелокальных прогибах круглой упругой пластины // Математические модели и операторные уравнения. Сборник научных статей под редакцией В.А. Костина и Ю.И. Сапронова. Том 7. Воронеж: изд. ВГУ, 2011. - С. 79-88.
- [61] Костина Т.И. Нелокальное вычисление ключевых функций в задаче о периодических решениях вариационных уравнений // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. №1. 2011 - С. 181-186.
- [62] Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидродинамика, ч. 2 // М.: Физматгиз, 1963. - 728 стр.
- [63] Красносельский М.А. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений // М.: Гостехиздат, 1956. - 390 с.
- [64] Красносельский М.А., Бобылев Н.А., Мухамадиев Э.М. Об одной схеме исследования вырожденных экстремалей функционалов классического вариационного исчисления // ДАН СССР. - 1978. - Т. 240, №3. - С. 530-533.
- [65] Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П., Рутицкий Я.Б., Стеценко В.Я. Приближенное решение операторных уравнений // М.: Наука, 1969. - 456 с.
- [66] Красносельский М.А., Забрейко П.П. Геометрические методы нелинейного анализа // М.: Наука. 1975. - 512 с.
- [67] Красносельский М.А., Крейн С.Г. Итерационный процесс с минимальными невязками // Матем. сб-к. 1952. т.31 (73), в.2. С. 315-334.

- [68] Кулагин Н.Е., Лерман Л.М., Шмакова Т.Г. Фронты, бегущие фронты и их устойчивость в обобщенном уравнении Свифта-Хогенберга // ЖВМ, 2008, том 48, № 4, с. 693-712
- [69] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т VI. Гидродинамика. // М.: Наука, 1986. - 736 с.
- [70] Лемешко А.А. О равномерной сходимости с производными галеркинских приближений к решениям уравнений с параметрами // Математические модели и операторные уравнения. Том 2. Воронеж: изд. ВГУ, 2003. - С. 94-103.
- [71] Лемешко А.А. Об равномерной сходимости ньютоновских приближений к решениям уравнений с параметрами // Сборник трудов молодых ученых математического факультета ВГУ, Воронеж: ВГУ, 2003. - С.74-83.
- [72] Логинов Б.В. Теория ветвления нелинейных уравнений в условиях групповой инвариантности // Ташкент.: Фан, 1985. - 184 с.
- [73] Ляпунов А.М. Sur les figures d'équilibre peu differentes des ellipsoides d'une masse liquide homogene donee d'un mouvement de rotation, p.1 // Зап. Акад. наук, С.-Петербург. 1906.
- [74] Ляв А. Математическая теория упругости // М.-Л.: НКТП СССР. 1935. - 674 с.
- [75] Постон Т., Стюарт И. Теория катастроф и её приложения // М.: Мир, 1980. - 608 с.
- [76] Мазер Дж.Н. Конечная определенность гладких отображений // Математика, 1970. Т. 14, № 1. - С. 145-175.
- [77] Малюгина М.А. Двумерные локальные сечения дискриминантного множества уравнения Кáрмана при наличии неконсервативной силы // Математические модели и операторные уравнения. Том 7. Воронеж: ВГУ. 2011. - С. 160-169.
- [78] Малюгина М.А. Сечение дискриминантных множеств слабо неоднородных упругих систем в условиях нарушения потенциальности // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. 2011. №1 - С.187-192.
- [79] Милнор Дж. Теория Морса // М. : Мир, 1965.

- [80] Милнор Дж. Особые точки комплексных гиперповерхностей // М. : Мир, 1971. - 126 с.
- [81] Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике // М. : Наука, 1970. - 512 с.
- [82] Мітропольський Ю.О., Мосеєнков Б.І. Дослідження коливань в системах з розподіленими параметрами (асимптотичні методи) // Видавництво Київського університету. 1961. - 123 п.
- [83] Ниренберг Л. Лекции по нелинейному функциональному анализу // М. : Мир, 1977. - 232 с.
- [84] Постников М.М. Введение в теорию Морса // М. : Наука, 1971. - 568 с.
- [85] Постон Т. Стюарт И. Теория катастроф и ее приложения // М. : Мир, 1980. - 608 с.
- [86] Пуанкаре А. Избранные труды в трех томах Том 2. Новые методы небесной механики. Топология. Теория чисел. // М. : Наука, 1972. - 1000 с.
- [87] Сапронов Ю.И. Конечномерные редукции в гладких экстремальных задачах // Успехи матем. наук. 1996. Т. 51, №1. - С. 101-132.
- [88] Сапронов Ю.И. Нелокальные конечномерные редукции в вариационных краевых задачах // Математические заметки. 1991. Т.49, вып.1. - С.94-103.
- [89] Сапронов Ю.И. Регулярные возмущения фредгольмова отображения и теорема о нечетном поле // Труды матем. фак-та ВГУ. Воронеж: Изд. ВГУ, 1973, вып. 10. - С. 82-88.
- [90] Сапронов Ю.И. Существование и сравнение конечномерных редукций для гладких функционалов // В кн.: Глобальный и стохастический анализ. Воронеж: ВГУ, 1995. - С. 69-90.
- [91] Сапронов Ю. И., Царев С.Л. Глобальное сравнение конечномерных редукций в гладких вариационных задачах // Матем. заметки. - 2000. Т. 58, №5. - С. 745-754.
- [92] Сапронова Т.Ю. О разрушении компактных критических орбит инвариантных фредгольмовых функционалов при несимметричных

возмущениях // Труды математического факультета. Новая серия. - Воронеж: изд. ВГУ. 1997. - N2(18). - С. 54-58.

- [93] Сапронова Т.Ю. Квазиинвариантные подмногообразия фредгольмовых функционалов // Сборник статей аспирантов и студентов математического факультета ВГУ. Воронеж: изд. 1999. - С. 150-155.
- [94] Сидоров Н.А. Ветвление решений нелинейных уравнений с потенциальными системами разветвления // В кн.: Дифференциальные и интегральные уравнения. - Иркутск: Изд. Иркутского университета, 1980. - Вып.7. - С. 136-155.
- [95] Скрипов В.П., Скрипов А.В. Спинодальный распад (Фазовый переход с участием неустойчивых состояний) // УФН. Т.123, вып.2. 1979. - С. 193-231.
- [96] Смирнов В.И. Курс высшей математики. Том 2 // М. : Наука, 1974. - 656 с.
- [97] Толедано Ж.-К., Толедано П. Теория Ландау фазовых переходов // М.: Мир. 1994. - 461 с.
- [98] Царев С.Л. Глобальное сравнение эквивариантных конечномерных редукций для гладкого G-инвариантного функционала // Труды матем. факультета ВГУ. - Воронеж: Изд. ВГУ, 1998. - № 3 (новая серия). - С. 73-76.
- [99] Царев С.Л. Один вариант леммы Морса и его приложения к нелинейным вариационным задачам // В кн.: Топологические методы нелинейного анализа. - Воронеж: Изд. ВГУ, 2000. - С. 132-136.
- [100] Царев С.Л. О глобальной распрямляемости гладких функций с единственной критической точкой // Труды матем. факультета ВГУ. - Воронеж: Изд. ВГУ, 1996. - № 1 (новая серия). - С. 92-96.
- [101] Cacciopoli R. Un principio di inversione per le corrispondenze funzionali e sue applicazioni alla equazione a derivate parziali // Rend. Acc. Lincei. - 1932. V.16. - P. 390-395, P. 484-489.
- [102] Cacciopoli R. Sulle corrispondenze funzionali inverse dirette: teoria generale e applicazioni ad alcune equazioni non-lineari e al problema di Plateau // Rend. Acc. Lincei. - 1936. V.24. - P. 258-263, P. 416-421.
- [103] Hamel G. Spiralförmige Bewegungen zäher Flüssigkeiten // Jahresber. Dtsch. Math. Ver. 1917. Bd 25. - S. 34-60.

- [104] Elworthy K.D., Tromba A.J. Degree theory on Banach manifolds // Proc. Sympos. Pure. Math. - 18, A.M.S. 1970. - P. 86-94.
- [105] Elworthy K.D., Tromba A.J. Differential structures and Fredholm maps on Banach manifolds // Proc. Sympos. Pure. Math. - 15, A.M.S. 1970. - P. 49-94.
- [106] Ishibashi Y.J. Phenomenological theory of domain walls // Ferroelectrics. - 1989. V.98. - P.193-205.
- [107] Jeffery G.B. The two-dimensional steady motion of a viscous fluid // Phil. Mag. 1915. Ser.6. V.29, №172. - P. 455-465.
- [108] Cahn J.W., Hilliard J.E. Free energy of a nonuniform system. I. Interfacial free energy // J. Chem. Phys. 1958. Vol. 28. - P. 258-267.
- [109] Marsden J.E. Qualitative Methods in Bifurcation Theory // Bull. Amer. Math. Soc. - 1978. V.84, № 6.
- [110] Marsden J.E. On the Geometry of the Liapunow-Schmidt procedure// Lect. Notes in Math. - 1979. V.755. - P.77-82.
- [111] Smale S. An infinite dimensional version of Sard's theorem// Amer. J. Math. 1965. v.87. - P. 861-866.
- [112] Schmidt E. Zur Theorie linearen und nichtlinearen Integralgleichungen, Theil 3: Über die Auflösung der nichtlinearen Integralgleichungen und Verzweigung ihrer Lösungen// Math. Ann. 1908. V.65. - P. 370-399.
- [113] Swift J., Hohenberg P.S. Hydrodynamic fluctuations at the convective instability // Phys. Rev. 1977. V. A15. P. 319-328.
- [114] Thompson J.M.T., Hunt G. W., A General Theory of Elastic Stability. John Wiley & Sons, 1973, 322 p.
- [115] Thompson J.M.T. Advances in Shell Buckling: Theory and Experiments // International Journal of Bifurcation and Chaos, Vol. 25, No. 1 (2015) - 25 p.